

## A. Résumé du cours 1984-85

Le cours de cette année est le premier d'une série de deux cours consacrés à l'étude du piégeage et du refroidissement de particules *chargées*. Rappelons que les cours des deux années antérieures avaient porté sur des problèmes analogues relatifs à des atomes *neutres*. L'objectif général des travaux théoriques et expérimentaux qui sont effectués dans ce domaine de recherche est de ralentir, refroidir, piéger une particule atomique, de manière à pouvoir l'observer dans des conditions aussi pures que possible, et pendant des temps aussi longs que possible (afin d'éliminer toutes les perturbations liées aux collisions, à l'effet Doppler, à l'élargissement dû au temps de transit...).

En ce qui concerne les particules chargées, deux grands domaines d'application sont à distinguer suivant que ces particules sont des leptons (électrons, positrons, muons) ou des ions. Dans le premier cas, la mesure précise du moment magnétique de spin de la particule permet d'évaluer les corrections radiatives à ce moment magnétique (« anomalie  $g - 2$  ») et de tester ainsi des théories et des symétries fondamentales comme l'électrodynamique quantique ou la symétrie particule-antiparticule. Dans le second cas, l'étude à haute résolution des diverses transitions d'un ion piégé a des applications importantes dans divers domaines comme la spectroscopie de masse, la spectroscopie optique et microonde, les standards de fréquence. Le cours de cette année a été consacré à l'étude des électrons et des positrons. Le problème des ions sera abordé au cours de l'année suivante.

### Bref historique sur le moment magnétique de spin de l'électron

Le cours débute par une description de l'évolution de nos idées sur le moment magnétique de spin de l'électron et par un survol des diverses étapes qui ont marqué cette évolution : apparition du spin dans la théorie quantique et « théorème » de Bohr interdisant l'observation d'un effet Stern et Gerlach sur l'électron libre ; premières expériences de physique atomique de Rabi, Kusch... mettant en évidence l'anomalie  $g - 2$  et suscitant les premiers calculs de cette anomalie ; premières expériences sur des électrons libres ou faiblement liés et utilisant l'effet Mott ; première proposition faite par F. Bloch d'opérer sur des électrons piégés ; première expérience de H. Dehmelt sur des électrons polarisés par collisions d'échange avec des atomes pompés optiquement ; premières expériences de précession libre... Certains de ces problèmes ont été repris plus en détail dans une conférence présentée par O. Darrigol dans le cadre du séminaire de physique atomique et moléculaire.

### Electron dans un piège de Penning - Fréquences propres et niveaux d'énergie

Les expériences actuelles qui ont donné les résultats les plus précis sur l'électron utilisent des pièges de Penning.

Avant de décrire de tels pièges, on commence par rappeler les résultats relatifs au mouvement d'un électron dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}_0$ , parallèle à Oz. Deux fréquences importantes apparaissent, la fréquence *cyclotron*  $\omega_c$  de la charge, et la fréquence de précession de *Larmor*  $\omega_L$  du spin. L'étude quantique de ce problème conduit au diagramme d'énergie de *Landau-Rabi*.

Avec un seul champ  $\vec{B}_0$ , le mouvement de l'électron n'est pas confiné dans la direction Oz de  $B_0$ . L'idée la plus simple consiste alors à appliquer un potentiel électrostatique  $\Phi$  en  $z^2$ , de manière à introduire une force de rappel ramenant l'électron en  $z = 0$ . En fait, à cause de l'équation de Laplace, le potentiel  $\Phi$  est nécessairement quadrupolaire : il varie en  $2z^2 - (x^2 + y^2)$  et donne donc naissance à une force répulsive qui éloigne l'électron de l'origine dans le plan xoy. La force de Lorentz due au champ magnétique  $\vec{B}_0$  peut cependant compenser cette force répulsive, si  $B_0$  est suffisamment grand. Finalement, la combinaison d'un potentiel électrostatique quadrupolaire  $\Phi$ , de révolution autour de Oz, et d'un champ magnétique  $\vec{B}_0$ , parallèle à Oz et suffisamment intense, peut confiner le mouvement de l'électron dans les trois directions, et constitue un *piège de Penning*.

Les équations classiques du mouvement de l'électron dans un tel piège sont résolues et mettent en évidence l'existence de 3 fréquences pour le mouvement de la charge (en plus de la fréquence de Larmor  $\omega_L$  du spin qui demeure inchangée en présence de  $\Phi$ ) : la *fréquence cyclotron modifiée*  $\omega'_c$ , associée au mouvement cyclotron perturbé par le champ électrique, la *fréquence de vibration axiale*  $\omega_z$  dans le creux de potentiel de  $\Phi$  le long de Oz, la *fréquence magnétron*  $\omega_m$ , associée à une dérive lente de l'orbite cyclotron autour de Oz.

L'hamiltonien quantique de l'électron dans un tel piège est également étudié. Il peut être mis sous la forme d'une somme de 3 hamiltoniens d'oscillateurs harmoniques indépendants, de fréquences  $\omega'_c$ ,  $\omega_z$ ,  $\omega_m$ . Les fréquences de Bohr apparaissant dans le mouvement des diverses observables de l'électron sont déterminées.

Enfin, compte tenu de la précision avec laquelle l'anomalie  $g - 2$  est actuellement mesurée à partir des fréquences  $\omega'_c$ ,  $\omega_z$ ,  $\omega_m$ ,  $\omega_L$ , on évalue les conséquences sur ces fréquences d'une imperfection éventuelle du piège : défaut de symétrie de révolution, défaut d'alignement entre le champ  $\vec{B}_0$  et l'axe de symétrie de  $\Phi$ .

I-2

### Processus de relaxation

Le cours se poursuit par une étude des divers processus physiques couplant l'électron dans le piège de Penning au monde extérieur, et introduisant ainsi un *amortissement* du mouvement de cet électron, de même que du *bruit*. Le vide dans l'enceinte est supposé suffisant pour qu'on puisse négliger les collisions avec le gaz résiduel.

Le premier processus étudié est l'*émission spontanée* de rayonnement qui n'est appréciable que pour le mouvement cyclotron.

Un phénomène beaucoup plus important est lié aux charges induites par l'électron sur les électrodes du piège. La variation de ces charges induites quand l'électron est en mouvement lent fait apparaître un *courant dans les circuits extérieurs*, et par suite, une *dissipation* d'énergie par effet Joule dans les résistances de ces circuits, de même qu'un *bruit* associé aux fluctuations thermiques du voltage dans les résistances. Enfin, l'interaction de l'électron avec les charges qu'il induit sur les électrodes peut modifier légèrement ses fréquences propres.

Tous ces phénomènes sont analysés qualitativement et quantitativement en termes de circuits électriques équivalents.

### Détection de la résonance axiale - Observation d'un électron unique

Les électrodes permettant de réaliser le potentiel quadrupolaire  $\Phi$  sont au nombre de trois : une électrode ayant la forme d'un anneau entourant l'axe Oz et deux électrodes coupelles, perpendiculaires à l'axe Oz et fermant le piège en haut et en bas.

En appliquant entre les 2 coupelles une tension alternative de fréquence  $\omega$  voisine de  $\omega_z$ , on excite le mouvement de vibration axiale de l'électron. Le passage à la résonance est détecté sur les variations résonnantes du courant induit par le mouvement de vibration de l'électron dans le circuit reliant les 2 coupelles. La fréquence de vibration axiale peut être déterminée à une fraction de hertz près.

Les expériences correspondantes sont décrites, notamment, celles qui ont permis à D. Wineland, P. Ekstrom et H. Dehmelt de détecter la résonance d'un *électron unique*.

### Détection des autres résonances par couplage avec la vibration axiale - Méthode de la bouteille magnétique

Les mouvements cyclotron, magnétron et de spin n'induisent pas de courant dans le circuit des coupelles. La méthode de la *bouteille magnétique*, imaginée par H. Dehmelt, permet de mesurer les fréquences propres de ces

3 mouvements en les couplant au mouvement de vibration axiale, grâce à un champ magnétique inhomogène qui introduit une énergie potentielle effective supplémentaire, variant en  $z^2$ , et dépendant des nombres quantiques cyclotron, magnétron et de spin. Toute variation de ces nombres quantiques, produite par une résonance cyclotron, magnétron ou de spin, se traduit donc par un changement de l'énergie potentielle le long de Oz, et donc par une variation de la fréquence de vibration axiale, aisément mesurable.

Une telle méthode est analysée quantitativement. Le calcul de l'hamiltonien de perturbation associé au champ magnétique inhomogène permet de déterminer les termes de couplage entre les divers mouvements et d'obtenir l'expression du déplacement de la fréquence de vibration axiale. On montre également que les diverses résonances sont d'autant plus élargies par les inhomogénéités du champ magnétique que le nombre quantique de vibration axiale est plus élevé.

Plusieurs exemples d'applications sont finalement passés en revue : excitation et détection de la résonance magnétron, de la résonance cyclotron, des résonances mixtes cyclotron-spin, de fréquence  $\omega_L - \omega'_c$ .

#### Refroidissement radiatif du mouvement magnétron

Les résonances mixtes, où 2 nombres quantiques varient à la fois, sont intéressantes pour *refroidir* les degrés de liberté d'une particule piégée. Le principe d'une telle méthode, imaginée par D. Wineland et H. Dehmelt, est expliqué sur les résonances mixtes vibration-magnétron à  $\omega_z + \omega_m$ . L'absorption d'un photon  $\hbar(\omega_z + \omega_m)$  augmente le nombre quantique de vibration d'une unité, tout en diminuant le nombre quantique magnétron d'une unité. Or, le mouvement de vibration est le seul à être couplé aux circuits extérieurs. Le nombre quantique de vibration retourne donc rapidement à sa valeur initiale par suite de la dissipation dans le circuit extérieur, alors que le nombre quantique magnétron ne change pas. Il suffit donc de recommencer un grand nombre de fois le cycle précédent pour diminuer de manière appréciable l'énergie magnétron, et donc refroidir les degrés de liberté correspondants.

Une analyse quantitative originale du refroidissement radiatif est présentée. Elle est basée sur les équations de Heisenberg couplées des 2 oscillateurs (associés aux mouvements de vibration axiale et magnétron), auxquelles sont ajoutés des termes de relaxation pour le mouvement de vibration axiale. La résolution de ces équations permet de déterminer la vitesse du refroidissement ainsi que les limites qu'il permet d'atteindre.

Effet Stern et Gerlach continu- Analyse d'un processus de mesure portant sur un électron unique

Comme dans l'expérience de Stern et Gerlach, le spin de l'électron interagit avec un gradient de champ, celui de la bouteille magnétique. Cette interaction permet de détecter l'état de spin de l'électron, dans la mesure où la fréquence de vibration axiale  $\omega_z$  de l'électron dépend de cet état de spin. Comme  $\omega_z$  peut être mesurée en permanence, une telle expérience a reçu le nom d'*effet Stern et Gerlach continu*. Elle est suffisamment simple, au moins dans des conditions idéales (un seul électron, pas d'autres sources de bruit que la résistance R du circuit de détection), pour qu'on puisse étudier en détail un certain nombre de problèmes relatifs au processus de mesure. Le cours présente et discute les arguments de H. Dehmelt sur ces problèmes.

Tout d'abord, il n'est possible d'affirmer que le spin a basculé que si la variation correspondante,  $\delta\omega_z$ , de la fréquence de vibration axiale est supérieure au bruit. Or, le bruit, produit par la résistance R, est d'autant plus petit que le temps d'intégration du circuit détectant les variations de  $\omega_z$  est plus long. Il apparaît ainsi que la mesure de l'état de spin de l'électron doit durer un *temps minimum*  $T_m$ , celui pendant lequel il faut moyennner le bruit pour le rendre inférieur au signal. Ce temps  $T_m$  est calculé en fonction des divers paramètres de l'expérience.

Le bruit produit par la résistance R a un autre effet, celui de faire varier aléatoirement l'amplitude du mouvement de vibration de l'électron, et donc le champ magnétique moyen « vu » par cet électron. La bouteille magnétique et le circuit électrique de détection (appareil de mesure) introduisent donc un élément aléatoire dans l'évolution du spin (système qu'ils permettent d'étudier). On montre alors que le temps de mesure minimum  $T_m$ , introduit plus haut, est aussi le temps au bout duquel l'interaction avec l'appareil a complètement « brouillé » les phases relatives entre les 2 états de spin de l'électron.

L'étude de l'effet Stern et Gerlach continu permet ainsi, sur un exemple précis, d'étudier en détail la perturbation associée au processus de mesure. D'autres problèmes, comme le « paradoxe de Zénon », sont également discutés sur cet exemple simple.

Extension de la méthode aux positrons

Le cours se poursuit par la description des expériences que P. Schwinger, R. Van Dyck et H. Dehmelt ont réalisées sur des positrons. Les positrons émis par une source radioactive, sont ralentis électrostatiquement, capturés dans un piège de Penning et refroidis radiativement. Ils sont ensuite transférés dans un second piège de Penning dont les défauts sont compen-

sés avec soin, puis éjectés l'un après l'autre jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul positron dans le piège. La mesure de l'anomalie  $g - 2$  est alors effectuée suivant la même méthode que pour l'électron.

Les résultats les plus récents obtenus sur l'électron et le positron sont passés en revue. Près de trois ordres de grandeur ont été gagnés en précision par rapport aux meilleures mesures antérieures. Les facteurs  $g$  de l'électron et du positron sont trouvés égaux à  $2.10^{-11}$  près, ce qui constitue un test très sévère de la symétrie matière-antimatière. Notons enfin que la précision expérimentale actuelle sur l'anomalie  $g - 2$  est 30 fois plus élevée que la précision des calculs d'électrodynamique quantique.

Les expériences sur l'anomalie  $g - 2$  des *muons* positifs et négatifs ont été décrites et discutées dans une conférence du Professeur E. PICASSO du C.E.R.N., présentée dans le cadre du séminaire de physique atomique et moléculaire.

#### Corrections relativistes - Bistabilité et hystérésis d'origine relativiste

La dernière partie du cours est consacrée à l'étude d'un certain nombre d'effets relativistes.

Les corrections relativistes aux différentes fréquences propres de l'électron dans le piège de Penning sont étudiées à partir de la limite non relativiste de l'équation de Dirac, à laquelle est ajouté un terme décrivant l'anomalie  $g - 2$  du moment magnétique de spin de l'électron. La correction la plus importante concerne la fréquence cyclotron qui diminue quand l'énergie cyclotron augmente. L'excitation du mouvement cyclotron entraîne également une correction relativiste de la fréquence de vibration axiale  $\omega_z$  :  $\omega_z$  diminue quand le nombre quantique cyclotron  $n$  augmente. Par contre, le mouvement cyclotron ne perturbe pas la fréquence d'anomalie  $\omega'_a = \omega_L - \omega'_c$  qui n'est sensible qu'au mouvement de vibration axiale.

Le fait que la fréquence cyclotron dépende de l'énergie du mouvement cyclotron entraîne que l'oscillateur associé au mouvement cyclotron acquiert une *anharmonicité* d'origine relativiste. Or, il est bien connu que des effets *d'hysteresis* et de *bistabilité* peuvent apparaître sur un oscillateur anharmonique quand on balaie lentement la fréquence d'excitation par valeurs décroissantes puis croissantes. De tels phénomènes d'hysteresis et de bistabilité d'origine relativiste viennent d'être effectivement observés par G. Gabrielse, H. Dehmelt et W. Kells sur un électron unique capturé dans un piège de Penning. Les expériences correspondantes sont décrites et analysées. Les perspectives ouvertes par l'utilisation d'effets relativistes pour la spectroscopie à très haute résolution de particules piégées sont également discutées.

① Thème choisi

"Ions piégés - Refroidissement radiatif et applications"

Extension aux ions des méthodes décrites l'an dernier et relatives aux électrons - Discussion des méthodes et des applications nouvelles spécifiques des ions

② Ce qu'il y a de nouveau par rapport aux électrons

- Nombreux niveaux d'énergie internes (au lieu des seuls degrés de liberté de spin).
- Possibilité de faire interagir les ions piégés avec un faisceau laser  
Méthodes de détection optique (fluorescence)  
Contrôle laser des degrés de liberté internes (pompage optique) et externes (refroidissement laser)
- Beaucoup plus d'applications en physique atomique et moléculaire (spectroscopie, collisions, durées de vie... et en métrologie (standards de fréquence))
- Problème théorique intéressant de l'évolution couplée des degrés de liberté externes et internes.

③ Caractéristiques de ces méthodesAvantages

- Longs temps d'observation.
- Pas d'effet Doppler, ni du 1<sup>er</sup> ni du 2<sup>ème</sup> ordre grâce au refroidissement laser  
Vraie élimination et non simple compensation
- Perturbations dues aux champs extérieurs faibles et contrôlables.  
Localisation dans un petit volume.
- Perturbations dues aux collisions, aux interactions entre ions très faibles.  
Très petit nombre d'ions.  
Éventuellement étude d'un ion unique.

Limitations

- Petit nombre d'ions (limitation due à la charge d'espace)  
Signal faible, en particulier pour les ions moléculaires où le petit nombre d'ions est réparti sur un grand nombre de niveaux.

Possibilité néanmoins de méthodes de détection très I-5  
sensibles (électriques, optiques)

- Encore peu de sources laser dans l'ultraviolet où se  
situent la plupart des raies des ions

#### ④ Les grands domaines d'application

##### Spectroscopie - Physique atomique et moléculaire

Spectroscopie de masse  
Spectroscopie RF, microonde, et optique  
Ions moléculaires, ions négatifs  
Durées de vie longues  
Processus de collision

##### Métrologie

Standards de fréquence - Horloge  
Stabilité - Précision

##### Problèmes fondamentaux

Limites ultimes imposées par les effets quantiques  
Tests des théories fondamentales (relativité générale)  
Plasmas froids et fortement couplés (Ecoulements  $\gg$  RT)

#### Bibliographie : quelques articles de revue

H. G. Dehmelt Adv. At. Mol. Phys. 3, 53 (1967) et 5, 109 (1969)

H. G. Dehmelt in "Advances in Laser Spectroscopy" (F.T. Arcechi,  
F. Strumia, H. Walther eds) Plenum (1983) p. 153

P. E. Toschek in "New Trends in Atomic Physics", Les Houches XXXVIII  
1982 (G. Grynberg et R. Stora eds) Elsevier (1984) p. 381

D. J. Wineland, W. M. Itano, R. S. Van Dyck  
Adv. At. Mol. Phys. 19, 135 (1983)

D. J. Wineland, W. M. Itano, J. C. Bergquist, J. J. Bollinger  
J. D. Prestage in Atomic Physics 9 (R. S. Van Dyck et  
E. N. Fortson eds) World Scientific (1984) p. 3

Mêmes auteurs : Symposium A. Kastler Paris 1985  
à paraître.



# Généralités sur le piégeage de particules chargées

I-6

## Buts de ce cours

- Introduire les idées essentielles à la base des 2 pièges les plus couramment utilisés, le piège de Penning et le piège radiofréquence
- Rappeler, sans entrer dans le détail des calculs (voir pour cela le cours 84-85), les résultats importants relatifs au piège de Penning
- Donner le principe du piégeage d'une particule chargée dans un champ électrique  $\vec{E}$  inhomogène oscillant. Le cas où le champ  $\vec{E}$  dérive d'un potentiel quadrupolaire (piège de Paul) sera étudié de manière plus approfondie dans le cours suivant.

## Plan

### Introduction (Transparent 1)

### Potentiel électrostatique - Intérêt du potentiel quadrupolaire (T2 à T5)

### Le piège de Penning

Principe, fréquences propres, niveaux d'énergie (T6 à T11)

### Particule chargée dans un champ $\vec{E}(\vec{r}) \cos \Omega t$ inhomogène

Principe, calcul de la force séculaire et du potentiel effectif (T12 à T18)

## Piégeage de particules chargées<sup>(1)</sup>

Plus facile pour une particule chargée que pour un atome neutre car on peut agir sur la charge

Cependant, un potentiel électrostatique  $\phi$  ne peut à lui seul réaliser le piégeage car  $\phi$  n'a pas de minimum ( $\Delta\phi = 0$ )

### Les 2 solutions les plus utilisées

- Utilisation conjointe d'un potentiel électrostatique et d'un champ magnétique uniforme
  - ↳ Piège de Penning
- Modulation RF de  $\phi$  donnant naissance à un potentiel effectif qui, lui, a un minimum
  - ↳ Piège de radiofréquence (Paul)

## Potentiel électrostatique $\phi$ (2)

Solution générale de  $\Delta\phi = 0$

$$\phi = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} c_{\ell}^m r^{\ell} Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$$

$\ell=0$  Constante sans intérêt physique

$\ell=1$  Champ  $\vec{E}$  uniforme non intéressant pour piéger

$\ell=2$  Potentiel quadrupolaire

Cas où le potentiel a la symétrie de révolution autour de  $Oz$  ( $Y_{\ell}^0$ )

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z) &= A(r^2 - 3z^2) \\ &= A(x^2 + y^2 - 2z^2)\end{aligned}$$

Si  $\phi$  piège une particule chargée le long de  $Oz$  en  $z=0$ , il la repousse loin de 0 dans le plan  $xOy$

Intéret de se limiter à  $l=2$  (3)

Piège de Penning

- Force électrique  $q\vec{E} = -q\vec{\nabla}\phi$   
linéaire en  $x, y, z$ , si  $\phi = r^2 Y_2^0$
- Force magnétique  $q\vec{v} \times \vec{B}_0$   
linéaire en  $x, y, z$ , si  $\vec{B}_0$  uniforme
- ↳ Les équations du mouvement forment un système différentiel linéaire, homogène, du 2<sup>ème</sup> ordre
- ↳ Fréquences propres du mouvement indépendantes de l'amplitude du mouvement et de la position de la particule dans le piège.

Piège de Paul

Potentiel effectif proportionnel à  $\vec{E}^2$ , et donc fonction quadratique de  $x, y, z$

↳ Mouvement harmonique

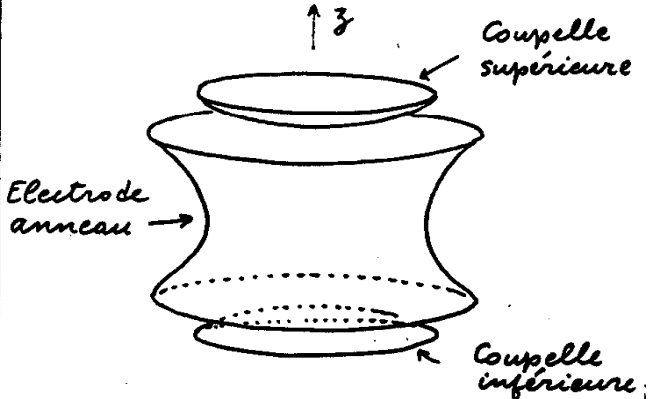
Identité des prédictions classiques et quantiques

Surfaces équipotentielles (4)

$\phi(x, y, z) = A(x^2 + y^2 - 2z^2) = C^te$

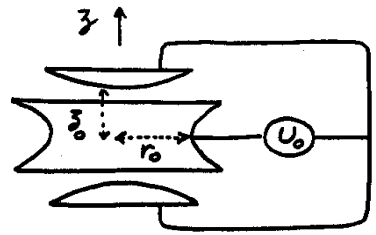
Hyperboloïdes de révolution autour de  $Oz$

Matérialisation par des électrodes



Une électrode en forme d'anneau  
Deux électrodes en forme de coupelle

Paramètres importants de  $\phi$  (5)



Lien entre  $U_0$  et  $A$

$$U_0 = \phi(r_0, 0, 0) - \phi(0, 0, z_0) = A(r_0^2 + 2z_0^2)$$

Fréquence de vibration le long de  $Oz$

$$q\phi(0, 0, z) = -2qAz^2 = \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2$$

(on suppose  $qA < 0$ )

$$\omega_z^2 = \frac{-4qA}{m} = \frac{-4qU_0}{m(r_0^2 + 2z_0^2)}$$

Energie potentielle  $V = q\phi$

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}m\omega_z^2 \left[ z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2} \right]$$

Piège de Penning (6)

Principe

Compenser la force électrique centrifuge dans le plan  $xOy$  par une force magnétique centripète produite par un champ magnétique uniforme  $\vec{B}_0$  parallèle à  $Oz$

Fréquence cyclotron  $\omega_c$

Si  $\vec{B}_0$  était seul, le mouvement transverse de la particule serait un mouvement circulaire à la vitesse angulaire uniforme

$$\omega_c = -\frac{qB_0}{m}$$

Potentiel vecteur  $\vec{A}_0$

$$\vec{A}_0 = -\frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{B}_0$$

Equations classiques du mouvement

$$\vec{r} = -\frac{q}{m} \vec{\nabla} \phi + \frac{q}{m} \vec{r} \times \vec{B}_0$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{\omega_z^2}{2} x - \omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} = \frac{\omega_z^2}{2} y + \omega_c \dot{x} \\ \ddot{z} = -\omega_z^2 z \end{cases}$$

- Système différentiel linéaire homogène du 2<sup>ème</sup> ordre
- Solutions de la forme  $r_0 e^{i\lambda t}$
- 3 valeurs possibles pour  $\lambda$
- Structure reste la même si  $\vec{B}_0$  n'est pas aligné sur un axe de symétrie de  $\phi$ , et si  $\phi$  n'est pas de révolution, tout en restant quadrupolaire ( $l=2$ , avec plusieurs valeurs de  $m$ )
- Pour un piège parfait, découplage du mouvement sur  $Oz$  et du mouvement transverse

Fréquences propres

(pour un piège parfait)

Fréquence de vibration axiale  $\omega_z$   
Mouvement harmonique le long de  $Oz$

Fréquence cyclotron modifiée  $\omega'_c$

$$\omega'_c = \frac{\omega_c}{2} + \frac{\omega_c}{2} \sqrt{1 - \frac{2\omega_z^2}{\omega_c^2}}$$

Diminution de  $\omega_c$  due à la présence de  $\phi$

Fréquence magnétron  $\omega_m$

$$\omega_m = \frac{\omega_c}{2} - \frac{\omega_c}{2} \sqrt{1 - \frac{2\omega_z^2}{\omega_c^2}}$$

Dérive lente de l'orbite cyclotron due au champ  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$

En général,  $\omega'_c \gg \omega_z \gg \omega_m$

Quelques relations

$$\omega'_c + \omega_m = \omega_c$$

$$\omega'_c \omega_m = \frac{\omega_z^2}{2}$$

Allure du mouvement transverse



Composition d'une rotation rapide à  $\omega'_c$  et d'une rotation lente à  $\omega_m$

Cas d'un piège imparfait

$\phi$  quadrupolaire, non de révolution.  $\vec{B}_0$  uniforme, non aligné sur les axes de symétrie de  $\phi$

A partir de l'équation donnant les 3 fréquences propres  $\bar{\omega}_c, \bar{\omega}_z, \bar{\omega}_m$ , on démontre que

$$\bar{\omega}_c^2 + \bar{\omega}_z^2 + \bar{\omega}_m^2 = \omega_c^2$$

L.S. BROWN, G. GABRIELSE  
Phys. Rev. A 25, 2423 (1982)

Etude quantique

Hamiltonien

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A}_0)^2 + V$$

$$\vec{A}_0 = -\frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{B}_0 = \left\{ -y \frac{B_0}{2}, x \frac{B_0}{2}, 0 \right\}$$

$$V = \frac{1}{2} m \omega_z^2 \left[ z^2 - \frac{(x^2 + y^2)}{2} \right]$$

Forme quadratique hermitique en  $x, y, z, p_x, p_y, p_z$ , pouvant être décomposé en 3 modes normaux de vibration indépendants

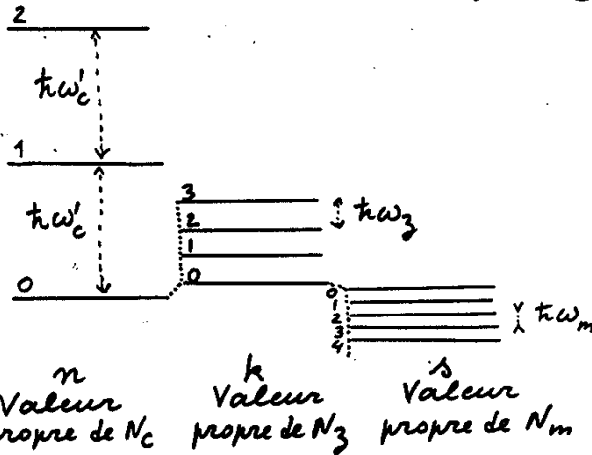
$$H = \hbar \omega'_c \left( N_c + \frac{1}{2} \right) + \hbar \omega_z \left( N_z + \frac{1}{2} \right) - \hbar \omega_m \left( N_m + \frac{1}{2} \right)$$

$$N_c = a_c^\dagger a_c \quad N_z = a_z^\dagger a_z \quad N_m = a_m^\dagger a_m$$

$a_c$  et  $a_m$  sont des superpositions linéaires de  $x, y, p_x, p_y$ , qui sont les opérateurs d'annihilation d'un quantum cyclotron ou magnétron

Bien noter le signe - pour  $\hbar \omega_m$

## Allure des niveaux d'énergie (11)



Quand  $s$  augmente, la dimension de l'orbite magnétron augmente, et l'énergie potentielle décroît plus vite que l'énergie cinétique n'augmente.  
 Explication du signe - de  $\hbar\omega_m$   
 Instabilité du mouvement magnétron

## Particule chargée dans un champ $\vec{E}(\vec{r}) \cos \Omega t$ inhomogène (12)

Etude générale qualitative et non limitée à un champ  $\vec{E}(\vec{r})$  dérivant d'un  $\phi$  quadrupolaire.  
 La particule vibre à la fréquence  $\Omega$  dans le champ  $\vec{E}(\vec{r}) \cos \Omega t$ .  
 La moyenne temporelle (sur  $2\pi/\Omega$ ) de la force instantanée, appelé force séculaire, n'est pas nulle et est dirigée vers les régions où  $E^2$  est minimum.

On se limite dans ce chapitre au cas où la fréquence  $\Omega$  est très élevée devant les fréquences du mouvement lent dû à la force séculaire.

Limite adiabatique

## Explication du mécanisme sur un modèle simple (à une dimension : $\vec{E}$ parallèle à $Oz$ ) (13)

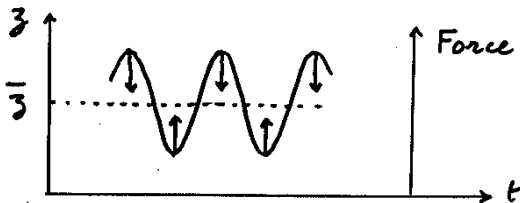
### ① Inhomogénéités de $E$ négligées

$$m\ddot{z} = qE \cos \omega t$$

Vibration autour du point  $\bar{z}$

$$z = \bar{z} + \xi = \bar{z} - \frac{qE}{m\Omega^2} \cos \Omega t$$

La force  $qE \cos \Omega t$  et le mouvement de vibration  $\xi = -qE \cos \Omega t / m\Omega^2$  sont toujours en opposition de phase, quel que soit le signe de  $q$ .

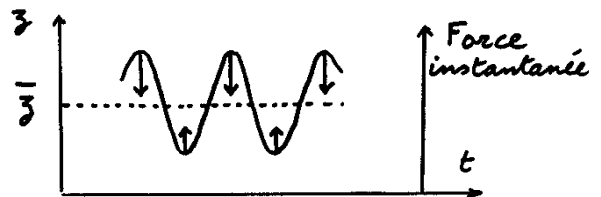


Moyenne temporelle de  $F$  nulle

### ② Effet des inhomogénéités de $E$ (14)

- Pour calculer la vibration  $\xi$ , on peut approximer  $E(z)$  par  $E(\bar{z})$
- Par contre, la force instantanée est  $qE(z) \cos \Omega t$  avec  $z = \bar{z} + \xi$

Cas où  $|E(z)|$  croît avec  $z$



Les régions où  $\xi$  est maximal contribuent plus que celles où  $\xi$  est minimal.

La moyenne temporelle de la force instantanée n'est plus nulle. Comme  $\xi$  et  $F_{inst}$  sont en opposition de phase,  $F_{seculaire} = F_{instantanée}$  est dirigée en sens opposé de  $d|E(z)|/dz$ .

Calcul plus précis de la force séculaire

Mouvement de la particule

(à 3 dimensions  $i = 1, 2, 3$ )

$$x_i = \bar{x}_i + \xi_i$$

$x_i$  : position instantanée

$\bar{x}_i$  : centre de l'oscillation

$\xi_i$  : oscillation à  $\Omega$  dans

$$\vec{E}(x_i, t) = \vec{E}(\bar{x}_i) \cos \Omega t$$

Pour calculer  $\xi_i$ , on prend  $\vec{E}(x_i) \approx \vec{E}(\bar{x}_i)$

$$\hookrightarrow \xi_i = - \frac{q E_i(\bar{x}_i)}{m \Omega^2} \cos \Omega t$$

Force instantanée

$$F_i = q E_i(x_j, t) = q E_i(\bar{x}_j + \xi_j) \cos \Omega t$$

On néglige la force magnétique  $q \vec{v} \times \vec{B}$  dans le champ  $\vec{B}$  associé à  $\vec{E}$  ( $\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ )

(15) Force instantanée

$$F_i = q E_i(\bar{x}_j + \xi_j) \cos \Omega t = q \left[ E_i(\bar{x}_j) + \sum_j \frac{\partial E_i(\bar{x}_j)}{\partial \bar{x}_j} \xi_j \right] \cos \Omega t$$

Notations plus simples (tout est évalué en  $\bar{x}_j$ )

$$F_i = \left[ q E_i + \sum_j q \xi_j \partial_j E_i \right] \cos \Omega t$$

Comme on néglige les effets magnétiques on remplace  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  par  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$  et donc  $\partial_j E_i$  par  $\partial_i E_j$  [Pour un calcul analogue, conservant les effets magnétiques, voir cours 82-83 pages I.6 et I.7]

$$F_i = \left[ q E_i + \sum_j q \xi_j \partial_i E_j \right] \cos \Omega t$$

Force séculaire

Comme  $\xi_j = - \frac{q E_j}{m \Omega^2} \cos \Omega t$ ,  $\overline{\cos^2 \Omega t} = \frac{1}{2}$

$$\overline{F_i} = - \frac{q^2}{2m \Omega^2} \sum_j E_j \partial_i E_j = - \frac{q^2}{4m \Omega^2} \partial_i \overline{E^2}$$

Potentiel effectif

La force séculaire, qui régit le mouvement lent de  $\bar{x}_i$ , dérive d'une énergie potentielle effective

$$V_{\text{eff}}(\bar{x}_i) = \frac{q^2}{4m \Omega^2} \overline{E^2}(\bar{x}_i)$$

Cette énergie potentielle effective coïncide avec l'énergie cinétique moyenne du mouvement de vibration rapide

$$\overline{E_c^{\text{rap}}} = \frac{m}{2} \sum_i \overline{\dot{\xi}_i^2} = \sum_i \frac{q^2 \overline{E^2}(\bar{x}_i) \sin^2 \Omega t}{2m \Omega^2} = \frac{q^2 \overline{E^2}(\bar{x}_i)}{4m \Omega^2} = V_{\text{eff}}(\bar{x}_i)$$

Potentiel électrique effectif

$$V_{\text{eff}}(x_i) = q \Psi(x_i)$$

$$\Psi(x_i) = \frac{q}{4m \Omega^2} \overline{E^2}(x_i)$$

(17) Energie cinétique moyenne totale

$$\overline{E_c^{\text{tot}}} = \frac{m}{2} \sum_i \overline{(\dot{\bar{x}}_i + \dot{\xi}_i)^2} = \underbrace{\frac{m}{2} \sum_i \overline{\dot{\bar{x}}_i^2}}_{E_c^{\text{lent}}} + \underbrace{\frac{m}{2} \sum_i \overline{\dot{\xi}_i^2}}_{E_c^{\text{rap}}} + \underbrace{m \sum_i \overline{\dot{\bar{x}}_i \dot{\xi}_i}}_{\sim \sin \Omega t = 0}$$

Comme  $E_c^{\text{rap}}$  est l'énergie potentielle du mouvement lent

$$\overline{E_c^{\text{tot}}} = E_c^{\text{lent}} + V_{\text{eff}}^{\text{lent}} = \text{Energie cinétique du mvt lent} + \text{Energie potentielle du mvt lent} = \text{Energie totale du mvt lent} = \text{Constante du mouvement lent}$$

Problème analogue

Force pondéromotrice poussant un électron dans un faisceau laser vers les points d'intensité minimale