

Effet Stern et Gerlach continu sur un électron unique

Temps de mesure minimum et perturbations
du système observé par l'appareil de mesure

Le système étudié dans les cours précédents est suffisamment simple pour qu'on puisse, au moins dans des conditions idéales (un seul électron, pas d'autres sources de bruit que la résistance R du circuit extérieur, résistance R à une température $T = 0^\circ\text{K}$), étudier un certain nombre de problèmes relatifs au processus de mesure.

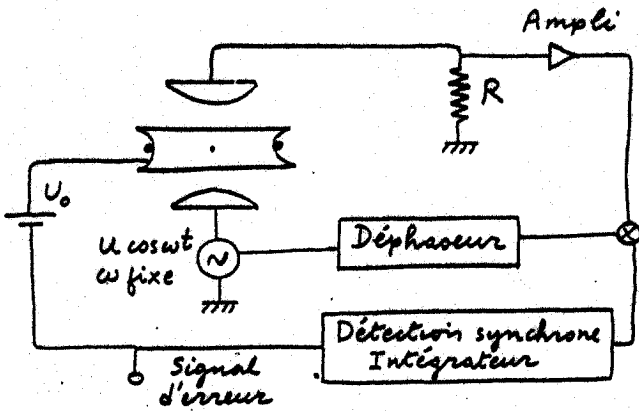
- Quel est le rapport signal sur bruit S/B ?
- Pendant quel temps minimum T_m faut-il moyenniser le bruit pour avoir $S \gg B$?
- L'interaction du spin avec le champ inhomogène de la bouteille magnétique peut-elle brouiller la phase relative entre les 2 états de spin pendant ce temps de mesure minimum T_m ?
- Le fait d'observer en permanence l'état du spin bloque-t-il son évolution ?

Plan du cours VI

Introduction - Buts de ce cours (Transparents 1 à 5)

- ① - Calcul du rapport signal sur bruit (6 à 11)
- ② - Calcul du temps minimum T_m nécessaire pour mesurer l'état de spin de l'électron (12 à 13)
- ③ - Perturbation de l'état de spin par le processus de mesure
 - a) Caractère aléatoire de la précession de Larmor du spin
Origine physique de ce caractère aléatoire (14 à 16)
 - b) Fonctions de corrélation des fluctuations de l'énergie d'oscillation de l'électron
 - Calcul semiclassique (17 à 20)
 - Grandes lignes du calcul quantique (21 à 22)
 - c) Calcul de la rotation aléatoire du spin pendant le temps de mesure T_m (23 à 26)
 - d) Discussion physique : lien avec la "réduction du paquet d'ondes" (27)
- ④ - Paradoxe de Zénon
 - a) Énoncé du paradoxe (28)
 - b) Évolution du spin, sous l'effet d'une impulsion π de radiofréquence de durée T_p , dans les 2 cas limites $T_p \ll T_m$ et $T_p \gg T_m$ (29 à 31)
 - c) Résolution du paradoxe (32)

Référence : Toutes les discussions de ce cours VI sont basées sur l'article
"Continuous Stern-Gerlach effect" de H. DEHMELT
Preprint soumis à Phys. Rev. D

Rappel du principe de l'expérience (1)

- Excitation à ω fixe de la vibration axiale.
- Réglage de la détection synchrone pour détecter la résonance sous forme d'une courbe de dispersion
- Verrouillage de U_0 pour être au centre de cette courbe de dispersion quand le spin est dans l'état \downarrow

$$\omega_3(\downarrow) = \omega$$

Détection d'une transition de spin (2)

- Si le spin bascule de \downarrow à \uparrow , la fréquence de vibration axiale change à cause de la bouteille magnétique

$$\omega_3(\uparrow) = \omega_3(\downarrow) + \delta_0 \quad (\delta_0 \text{ en rad/s})$$
- Un signal d'erreur S apparaît, proportionnel à δ_0 , à la tension de pilotage U . S dépend aussi de la largeur $\Delta\omega = \gamma_3$ de la résonance axiale ($\gamma_3 = \frac{R}{L}$)

Bruit

- En plus du signal, il y a du bruit provenant de la résistance R (on négligera ici toutes les autres sources de bruit provenant des amplificateurs situés après R)
- Le bruit de R est filtré dans le circuit résonnant L, C, R , équivalent à l'électron, et surtout dans la bande passante de la détection synchrone, beaucoup plus étroite en général que $\Delta\omega = \gamma_3$

Temps de mesure minimum T_m (3)

Pour pouvoir affirmer que le spin a basculé, le signal associé à la variation $\omega_3(\uparrow) - \omega_3(\downarrow) = \delta_0$ doit être suffisamment grand par rapport au bruit B

Or, le bruit B est d'autant plus petit que la bande passante de la détection synchrone est plus étroite, ou encore que le temps d'intégration t_d est plus long

Pour avoir $S > B$, il faut donc que t_d soit supérieur à une certaine valeur minimum T_m (celle pour laquelle $S \sim B$)

Idee importante que toute mesure doit durer un temps minimum T_m , celui pendant lequel il faut moyenner le bruit pour le rendre plus petit que le signal

Buts de ce cours (4)1- Calculer T_m

L'expérience analysée ci-dessus est suffisamment simple (au moins dans sa version idéale : un seul électron, bruit ne venant que de R , température $T = 0^\circ K$), pour qu'on puisse calculer explicitement T_m en fonction des divers paramètres de l'expérience.

2- Etudier les effets de l'interaction du système observé avec l'appareil de mesure pendant le temps T_m

On peut calculer aussi l'évolution, pendant T_m , du spin de e^- (système observé) interagissant avec le gradient de champ de la bouteille (appareil de mesure)

Eclairage intéressant sur certains problèmes relatifs à la mesure (réduction du paquet d'ondes, paradoxe de Zénon)

Effet Stern et Gerlach continu (5)

Nom donné à l'expérience étudiée ici pour les raisons suivantes

① - La différence $\delta_0 = \omega_3(\uparrow) - \omega_3(\downarrow)$ est due à l'interaction du spin de e^- avec un gradient de champ magnétique, comme dans l'effet Stern et Gerlach

② - L'enregistrement du signal S avec la constante de temps T_m , permet de suivre de manière continue l'état \downarrow ou \uparrow dans lequel se trouve le spin.

Exemple simple d'une mesure idéale, non destructive, pouvant être effectuée sur le même système aussi longtemps qu'on le désire

Calcul du signal

Tension appliquée : $U \cos \omega t$

Courant produit

$I_p \cos \omega t$ + $I_p \sin \omega t$
 en phase en quadrature

Impédance complexe

$Z(\omega) = X(\omega) + i Y(\omega) = R + i(\ell\omega - \frac{1}{C\omega}) \approx R [1 + \frac{i(\omega - \omega_3)}{\gamma_3/2}]$

$\ell C \omega_3^2 = 1$ $\gamma_3 = \frac{R}{\ell}$ largeur de la résonance

Sortie de la détection synchrone

$S = I_p = \frac{U Y(\omega)}{|Z(\omega)|^2}$

On supposera $\omega - \omega_3 = \delta_0 \ll \gamma_3$

$\hookrightarrow S = \frac{U}{R} \frac{2\delta_0}{\gamma_3}$

$I_p = \frac{U X(\omega)}{|Z(\omega)|^2} \approx \frac{U}{R}$

Expression du signal en fonction de l'énergie axiale W_3 (7)

$W_3 = 2 \times \frac{1}{2} \ell I(t)^2 \approx \ell I_p^2 \cos^2 \omega_3 t$
 (car $I_p \gg I_0$ puisque $\delta_0 \ll \gamma_3$)

$W_3 = \ell \frac{I_p^2}{2} = \frac{\ell U^2}{2R^2}$

$\hookrightarrow S^2 = \frac{U^2}{R^2} \frac{4\delta_0^2}{\gamma_3^2} = \frac{2W_3}{\ell} \frac{4\delta_0^2}{\gamma_3^2}$

Or $\gamma_3 = \frac{R}{\ell} \rightarrow \ell \gamma_3 = R$

$\hookrightarrow S^2 = 8 W_3 \frac{\delta_0^2}{R \gamma_3}$

Déphasage φ entre les courants correspondant à $\omega = \omega_3$ et $\omega = \omega_3 + \delta_0$

$\tan \varphi \approx \varphi \approx \frac{I_0}{I_p} = \frac{2\delta_0}{\gamma_3}$

Calcul du bruit (8)

- La résistance R est à l'origine d'un bruit de voltage, dont la densité spectrale, $J_R(\omega)$, est donnée par le théorème de Nyquist

$J_R(\omega) = 2R \frac{\hbar\omega}{2} \coth \frac{\hbar\omega}{2kT}$

(voir transparent III-29)

- On suppose ici que $T=0$, de sorte que

$J_R(\omega) = R \hbar\omega$

- Ce bruit de voltage, appliqué au circuit ℓC équivalent à l'électron, donne un bruit de courant, dont la densité spectrale, $J_I(\omega)$, est donné par

$J_I(\omega) = \frac{1}{|Z(\omega)|^2} J_R(\omega) \approx \frac{1}{|Z(\omega)|^2} J_R(\omega_3)$
 $= \frac{1}{|Z(\omega)|^2} R \hbar\omega_3$

(voir transparent III-27)

Effet de la détection synchrone (9)

Filtrage supplémentaire du bruit de courant

On ne conserve qu'un intervalle spectral $\delta\gamma$, inversement proportionnel au temps d'intégration τ_d , autour de $\gamma = \gamma_3$

Plus précisément, filtre en ω décrit par la lorentzienne

$$|F(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_3}{1/2\tau_d}\right)^2}$$

Densité spectrale du courant filtré

$$\begin{aligned} \tilde{J}_I(\omega) &= J_I(\omega) |F(\omega)|^2 = \frac{R \hbar \omega_3}{|Z(\omega)|^2} |F(\omega)|^2 \\ &\approx \frac{R \hbar \omega_3}{|Z(\omega_3)|^2} |F(\omega)|^2 = \frac{\hbar \omega_3}{R} |F(\omega)|^2 \end{aligned}$$

car la largeur, δ_3 , de $\frac{1}{|Z(\omega)|^2}$ est beaucoup plus grande que $1/\tau_d$

Expression du bruit de courant (10)
à la sortie de la détection synchrone

$$B^2 = \overline{I(t)^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\omega \tilde{J}_I(\omega)$$

(voir Transparent III-28)

$$\hookrightarrow B^2 = \frac{\hbar \omega_3}{\pi R} \int_0^\infty d\omega |F(\omega)|^2 =$$

$$\frac{\hbar \omega_3}{\pi R} \int_0^\infty d\omega \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_3}{1/2\tau_d}\right)^2} = \frac{\hbar \omega_3}{2R\tau_d}$$

$$\hookrightarrow \boxed{B^2 = \frac{\hbar \omega_3}{2R\tau_d}}$$

Rapport signal sur bruit

$$\frac{S^2}{B^2} = \frac{8 W_3 \delta_0^2 / R \delta_3}{\hbar \omega_3 / 2R\tau_d} =$$

$$= 16 \frac{\delta_0^2 \tau_d}{\delta_3} \frac{W_3}{\hbar \omega_3} = 16 \frac{\delta_0^2 \tau_d}{\delta_3} \bar{k}$$

Discussion physique

(11)

Le rapport signal sur bruit est d'autant plus élevé que

- δ_0 est plus grand
(Bouteille magnétique plus profonde)
- δ_3 est plus petit
(Résonance de vibration plus étroite)
- \bar{k} est plus grand
(Energie de vibration axiale plus grande)
- τ_d est plus long
(Temps d'intégration plus long)

Les 2 premiers paramètres sont caractéristiques du montage expérimental utilisé

Les 2 derniers (\bar{k}, τ_d) sont à la disposition de l'expérimentateur qui peut augmenter la tension U d'excitation ou allonger le temps d'intégration.

Calcul du temps minimum T_m nécessaire pour une mesure (12)

Pour un état de spin donné, 94% des valeurs de I tombent dans un intervalle $\pm 2B$ autour de la valeur moyenne.

Pour être sûr que les 2 intervalles de confiance à 94% associés aux états \downarrow et \uparrow sont disjoints, il faut donc que $S \geq 4B$

Le temps minimum de mesure T_m est la valeur de τ_d pour laquelle $S = 4B$

$$\frac{S^2}{B^2} = 16 = 16 \frac{\delta_0^2 T_m}{\delta_3} \bar{k}$$

$$\hookrightarrow \boxed{T_m = \frac{\delta_3}{\bar{k} \delta_0^2}}$$

Autre interprétation de l'équation donnant T_m

(13)

$$T_m = \frac{\gamma_3}{\bar{k} \delta_0^2}$$

$$\hookrightarrow \gamma_3 \bar{k} T_m = \frac{\gamma_3^2}{\delta_0^2}$$

Le membre de gauche de cette équation donne le nombre de quanta de vibrations dissipés dans la résistance R pendant le temps de mesure

Comme $\gamma_3 \gg \delta_0$, on en déduit qu'une mesure de l'état de spin nécessite de dépenser une énergie égale à celle de plusieurs quanta de vibration

Fluctuations de l'énergie de l'électron

(14)

- Le bruit produit par R a un autre effet : il fait fluctuer l'énergie d'oscillation de l'électron autour de sa valeur moyenne

$$\bar{E} = (\bar{k} + \frac{1}{2}) \hbar \omega_L$$

- L'électron change donc de niveau de vibration de manière aléatoire. Le nombre quantique $k(t)$ du niveau dans lequel il se trouve à l'instant t fluctue donc autour de \bar{k}

Fluctuations de la précession de Larmor

- A cause de la bouteille magnétique, le champ magnétique "vu" par e^- dépend de k (voir transparent IV-9) Par exemple, la fréquence de Larmor du spin dans l'état k vaut

$$\omega_L(k) = \omega_L + (k + \frac{1}{2}) \delta_0$$

- Comme k fluctue, il en est de même de la précession de Larmor du spin

Perturbation du système étudié par l'opération de mesure

(15)

- La bouteille magnétique et le circuit électrique de détection (appareil de mesure) introduisent donc un élément aléatoire dans l'évolution du spin (système qu'ils permettent d'étudier).

- On pourrait à première vue penser qu'il suffit de réduire T_m pour réduire l'effet de cette perturbation, par exemple en augmentant l'énergie d'oscillation forcée (puisque $T_m \sim \bar{k}^{-1}$) Mais comment varient les fluctuations de k autour de \bar{k} quand \bar{k} augmente?

Ne risque-t-on pas de perdre en augmentant les fluctuations de k ce qu'on gagne en réduisant T_m ?

Caractérisation des fluctuations de k

(16)

- Pour étudier de manière précise la perturbation du spin de l'électron pendant le temps de mesure, il est donc nécessaire au préalable d'étudier les propriétés statistiques des fluctuations $\delta k(t) = k(t) - \bar{k}$, caractérisées par la fonction de corrélation

$$\overline{\delta k(t+\tau) \delta k(t)}$$

Calcul semiclassical

Fonction de corrélation de l'énergie de l'électron mis en mouvement forcé et soumis de plus au bruit de voltage de R

Calcul quantique

Fonction de corrélation quantique

$$\langle \delta N_3(t+\tau) \delta N_3(t) \rangle$$

$$\text{ou } \delta N_3(t) = a_3^\dagger(t) a_3(t) - \langle a_3^\dagger(t) a_3(t) \rangle_{\text{stat}}$$

↑
Valeur moyenne de N_3 dans l'état stationnaire

Calcul semiclassique

(17)

Mouvement de l'électron sous l'effet du bruit de voltage de R

- Mouvement erratique, de fréquence moyenne ω_3 , de temps de corrélation $2/\gamma_3$, de phase aléatoire [filtrage du bruit de R par l'impédance $Z(\omega)$]

$$z_B(t) = P(t) \cos \omega_3 t + \varphi(t) \sin \omega_3 t$$

$$\overline{P^2(t)} = \overline{\varphi^2(t)} = b^2 \quad \overline{P(t)\varphi(t)} = 0$$

$$\overline{P(t+\tau)P(t)} = b^2 e^{-\gamma_3 |\tau|/2}$$

- Vitesse de l'électron

$$\dot{z}_B(t) \approx -\omega_3 P(t) \sin \omega_3 t + \omega_3 \varphi(t) \cos \omega_3 t$$

Il est légitime de négliger \dot{P} et $\dot{\varphi}$ devant $\omega_3 P$ et $\omega_3 \varphi$ car $\gamma_3 \ll \omega_3$

Méthode heuristique pour trouver b^2 (18)

Comme $T = 0^\circ K$, l'oscillateur quantique est dans l'état $k=0$ où $\langle z^2 \rangle = \hbar/m_e \omega_3$. En égalant $\overline{z_B^2(t)}$ et $\langle z^2 \rangle$, on obtient

$$b^2 = \frac{\hbar}{m_e \omega_3}$$

Même résultat si l'on écrit que $\overline{E_{cin}} + \overline{E_{pot}} = \frac{1}{2} \hbar \omega_3$

Mouvement forcé de l'électron

Pour une excitation résonnante

$$z_F(t) = z_0 \cos \omega_3 t$$

Mouvement global

Comme les équations sont linéaires, le mouvement global est la superposition du mouvement forcé et du mouvement dû au bruit

$$z(t) = [z_0 + P(t)] \cos \omega_3 t + \varphi(t) \sin \omega_3 t$$

Energie instantanée

(19)

$$E(t) = \frac{1}{2} m_e \omega_3^2 z^2(t) + \frac{1}{2} m_e \dot{z}^2(t)$$

A partir de l'expression de z (et en négligeant toujours \dot{P} et $\dot{\varphi}$ devant $\omega_3 P$ et $\omega_3 \varphi$), on obtient

$$E(t) = \frac{1}{2} m_e \omega_3^2 \left[\underbrace{z_0^2}_{(1)} + \underbrace{P^2(t) + \varphi^2(t)}_{(2)} + \underbrace{2z_0 P(t)}_{(3)} \right]$$

- ① Energie du mouvement forcé
- ② Energie du bruit
- ③ Terme d'interférence entre z_F et z_B
"Hétérodynage du bruit par le signal"

Energie moyenne

Comme $\overline{P^2} = \overline{\varphi^2} = \hbar/2m_e \omega_3$, $\overline{P} = 0$

$$\overline{E} = \frac{1}{2} m_e \omega_3^2 z_0^2 + \frac{1}{2} \hbar \omega_3$$

En identifiant \overline{E} à $(\bar{k} + \frac{1}{2}) \hbar \omega_3$, on relie z_0 à \bar{k}

$$\frac{1}{2} m_e \omega_3^2 z_0^2 = \bar{k} \hbar \omega_3$$

Fluctuations de l'énergie

(20)

$$\delta E(t) = E(t) - \overline{E(t)}$$

En ignorant la différence entre $A^2(t) + B^2(t)$ et $\overline{A^2} + \overline{B^2}$, on obtient

$$\delta E(t) = m_e \omega_3^2 z_0 P(t)$$

$\delta E(t)$ a donc le même temps de corrélation que $P(t)$

$$\overline{\delta E(t+\tau) \delta E(t)} = \overline{\delta E^2} e^{-\gamma_3 |\tau|/2}$$

$$\text{Or, } \overline{\delta E^2} = m_e^2 \omega_3^4 z_0^2 \overline{P^2} = (\hbar \omega_3)^2 \bar{k}$$

$$= \frac{2 \bar{k} m_e \hbar \omega_3^3}{2 m_e \omega_3} = \hbar \omega_3 \bar{k}$$

$$\hookrightarrow \overline{\delta E(t+\tau) \delta E(t)} = (\hbar \omega_3)^2 \bar{k} e^{-\gamma_3 |\tau|/2}$$

- Comme

$$\delta E(t) = \hbar \omega_3 \delta k(t)$$

on en déduit finalement

$$\overline{\delta k(t+\tau) \delta k(t)} = \bar{k} e^{-\gamma_3 |\tau|/2}$$

$\overline{\delta k^2} = \bar{k}$ croit avec \bar{k} (Poisson)

Grandes lignes du calcul quantique (21)

① On sait écrire l'équation pilote décrivant la relaxation d'un oscillateur harmonique quantique couplé à un thermostat de température T quelconque, en particulier nulle (cf équations XII-18 du cours 1975-76 avec $\langle n_0 \rangle = 0$ puisque $T = 0$)

$$\frac{d}{dt} \sigma = -i\omega_3 [a_3^\dagger a_3, \sigma] + \frac{\gamma_3}{2} [-a_3^\dagger a_3 \sigma - \sigma a_3^\dagger a_3 + 2a_3 \sigma a_3^\dagger]$$

σ : opérateur densité
 γ_3 : Taux d'amortissement de l'énergie

② On ajoute à cette équation les termes décrivant le couplage avec le champ extérieur monochromatique mettant l'oscillateur en mouvement forcé

Il est alors possible d'écrire les équations d'évolution des valeurs moyennes des diverses observables

③ Par exemple, on trouve que (22) $\langle \delta N_3(t) \rangle, \langle \delta a(t) \rangle, \langle \delta a^\dagger(t) \rangle$ obéissent à des équations d'évolution formant un système fermé, de la forme

$$\frac{d}{dt} \langle \delta N_3(t) \rangle = \alpha \langle \delta N_3(t) \rangle + \beta \langle \delta a(t) \rangle + \gamma \langle \delta a^\dagger(t) \rangle$$

④ Le théorème de régression quantique permet alors de calculer les fonctions de corrélation. Il indique en effet que si $t > t'$

$$\frac{d}{dt} \langle \delta N_3(t) \delta N_3(t') \rangle = \alpha \langle \delta N_3(t) \delta N_3(t') \rangle + \beta \langle \delta a(t) \delta N_3(t') \rangle + \gamma \langle \delta a^\dagger(t) \delta N_3(t') \rangle$$

On peut ainsi calculer $\langle \delta N_3(t) \delta N_3(t') \rangle$ en fonction des moyennes à un temps $\langle \delta N_3(t') \delta N_3(t') \rangle, \langle \delta a(t') \delta N_3(t') \rangle, \langle \delta a^\dagger(t') \delta N_3(t') \rangle$, elles mêmes calculables à partir de l'équation pilote

On démontre ainsi que

$$\langle \delta N_3(t+\tau) \delta N_3(t) \rangle = \langle N_3 \rangle e^{-\gamma_3 |\tau|/2}$$

Rotation aléatoire du spin pendant le temps de mesure T_m (23)

- Le spin étant à l'instant $t = 0$ dans l'état \uparrow , faisons une impulsion $\pi/2$ (très courte devant T_m) qui le met dans l'état

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$

- L'aimantation transversale précesse ensuite autour de Oz à la fréquence de Larmor ω_L . Comme ω_L dépend de k , et que k est une fonction aléatoire de t , le spin subit une rotation aléatoire qui, accumulée entre

0 et T_m , vaut

$$\delta\phi(T_m) = \delta_0 \int_0^{T_m} dt \delta k(t) = \delta_0 T_m \underbrace{\frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} dt \delta k(t)}_{\delta K(t)}$$

$\delta K(t)$: Moyenne de $\delta k(t)$ sur le temps T_m

Rotation quadratique moyenne (24)

$$\overline{\delta\phi(T_m)} = \delta_0 T_m \overline{\delta K(t)} = 0$$

$$\overline{\delta\phi^2(T_m)} = \delta_0^2 T_m^2 \overline{\delta K^2(t)}$$

Calcul de $\overline{\delta K^2(t)}$

Comme $\delta k(t)$ s'obtient à partir de $\delta k(t)$ par une moyenne temporelle, c-à-d encore par un filtrage, il est commode de passer dans l'espace de Fourier et d'introduire les densités spectrales $J_{\delta k}(\omega)$ et $J_{\delta K}(\omega)$ de δk et δK

Densité spectrale de δk

$$J_{\delta k}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \overline{\delta k(t+\tau) \delta k(t)}$$

$$= \bar{k} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} e^{-\gamma_3 |\tau|/2}$$

$$= 2\bar{k} \frac{\frac{\gamma_3}{2}}{\omega^2 + (\frac{\gamma_3}{2})^2}$$

Densité spectrale de δK (25)

$$J_{\delta K}(\omega) = J_{\delta k}(\omega) |G(\omega)|^2$$

où $|G(\omega)|^2 = \frac{\sin^2(\omega T_m/2)}{(\omega T_m/2)^2}$

$G(\omega)$ est la transformée de Fourier de la fonction de filtrage $\frac{1}{T_m} \theta(t) \theta(T_m-t)$
 [θ : Fonction de Heaviside]

Comme $\delta_3 \gg 1/T_m$

$$J_{\delta K}(\omega) \approx \underbrace{J_{\delta k}(\omega=0)}_{4\bar{k}/\delta_3} |G(\omega)|^2 = \frac{4\bar{k}}{\delta_3} |G(\omega)|^2$$

Expression de $\overline{\delta K^2(t)}$

$$\overline{\delta K^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega J_{\delta K}(\omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{4\bar{k}}{\delta_3} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |G(\omega)|^2}_{2\pi/T_m}$$

↳ $\boxed{\overline{\delta K^2} = \frac{4\bar{k}}{\delta_3 T_m}}$

Calcul de $\overline{\delta\Phi^2(T_m)}$ (25)

$$\overline{\delta\Phi^2(T_m)} = \delta_0^2 T_m^2 \overline{\delta K^2} = \frac{4\bar{k} \delta_0^2 T_m}{\delta_3}$$

Or, nous avons vu plus haut (cf Transparent VI-12) que $T_m = \gamma_3 / \bar{k} \delta_0^2$.
 Donc,

$$\boxed{\overline{\delta\Phi^2(T_m)} = 4}$$

Ainsi, l'amplitude de la rotation aléatoire du spin pendant le temps T_m ne dépend pas de T_m , et est de l'ordre de 2 radians.

Si l'on diminue T_m en augmentant \bar{k} , les fluctuations de k augmentent suffisamment pour produire la même rotation aléatoire pendant le temps T_m plus court.

Discussion physique (27)

Le fait que la rotation aléatoire du spin soit de l'ordre de 2 radians signifie que l'évolution aléatoire du spin, pendant le temps de mesure minimum T_m , a transformé la superposition linéaire initiale d'états $(|b\rangle + |a\rangle) / \sqrt{2}$ en un mélange statistique des états $|b\rangle$ et $|a\rangle$ avec des poids égaux $1/2$ et $1/2$.

Ainsi, le temps minimum pour faire la mesure la plus idéale possible est aussi le temps au bout duquel l'interaction avec le dispositif de mesure a brouillé les phases relatives entre les diverses composantes du "paquet d'ondes" initial pour ne garder que les probabilités de chaque composante.

Paradoxe de Zénon (28)

D'après le postulat de réduction du paquet d'ondes, immédiatement après une mesure, le système est dans l'état propre correspondant à la valeur propre observée. La même mesure, recommencée tout de suite après, redonne le même résultat, et ainsi de suite...

Il semble ainsi que le fait de mesurer en permanence un système physique l'empêche d'évoluer.

Un tel raisonnement ne tient pas compte cependant du fait que toute mesure nécessite un temps fini et non nul. Comment peut-on reformuler le paradoxe de Zénon à la lumière des résultats obtenus plus haut sur T_m ?

Exemple simple d'évolution (29)

Soumettons le spin à une impulsion de champ de radiofréquence $B_1 \cos \omega_1 t$ durant un temps τ_p tel qu'en l'absence de toute autre perturbation, on ait une impulsion π faisant passer le spin de l'état $| \downarrow \rangle$ à $| \uparrow \rangle$,

$$\omega_1 \tau_p = \pi$$

$\omega_1 = -\gamma B_1 =$ Fréquence de Rabi

Problème

Comment varie la probabilité de basculement du spin $P_{\downarrow \rightarrow \uparrow}(\tau_p)$ à l'issue de l'impulsion, lorsqu'on fait varier le rapport τ_p/T_m d'une valeur très petite devant 1 à une valeur très grande devant 1 (ω_1 et τ_p étant toujours reliés par $\omega_1 \tau_p = \pi$) ?

VI-9

Cas $\tau_p \ll T_m$

(30)

Dans ce cas, on peut négliger l'interaction du spin avec l'appareil de mesure pendant l'impulsion τ_p , qui est bien alors une impulsion π . Le spin a bien basculé à l'issue du temps τ_p

$$P_{\downarrow \rightarrow \uparrow}(\tau_p) = 1 \quad \text{si } \tau_p \ll T_m$$

Cas $\tau_p \gg T_m$

Dans ce cas, on ne peut plus ignorer l'interaction du spin avec l'appareil de mesure pendant τ_p .

On peut dire encore qu'on fait plusieurs mesures (en fait τ_p/T_m mesures) de l'état de spin pendant le temps τ_p où il est soumis à l'impulsion RF.

A cause de la rotation aléatoire du spin, introduite par la bouteille magnétique, on s'attend à ce que $P_{\downarrow \rightarrow \uparrow}$ soit $\ll 1$

Calcul de $P_{\downarrow \rightarrow \uparrow}(\tau_p)$ si $\tau_p \gg T_m$ (31)

- Comme T_m est le temps au bout duquel la phase relative entre les 2 états de spin est brouillée, T_m peut être considéré comme un temps de relaxation T_2 pour le spin, et la largeur de la raie de résonance du spin est $1/T_2 = 1/T_m$

- Comme $\omega_1 \tau_p = \pi$ et que $\tau_p \gg T_m$,
 $\omega_1 \ll 1/T_m$

ω_1 étant très petit devant la largeur de raie de résonance du spin, on n'a plus de précession de Rabi, mais une probabilité de transition par unité de temps

$$W_{\downarrow \rightarrow \uparrow} \sim \frac{\omega_1^2}{T_m^{-1}} = \omega_1^2 T_m$$

On en déduit que, si $\tau_p \gg T_m$

$$P_{\downarrow \rightarrow \uparrow}(\tau_p) = W_{\downarrow \rightarrow \uparrow} \times \tau_p \sim$$

$$\sim \omega_1^2 T_m \tau_p = \underbrace{\omega_1^2 \tau_p^2}_{\pi^2} \frac{T_m}{\tau_p} = \frac{\pi^2 T_m}{\tau_p} \ll 1$$

Résolution du paradoxe (32)

- Le temps de mesure T_m est fini et non nul
- Si l'on observe le spin plusieurs fois pendant τ_p , la probabilité de transition n'est pas nulle, tout en étant très petite puisque proportionnelle à T_m/τ_p
- Pour une valeur donnée de T_m , il suffit d'utiliser une impulsion π suffisamment courte ($\tau_p \ll T_m$) pour retrouver une évolution normale non perturbée