

Introduction

Le but de ce chapitre est de déterminer les fréquences propres du mouvement d'un électron dans un piège de Penning ainsi que les niveaux d'énergie de cet électron.

Nous commençons (§ 1) par rappeler les résultats relatifs au mouvement d'un électron dans un seul champ magnétique uniforme \vec{B}_0 , parallèle à Oz . Deux fréquences importantes apparaissent : la fréquence cyclotron ω_c de la charge et la fréquence de précession de Larmor ω_L du spin. L'étude quantique de ce problème conduit au diagramme d'énergie de Landau-Rabi.

Avec un seul champ \vec{B}_0 , le mouvement n'est pas confiné dans la direction Oz de \vec{B}_0 . L'idée la plus simple consiste alors à appliquer un potentiel électrostatique ϕ en z^2 , de manière à introduire une force de rappel ramenant l'électron en $z=0$. A cause de $\Delta\phi=0$, le potentiel ϕ est nécessairement quadrupolaire [ϕ est en $z^2 - (x^2+y^2)/2$]. La combinaison de ce potentiel ϕ et du champ \vec{B}_0 constitue un piège de Penning. Nous étudions en détail dans le § 2 le mouvement d'un électron dans un tel piège, à la fois classiquement et quantiquement. Nous déterminons les niveaux d'énergie, les fréquences de Bohr, et discutons quelles fréquences il faut mesurer pour remonter au facteur g et à l'anomalie a_e .

Etant donné la précision avec laquelle g et a_e sont actuellement déterminés, il est important d'évaluer les conséquences sur les fréquences de Bohr de l'électron d'une imperfection du piège. Ce problème est abordé dans le § 3.

Plan

- ① Electron dans un champ magnétique uniforme - Rappels.
 - a - Etude classique (Transparent 1)
 - b - Etude quantique - Niveaux de Rabi-Landau (2 à 6)
- ② Electron dans un piège de Penning - Geonium
 - a - Définition et paramètres d'un piège de Penning (7 à 9)
 - b - Etude classique - Fréquence cyclotron modifiée, fréquence magnétron, fréquence de vibrations axiale (10 à 14)
 - c - Etude quantique - Niveaux d'énergie et observables du "geonium" (15 à 22)
 - d - Principe de la détermination de l'anomalie a_e (23)
- ③ Piège de Penning imparfait
 - a - Caractérisation de l'imperfection (24 à 26)
 - b - Modification des fréquences du mouvement (27 à 29)
 - c - Principe de la détermination de a_e (30)

Bibliographie : page II-9

Electron dans un champ uniforme \vec{B}_0

Equation du mouvement $m_e \ddot{\vec{r}} = q \dot{\vec{r}} \times \vec{B}_0$ (1)

$$\left\{ \begin{array}{l} m_e \ddot{x} = q B_0 \dot{y} \\ m_e \ddot{y} = -q B_0 \dot{x} \\ m_e \ddot{z} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \dot{p} = i \omega_c p \\ p = x + i y \end{array}$$

$\omega_c = -\frac{q B_0}{m_e}$ Fréquence cyclotron ($q < 0, B_0 > 0 \rightarrow \omega_c > 0$)

Solution

$p = p_0 + \sigma e^{i(\omega_c t - \varphi_0)}$

$$\begin{cases} x = x_0 + \sigma \cos(\omega_c t - \varphi_0) \\ y = y_0 + \sigma \sin(\omega_c t - \varphi_0) \end{cases}$$

Dans le plan xOy , cercle de centre x_0, y_0 fixe, de rayon σ , parcouru à la vitesse angulaire uniforme ω_c
 $z = z_0 + v_{0z} t$ Mvt uniforme sur Oz

Lien entre $(x, y), (x_0, y_0), (v_x, v_y)$

$$\begin{cases} x_0 = x - \frac{v_y}{\omega_c} \\ y_0 = y + \frac{v_x}{\omega_c} \end{cases}$$

Etude quantique

(2)

Hamiltonien de Pauli

$H = \frac{1}{2m_e} [\vec{P} - q \vec{A}(\vec{r})]^2 - g \frac{q}{2m} \vec{S} \cdot \vec{B}_0$

Les 2 parties, orbitale et de spin, commutent et peuvent être étudiées séparément

Choix d'une jauge (\vec{B}_0 uniforme)

$\vec{A} = -\frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{B}_0$ $\vec{A} = \left\{ -\frac{y B_0}{2}, \frac{x B_0}{2}, 0 \right\}$

Hamiltonien orbital

$H_{\text{orbital}} = H_z + H_{xy}$

$H_z = \frac{P_z^2}{2m_e}$

$H_{xy} = \frac{1}{2m_e} \left\{ \left[P_x + \frac{q}{2} y B_0 \right]^2 + \left[P_y - \frac{q}{2} x B_0 \right]^2 \right\} = \frac{1}{2m_e} (P_x^2 + P_y^2) + \frac{m_e (\omega_c)^2}{2} (x^2 + y^2) + \frac{\omega_c}{2} (x P_y - y P_x)$

Hamiltonien d'oscillateur harmonique à 2 dimensions avec couplage supplémentaire proportionnel à L_z

Opérateurs d'annihilation a_x, a_y (3)

$$\begin{cases} a_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\beta x + \frac{i}{\beta \hbar} P_x \right) \\ a_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\beta y + \frac{i}{\beta \hbar} P_y \right) \end{cases} \quad \begin{array}{l} [a_x, a_x^\dagger] = 1 \\ [a_y, a_y^\dagger] = 1 \\ [a_x, a_y^\dagger] = 0 \end{array}$$

- Quelle que soit la constante β
 $L_z = x P_y - y P_x = i \hbar (a_x a_y^\dagger - a_x^\dagger a_y)$

- Si l'on choisit $\beta = \sqrt{\frac{m_e \omega_c}{\hbar}}$
 $\frac{1}{2m_e} (P_x^2 + P_y^2) + \frac{m_e (\omega_c)^2}{2} (x^2 + y^2) = \frac{\hbar \omega_c}{2} (N_x + N_y + 1)$
 avec $N_x = a_x^\dagger a_x$ $N_y = a_y^\dagger a_y$

Quanta circulaires droits et gauche

$$\begin{cases} a_d = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x - i a_y) \\ a_g = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x + i a_y) \end{cases} \quad \begin{array}{l} [a_d, a_d^\dagger] = 1 \\ [a_g, a_g^\dagger] = 1 \\ [a_d, a_g^\dagger] = 0 \end{array}$$

$L_z = i \hbar (a_x a_y^\dagger - a_x^\dagger a_y) = \hbar (N_d - N_g)$
 avec $N_d = a_d^\dagger a_d$ $N_g = a_g^\dagger a_g$
 (Résultat valable pour tout β)

Par ailleurs, $N_x + N_y = N_d + N_g$

Expression finale de H_{xy} (4)

Avec le choix $\beta = \sqrt{\frac{m_e \omega_c}{\hbar}}$
 $H_{xy} = \frac{\hbar \omega_c}{2} (N_d + N_g + 1) + \frac{\hbar \omega_c}{2} (N_d - N_g)$
 $= \hbar \omega_c (N_d + \frac{1}{2})$

Hamiltonien d'oscillateur harmonique à une dimension (associé aux "quanta circulaires droits")

Valeurs propres: $(n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_c$ $n = 0, 1, 2, \dots$

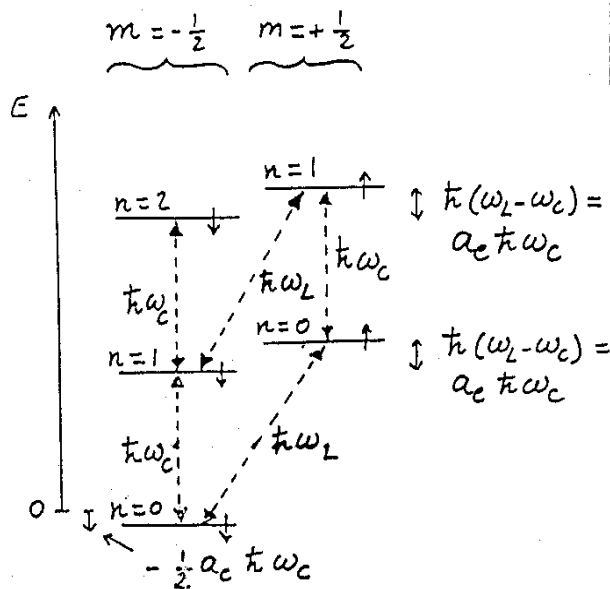
Niveaux de Landau

Valeurs propres de l'hamiltonien

$H = \underbrace{H_z}_{\frac{P_z^2}{2m_e}} + \underbrace{H_{xy}}_{(n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_c} + \underbrace{H_{\text{spin}}}_{m \hbar \omega_L}$

P_z : valeur propre continue
 n : Nombre quantique de Landau
 $m = \pm \frac{1}{2}$ Nombre quantique de spin
 $\omega_L = \frac{g}{2} \omega_c = (1 + \frac{g-2}{2}) \omega_c = (1 + a_0) \omega_c$
 ω_L = Fréquence de Larmor

Niveaux de Rabi-Landau
(sous espace $p_3 = 0$)



L'écart entre les 2 niveaux $n, m = -\frac{1}{2}$ et $n-1, m = +\frac{1}{2}$ est proportionnel à $a_e = \frac{q-2}{2}$

(5) Expression des observables 6

(en fonction de a_d, a_g, a_d^+, a_g^+)

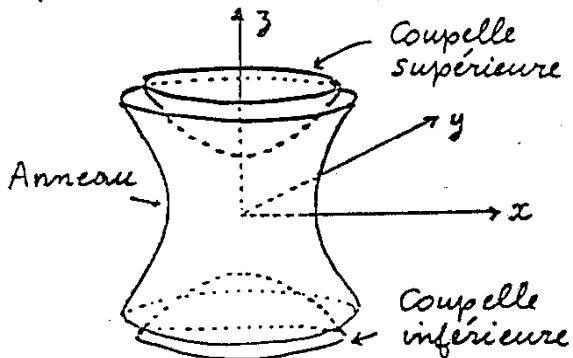
$$\begin{cases} x = (1/2\beta)(a_d + a_d^+ + a_g + a_g^+) \\ y = (i/2\beta)(a_d - a_d^+ - a_g + a_g^+) \\ v_x = -(i\omega_c/2\beta)(a_d - a_d^+) \\ v_y = (\omega_c/2\beta)(a_d + a_d^+) \\ x_0 = x - \frac{1}{\omega_c} v_y = (1/2\beta)(a_g + a_g^+) \\ y_0 = y + \frac{1}{\omega_c} v_x = (i/2\beta)(a_g^+ - a_g) \end{cases}$$

Les coordonnées x_0 et y_0 du centre du cercle sont associées à la position et à l'impulsion de l'oscillateur g qui n'apparaît pas dans l'hamiltonien

La dégénérescence $n_g = 0, 1, 2, \dots$ de chaque niveau de Landau n_d traduit le fait que l'énergie ne dépend de la position du centre du cercle

Potentiel électrostatique quadrupolaire

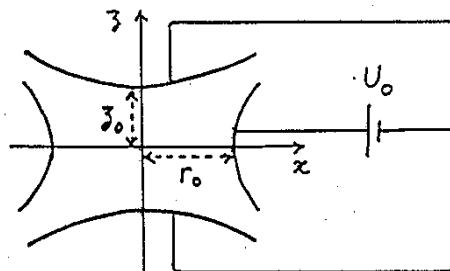
$\phi(x, y, z) = A(x^2 + y^2 - 2z^2) = A(r^2 - 3z^2)$
Symétrie de révolution autour de Oz
Satisfait bien l'équation de Poisson
 $\Delta\phi = A(2+2-4) = 0$ ($\phi \sim r^2 \frac{1}{2}(\theta, \varphi)$)



Equipotentielles : Hyperboloïdes de révolution autour de Oz

- 1 électrode en forme d'anneau
- 2 électrodes en forme de coupelle

(7) Paramètres importants de $\phi(x, y, z)$ 8



Différence de potentiel U_0

$U_0 = \phi(r_0, 0, 0) - \phi(0, 0, z_0) = A(r_0^2 + 2z_0^2)$

Fréquence de vibration le long de Oz

$\phi(0, 0, z) = 2|q|A z^2 = \frac{1}{2} m_e \omega_z^2 z^2$

$\omega_z^2 = \frac{4|q|A}{m_e} = \frac{4|q|U_0}{m_e(r_0^2 + 2z_0^2)}$

$\omega_z^2 = \frac{19|U_0}{m_e z_0^2}$ si $r_0^2 = 2z_0^2$

Énergie potentielle de l'électron

$V(x, y, z) = q\phi(x, y, z) = qA(x^2 + y^2 - 2z^2)$

$V(x, y, z) = \frac{1}{2} m_e \omega_z^2 [z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2}]$

Principe du piège de Penning (9)

- Le potentiel électrostatique seul ne peut piéger l'électron
- S'il y a bien un creux de potentiel en $z=0$ le long de Oz , il y a une bosse en $x=y=0$ le long de Ox et Oy ($\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$)
- Pour confiner latéralement le mouvement dans le plan xOy , on ajoute un champ magnétique uniforme \vec{B}_0 parallèle à Oz , de façon à compenser la force électrique centrifuge par une force magnétique centripète
- Problème à résoudre
Mouvement classique et quantique de l'électron dans un champ \vec{E} quadrupolaire et un champ \vec{B}_0 uniforme

Mouvement classique

Equation $\ddot{\vec{r}} = -\frac{1}{m_e} \vec{\nabla} V + \frac{q}{m_e} \dot{\vec{r}} \times \vec{B}_0$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= +\frac{\omega_z^2}{2} x - \omega_c y \\ \ddot{y} &= +\frac{\omega_z^2}{2} y + \omega_c x \\ \ddot{z} &= -\omega_z^2 z \end{aligned} \right\} \ddot{\rho} = \frac{\omega_z^2}{2} \rho + i\omega_c \dot{\rho}$$

$\rho = x + iy$

Fréquences du mouvement transversal

Solutions pour ρ de la forme: $\rho_0 e^{i\omega t}$

$\hookrightarrow \omega^2 - \omega_c \omega + \frac{\omega_z^2}{2} = 0$

$\Delta = \omega_c^2 - 2\omega_z^2 > 0$ (car, en général, $\omega_c \gg \omega_z$) \rightarrow 2 racines réelles

Fréquence cyclotron modifiée par E

$$\omega'_c = \frac{\omega_c}{2} + \frac{\omega_c}{2} \sqrt{1 - \frac{2\omega_z^2}{\omega_c^2}}$$

Très proche de ω_c

Fréquence magnétron

$$\omega_m = \frac{\omega_c}{2} - \frac{\omega_c}{2} \sqrt{1 - \frac{2\omega_z^2}{\omega_c^2}}$$

Très petite devant ω_c et ω_z

Les 2 fréquences ω'_c et ω_m (11)

Autre écriture

$$\begin{cases} \omega'_c = \frac{1}{2}(\omega_c + \tilde{\omega}_c) \\ \omega_m = \frac{1}{2}(\omega_c - \tilde{\omega}_c) \end{cases} \quad \tilde{\omega}_c^2 = \omega_c^2 - 2\omega_z^2$$

Somme et produit

$$\begin{cases} \omega'_c + \omega_m = \omega_c & (1) \\ \omega'_c \omega_m = \frac{\omega_z^2}{2} & (2) \end{cases}$$

Fréquence δ_e définie par:

$$\delta_e = \frac{\omega_z^2}{2\omega'_c}$$

D'après (2) $\rightarrow \delta_e = \omega_m$

D'après (1) $\rightarrow \delta_e = \omega_c - \omega'_c$

Propriété importante du piège

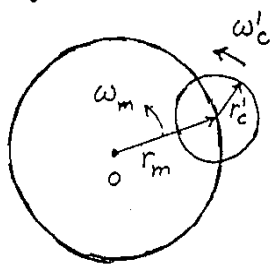
Les 3 fréquences du mouvement de la charge q dans le piège, $\omega_z, \omega'_c, \omega_m$ sont indépendantes du point où l'on se trouve

Solution des équations classiques (12)

$$z = z_0 \cos(\omega_z t - \varphi_0)$$

$$\rho = r_c e^{i(\omega'_c t - \varphi'_c)} + r_m e^{i(\omega_m t - \varphi_m)}$$

- Oscillation le long de Oz à la fréquence ω_z
- Dans le plan xOy , cercle de rayon r_c parcouru à la vitesse angulaire uniforme ω'_c , dont le centre, situé à une distance r_m de O , tourne à la vitesse angulaire uniforme ω_m autour de O



Ordres de grandeur

(13)

$B_0 = 1,8 \text{ Tesla}$ $z_0 = 6,7 \text{ mm}$ $U_0 = 9,2 \text{ V}$

$\omega_c / 2\pi \approx 51 \text{ GHz}$

$\omega_3 / 2\pi \approx 60 \text{ MHz}$

$\omega_m / 2\pi \approx 35 \text{ KHz}$

Enfinement, par rapport à ce qui se passe pour un seul champ \vec{B}_0 uniforme, l'effet du champ électrique quadrupolaire est de

- 1 - Diminuer très légèrement la fréquence cyclotron $\omega_c \rightarrow \omega'_c < \omega_c$
- 2 - Faire tourner très lentement le centre de l'orbite cyclotron à la fréquence ω_m autour de 0
- 3 - Faire osciller lentement l'orbite cyclotron à la fréquence ω_3 le long de Oz

Allure du mouvement

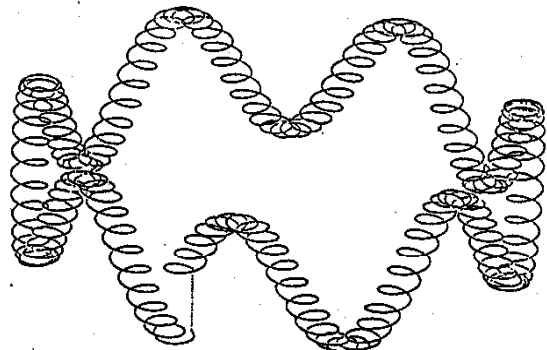
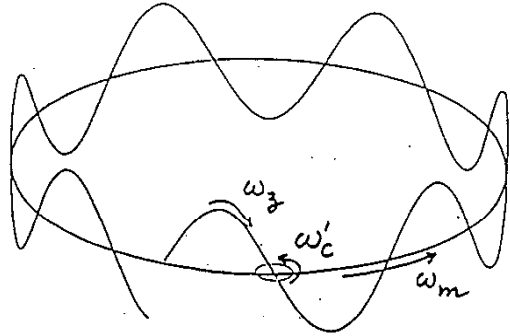


Figure extraite de : P. EKSTROM, D. WINELAND Scientific American 243, 91 (Aout 1980)

Etude quantique

(15)

Hamiltonien orbital

$H_{orb} = \frac{1}{2m_e} [\vec{p} - q\vec{A}(\vec{r})]^2 + V(\vec{r})$

$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{B}_0$ $V(\vec{r}) = \frac{m_e \omega_3^2}{2} [z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2}]$

$H_{orb} = H_3 + H_{xy}$

Hamiltonien H_3

$H_3 = \frac{P_z^2}{2m_e} + \frac{1}{2} m_e \omega_3^2 z^2 = \hbar \omega_3 (N_3 + \frac{1}{2})$

$N_3 = a_3^+ a_3$ $[a_3, a_3^+] = 1$

$a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} [\beta_3 z + \frac{i}{\hbar \beta_3} P_z]$ $\beta_3 = \sqrt{\frac{m_e \omega_3}{\hbar}}$

Hamiltonien H_{xy}

$H_{xy} = \frac{1}{2m_e} [P_x^2 + P_y^2] + \frac{1}{2} m_e \left[\left(\frac{\omega_c}{2} \right)^2 - \frac{\omega_3^2}{2} \right] (x^2 + y^2) + \frac{\omega_c}{2} L_3$
 $\left[\frac{\tilde{\omega}_c}{2} \right]^2$

Nouveau choix pour a_x, a_y, a_d, a_g (16)

$\tilde{a}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{\beta} x + \frac{i}{\tilde{\beta} \hbar} P_x)$
 $\tilde{a}_y = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{\beta} y + \frac{i}{\tilde{\beta} \hbar} P_y)$

avec $\tilde{\beta} = \sqrt{\frac{m_e \tilde{\omega}_c}{\hbar}}$ au lieu de $\beta = \sqrt{\frac{m_e \omega_c}{\hbar}}$

$\tilde{a}_d = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{a}_x - i\tilde{a}_y)$ $\tilde{a}_g = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{a}_x + i\tilde{a}_y)$

- Comme l'expression de L_3 ne dépend pas de β , on a toujours $L_3 = i\hbar (\tilde{a}_x \tilde{a}_y^+ - \tilde{a}_x^+ \tilde{a}_y) = \hbar (\tilde{a}_d^+ \tilde{a}_g - \tilde{a}_d \tilde{a}_g^+)$ et donc $\frac{\omega_c}{2} L_3 = \frac{\hbar \omega_c}{2} (\tilde{N}_d - \tilde{N}_g)$

- Avec ce nouveau choix de $\tilde{\beta}$, on a $\frac{1}{2m_e} (P_x^2 + P_y^2) + \frac{m_e}{2} \left(\frac{\tilde{\omega}_c}{2} \right)^2 (x^2 + y^2) = \frac{\hbar \tilde{\omega}_c}{2} (\tilde{N}_d + \tilde{N}_g + 1)$

Enfinement,

$H_{orb} = \frac{\hbar \tilde{\omega}_c}{2} (\tilde{N}_d + \tilde{N}_g + 1) + \frac{\hbar \omega_c}{2} (\tilde{N}_d - \tilde{N}_g)$
 $= \hbar \omega'_c (\tilde{N}_d + \frac{1}{2}) - \hbar \omega_m (\tilde{N}_g + \frac{1}{2})$

Valeurs propres de H_{orb} (17)

$$H_{orb} = \hbar \omega_3 (N_3 + \frac{1}{2}) + \hbar \omega'_c (\tilde{N}_d + \frac{1}{2}) - \hbar \omega_m (\tilde{N}_g + \frac{1}{2})$$

Trois oscillateurs indépendants
 Noter le signe - pour ω_m
 "Instabilité" du mouvement magnétron
 Valeurs propres de $\tilde{N}_d, N_3, \tilde{N}_g$: entiers $n, k, s \geq 0$

$$H_{orb} |n, k, s\rangle = [(n + \frac{1}{2}) \hbar \omega'_c + (k + \frac{1}{2}) \hbar \omega_3 - (s + \frac{1}{2}) \hbar \omega_m] |n, k, s\rangle$$

Valeurs propres de $H_{tot} = H_{orb} + H_{spin}$

$$H_{spin} |m\rangle = m \hbar \omega_L |m\rangle$$

$$m = \pm \frac{1}{2} \quad \hbar \omega_L = \frac{q}{2} \hbar \omega_c = (1 + a_e) \hbar \omega_c$$

$$H |n, m, k, s\rangle = [(n + \frac{1}{2}) \hbar \omega'_c + m \hbar \omega_L + (k + \frac{1}{2}) \hbar \omega_3 - (s + \frac{1}{2}) \hbar \omega_m] |n, m, k, s\rangle$$

Récapitulation (18)

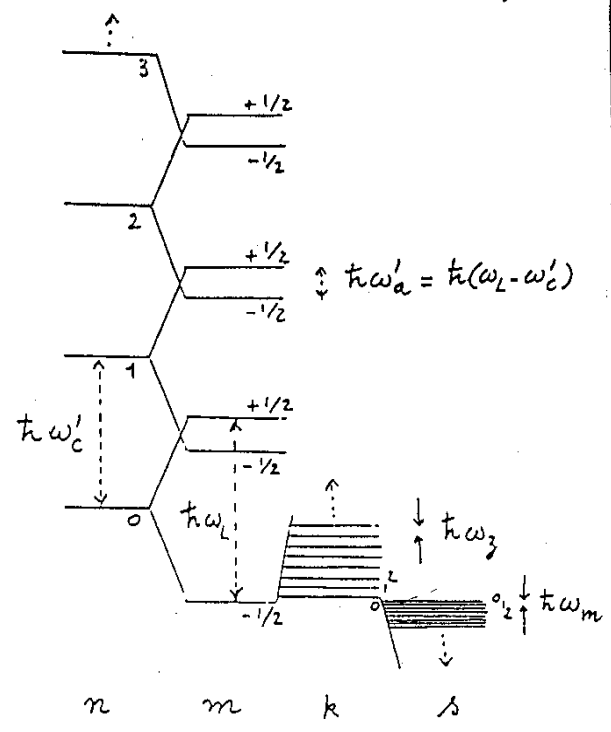
- Spectre de H entièrement discret
- 4 nombres quantiques
 $n, k, s = 0, 1, 2, 3 \dots$
 $m = -1/2, +1/2$
- 4 fréquences
 $\omega'_c, \omega_L = (1 + a_e) \omega_c, \omega_3, \omega_m$
- Par rapport au cas du seul champ \vec{B}_0 , l'effet de \vec{E} est de
 - 1- Rendre discret le spectre de H_3
 - 2- Diminuer légèrement l'énergie des quanta d ($\omega_c \rightarrow \omega'_c < \omega_c$)
 - 3- Lever la dégénérescence g (H dépend maintenant de H_g)

Geonium

Nom donné au système formé par un électron lié à une telle configuration de champs \vec{E}, \vec{B}_0
 "Electron lié à la terre"

Allure du spectre du geonium (19)

(à comparer avec le spectre des niveaux de Landau - Rabi)



Quelques observables (20)

$$x = (1/2\tilde{\beta}) (\tilde{a}_d + \tilde{a}_d^\dagger + \tilde{a}_g + \tilde{a}_g^\dagger)$$

$$y = (i/2\tilde{\beta}) (\tilde{a}_d - \tilde{a}_d^\dagger - \tilde{a}_g + \tilde{a}_g^\dagger)$$

$$z = (1/\sqrt{2}\beta_3) (a_3 + a_3^\dagger)$$

$$P_x = (i\hbar\tilde{\beta}/2) (\tilde{a}_d^\dagger + \tilde{a}_g^\dagger - \tilde{a}_d - \tilde{a}_g)$$

$$P_y = (\hbar\tilde{\beta}/2) (\tilde{a}_d^\dagger - \tilde{a}_g^\dagger + \tilde{a}_d - \tilde{a}_g)$$

$$P_z = (i\hbar\beta_3/\sqrt{2}) (a_3^\dagger - a_3)$$

$$\Pi_i = m_e v_i = p_i - q A_i \quad i = x, y, z$$

$$\Pi_x = (im_e/2\tilde{\beta}) [\omega'_c (\tilde{a}_d^\dagger - \tilde{a}_d) - \omega_m (\tilde{a}_g^\dagger - \tilde{a}_g)]$$

$$\Pi_y = (m_e/2\tilde{\beta}) [\omega'_c (\tilde{a}_d^\dagger + \tilde{a}_d) + \omega_m (\tilde{a}_g^\dagger + \tilde{a}_g)]$$

$$\Pi_z = (im_e/\sqrt{2}\beta_3) \omega_3 (a_3^\dagger - a_3)$$

$$\tilde{\beta} = \sqrt{\frac{m_e \tilde{\omega}_c}{\hbar}} \quad \beta_3 = \sqrt{\frac{m_e \omega_3}{\hbar}}$$

Π_x et Π_y dépendent maintenant non seulement de \tilde{a}_d et \tilde{a}_d^\dagger mais aussi de \tilde{a}_g et \tilde{a}_g^\dagger

Valeur moyenne de quelques observables dans l'état $|n, m, k, s\rangle$ (21)

Extension transversale

$$\langle x^2 + y^2 \rangle = \frac{\hbar}{m_e \omega_c} [(2n+1) + (2s+1)]$$

$$\frac{\hbar}{m_e \omega_c} = \frac{\hbar}{m_e c} \frac{c}{\omega_c} = \lambda_{\text{Compton}} \tilde{\lambda}_{\text{cyclotron}}$$

Extension longitudinale

$$\langle z^2 \rangle = \frac{\hbar}{m_e \omega_3} (k + \frac{1}{2})$$

Energie cinétique $T = (\pi_x^2 + \pi_y^2 + \pi_z^2) / 2m_e$

$$\langle T \rangle = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_c \frac{\omega_c'}{\omega_c} + (k + \frac{1}{2}) \hbar \omega_3 \frac{1}{2} + (s + \frac{1}{2}) \hbar \omega_m \frac{\omega_m}{\omega_c}$$

Energie potentielle $V = \frac{m_e \omega_3^2}{2} [z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2}]$

$$\langle V \rangle = -(n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_c \frac{\omega_m}{\omega_c} + (k + \frac{1}{2}) \hbar \omega_3 \frac{1}{2} - (s + \frac{1}{2}) \hbar \omega_m \frac{\omega_c'}{\omega_c}$$

Discussion physique (22)

- Dans l'état $|n\rangle$, l'énergie du mouvement cyclotron est surtout cinétique. L'énergie potentielle représente une petite correction < 0

- Pour le mouvement magnétron, c'est l'inverse. Dans l'état $|s\rangle$, l'énergie est surtout potentielle et négative, l'énergie cinétique représentant une petite correction > 0

Quand le nombre quantique s augmente, le rayon de l'orbite magnétron augmente comme \sqrt{s} , $\langle V \rangle$ prend des valeurs de plus en plus négatives, $\langle T \rangle$, qui est positif, augmente très lentement, l'énergie globale $\langle T \rangle + \langle V \rangle$ étant de plus en plus négative

Mouvement magnétron instable (plus exactement métastable)

Que faut-il mesurer pour obtenir l'anomalie a_e ? (23)

Détermination expérimentale

des 3 fréquences

$$\omega_c' \quad \omega_a' \quad \omega_3$$

En déduire

$$\omega_c = \omega_c' + \frac{\omega_c - \omega_c'}{\delta_e} = \omega_c' + \frac{\omega_3^2}{2\omega_c'}$$

$$\omega_a - \omega_c = \omega_a - \omega_c' + \omega_c' - \omega_c = \omega_a' - \frac{\omega_3^2}{2\omega_c'}$$

$$\hookrightarrow a_e = \frac{\omega_a}{\omega_c} = \frac{\omega_a' - \frac{\omega_3^2}{2\omega_c'}}{\omega_c' + \frac{\omega_3^2}{2\omega_c'}}$$

Mesure de contrôle

Mesurer ω_m et vérifier que

$$\omega_m = \frac{\omega_3^2}{2\omega_c'}$$

Si non, défauts dans le piège

Piège idéal (24)

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2} m_e \omega_3^2 (z^2 - \frac{x^2 + y^2}{2}) = \frac{1}{2} m_e \omega_3^2 (\frac{3z^2}{2} - \frac{r^2}{2}) \approx r^2 Y_2^0(\theta, \varphi)$$

\vec{B}_0 aligné suivant Oz et uniforme

Piège de Penning imparfait

1. Termes supplémentaires dans V

$$(\sum_{l \neq 2} \sum_m + \sum_{l=2, m \neq 0}) A_{lm} (\frac{r}{3_0})^l Y_l^m(\theta, \varphi)$$

- Valeurs de l autres que $l=2$
- Pour $l=2$, valeurs de m autres que $m=0$ (pas de symétrie de révolution autour de Oz)

2. Défauts sur \vec{B}_0

- Champ \vec{B}_0 non orienté sur un axe de symétrie de V
- Champ \vec{B}_0 non homogène

Problème

Est-il néanmoins possible de déterminer a_e ?

Potentieux multipolaires $l \neq 2$ (25)

Termes en l de l'ordre de $(r/3_0)^l$
 r : extension de la zone occupée par e^-
 $r/3_0 < 10^{-2} \rightarrow$ Décroissance rapide avec l

Terme $l=0$ Constante inobservable

Termes $l=1$
 Champ électrique uniforme

On prend pour nouvelle origine le point où $\vec{E} = \vec{0}$

De toute façon, les termes impairs $l=1, 3, 5, \dots$ sont très petits si le piège n'est pas trop dissymétrique: vis à vis de l'inversion / 0

Termes pairs $l=4, 6, \dots$

Introduisent des anharmonicités que l'on peut observer et utiliser pour éliminer ces termes au moyen d'électrodes de compensation

Termes $l=2, m \neq 0$ (26)

L'ensemble des termes $l=2$, avec $-2 \leq m \leq 2$ peut être réécrit

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1,2,3} A_{kl} x_k x_l$$

avec $A_{kl} = A_{lk}$, $\text{Tr}(A) = 0$ (car $\Delta V = 0$)

Diagonalisation de (A)

$$V = \frac{1}{2} m_c \omega_3^2 \left[z^2 - \frac{1}{2}(1+\epsilon)x^2 - \frac{1}{2}(1-\epsilon)y^2 \right]$$

On ne gardera que ces termes $l=2$. Les défauts de V sont alors décrits par un seul paramètre ϵ

Défauts de \vec{B}

- Inhomogénéité de \vec{B} négligeable sur l'étendue de la zone occupée
- Par contre, \vec{B} peut être désaligné vis à vis des axes principaux du potentiel V

$$\vec{B} \begin{cases} B_z = B_0 \cos \theta \\ B_x = B_0 \sin \theta \cos \varphi \\ B_y = B_0 \sin \theta \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{matrix} 2 \text{ angles} \\ \theta, \varphi \end{matrix}$$

Mouvement classique dans le (27)

piège imparfait ($\epsilon, \theta, \varphi$)

$$m_c \ddot{\vec{r}} = -q \vec{\nabla} V + q \dot{\vec{r}} \times \vec{B}$$

- Comme $\vec{\nabla} V$ est linéaire en \vec{r} et que \vec{B} est indépendant de \vec{r} , 3 équations différentielles linéaires homogènes du 2^{ème} ordre

- Recherche de solutions de la forme $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{-i\omega t}$

\hookrightarrow 3 équations algébriques, linéaires et homogènes en x_0, y_0, z_0

- Fréquences ω du mouvement déterminées par $\text{Déterminant de ce système} = 0$

Etude quantique

Même résultat car l'hamiltonien est une fonction quadratique des x_i et p_j (oscillateurs couplés)

\hookrightarrow 3 modes normaux de vibration

Les 3 nouvelles fréquences $\bar{\omega}_c, \bar{\omega}_3, \bar{\omega}_m$ (28)

L'annulation du déterminant donne une équation du 3^{ème} degré en ω^2 (Si ω est solution, $-\omega$ l'est aussi)

Si ϵ et θ petits, 3 racines réelles $\bar{\omega}_c^2, \bar{\omega}_3^2, \bar{\omega}_m^2$ proches de $\omega_c'^2, \omega_3^2, \omega_m^2$ (qui correspondent à $\epsilon = \theta = 0$)

$$\bar{\omega}_c^2 \gg \bar{\omega}_3^2 \gg \bar{\omega}_m^2$$

Fonctions symétriques des racines

$$\bar{\omega}_c^2 \bar{\omega}_3^2 \bar{\omega}_m^2 = \frac{1}{4} \omega_3^6 (1 - \epsilon^2)$$

$$\bar{\omega}_c^2 \bar{\omega}_3^2 + \bar{\omega}_c^2 \bar{\omega}_m^2 + \bar{\omega}_3^2 \bar{\omega}_m^2 =$$

$$\omega_c^2 \omega_3^2 \left[1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \epsilon \sin^2 \theta \cos 2\varphi \right]$$

$$- \frac{3}{4} \omega_3^4 \left(1 + \frac{1}{3} \epsilon^2 \right)$$

$$\boxed{\bar{\omega}_c^2 + \bar{\omega}_3^2 + \bar{\omega}_m^2 = \omega_c^2}$$

ω_c est toujours donné par

$$\omega_c = - \frac{q B_0}{m_c}$$

Comparaison avec le piège parfait (29)

- A partir de $\bar{\omega}_c$ et $\bar{\omega}_3$ formons
$$\bar{\delta}_e = \frac{\bar{\omega}_3^2}{2\bar{\omega}_c}$$
- $\bar{\delta}_e$ reste une très bonne approximation pour $\omega_c - \bar{\omega}_c$ [Pour le piège parfait on a $\delta_e = \omega_c - \omega'_c$]
Par développement limité, on obtient en effet
$$\omega_c - \bar{\omega}_c = \bar{\delta}_e \left[1 + \frac{9}{8} \frac{\bar{\omega}_3^2}{\bar{\omega}_c^2} \left(\theta^2 - \frac{2}{9} \epsilon^2 \right) \right] + \dots$$

 $\sim 10^{-6}$ $\nearrow \frac{\bar{\omega}_3^2}{\bar{\omega}_c^2}$ $\nwarrow \left(\theta^2 - \frac{2}{9} \epsilon^2 \right)$ $\sim 10^{-4}$
- Les défauts θ^2 et ϵ^2 , typiquement de l'ordre de 10^{-4} , apparaissent avec le facteur $\bar{\omega}_3^2 / \bar{\omega}_c^2 \approx 10^{-6} \ll 1$
- Par contre, $\bar{\delta}_e$ diffère en général beaucoup de $\bar{\omega}_m$ (alors que pour le piège parfait $\delta_e = \omega_m$)
Les asymétries sont mieux moyennées par les mouvements cyclotron et vibration que par le mouvement magnétron

Comment déterminer a_e ? (30)

- La fréquence de Larmor du spin reste
$$\omega_L = \frac{g}{2} \omega_c = (1 + a_e) \omega_c$$
- On peut mesurer expérimentalement $\bar{\omega}_c, \bar{\omega}_3, \bar{\omega}_a = \omega_L - \bar{\omega}_c, \bar{\omega}_m$
- Puis en déduire ω_c par
$$\omega_c^2 = \bar{\omega}_c^2 + \bar{\omega}_3^2 + \bar{\omega}_m^2$$
- La détermination précédente de ω_c est exacte. On peut aussi se contenter de
$$\omega_c \approx \bar{\omega}_c + \bar{\delta}_e = \bar{\omega}_c + \frac{\bar{\omega}_3^2}{2\bar{\omega}_c}$$
 (termes correctifs très petits)
- De $\bar{\omega}_c, \bar{\omega}_a, \omega_c$, on tire alors
$$a_e = \frac{\omega_a}{\omega_c} = \frac{\bar{\omega}_a - (\omega_c - \bar{\omega}_c)}{\bar{\omega}_c + (\omega_c - \bar{\omega}_c)}$$
- Il est toujours intéressant de comparer $\bar{\omega}_m$ et $\bar{\delta}_e$ pour évaluer l'importance des défauts du piège

Bibliographie

§ 1 c. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, *Mécanique Quantique* Hermann 1973, Complément Ev1

§ 2 A.A. Sokolov, Yu G. Pavlenko *Optics Spectry* 22, 1 (1967)
G. Gräff, E. Klempt *Z. Naturforsch* 22a, 1960 (1967)
G. Gräff, E. Klempt, G. Werth *Z. Phys* 222, 201 (1969)
W. Itano, D. Wineland *Phys. Rev.* A25, 35 (1982)

§ 3 L.S. Brown, G. Gabrielse *Phys. Rev.* A25, 2423 (1982)