

2^{ème} Partie - Effets physiques liés au caractère quantique des variables atomiques (suite et fin)

D - Diffraction d'une onde de de Broglie atomique par un faisceau lumineux

1 - Conditions sur la fonction d'onde atomique initiale (T1-T4)

2 - Modification de la fonction d'onde atomique à la traversée du faisceau lumineux (T5-T9)

a) Calcul du déphasage en chaque point.

b) Analogie optique - Réseau de phase biréfringent

3 - Diffraction par une onde lumineuse résonnante progressive

a) Fonction d'onde après traversée du faisceau lumineux (T-10)

b) Distribution d'impulsion (T-11)

c) Interprétation corpusculaire (T-12)

4 - Diffraction par une onde lumineuse résonnante stationnaire - Effet Kapitza-Dirac résonnant

a) Fonction d'onde après traversée du faisceau lumineux (T13-T14)

b) Distribution d'impulsion. (T-15)

c) Interprétation corpusculaire (T 16-T19)

d) Interprétation ondulatoire. Analogie avec une diffraction de Bragg (T20-T21)

e) L'effet Kapitza-Dirac pour des électrons. (T22-T23)

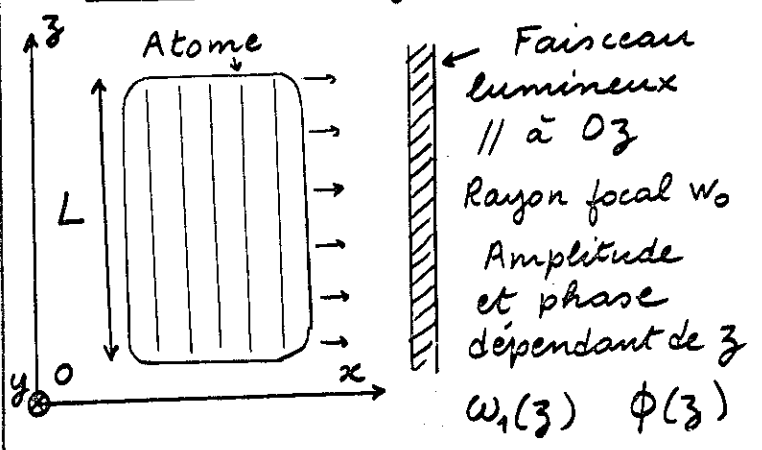
Buts du § D

(1)

- Etudier la diffraction d'une onde atomique plane (ou tout au moins ayant une dimension transversale grande devant λ_R) par un faisceau lumineux qui elle traverse à angle droit
 - Calcul et interprétation physique des phénomènes prévus dans 2 cas importants
 - (i) Onde lumineuse résonnante progressive
 - (ii) Onde lumineuse résonnante stationnaire
- Interprétations ondulatoire et corpusculaire
Lien avec l'effet Kapitza-Dirac

Notations - Hypothèses

(2)



Atome dans l'état $|f\rangle$
Etat externe décrit par un paquet d'ondes de largeur L

$$L \gg \lambda_R$$

se propageant suivant Ox avec une vitesse $v_x = v_0 = \hbar k_0 / M$
Energie initiale $E_0 = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2M}$

Impulsion initiale : $\hbar \vec{k}_0 // \vec{a} Ox$

(3)

- Comme la largeur en z du paquet d'ondes est L , la dispersion δp_z de p_z autour de sa valeur moyenne $\langle p_z \rangle = 0$ vaut
- $$\delta p_z \approx \frac{\hbar}{L}$$
- $$L \gg \lambda_R \longrightarrow \delta p_z \ll \frac{\hbar}{\lambda_R} = \hbar k$$
- L'impulsion initiale atomique est définie à mieux que l'impulsion $\hbar k$ d'un photon de l'onde lumineuse

Buts du calcul

- Calculer la dépendance en z de la fonction d'onde atomique après traversée du faisceau lumineux
- Par transformée de Fourier spatiale en déduire la distribution de l'impulsion transférée à l'atome le long de Oz

Absence de réflexion pour l'onde de de Broglie incidente

(4)

L'énergie cinétique initiale de l'atome, $E_0 = \hbar^2 k_0^2 / 2M$, est supposée grande devant le potentiel lumineux $|V(z)|$ [Température du four $\sim 800^\circ K$ - Potentiels optiques $\sim k \Theta$ avec $\Theta \approx 30 mK$]. Donc, pas de barrière de potentiel.

De plus, les variations de l'amplitude lumineuse le long de Ox se font sur une distance de l'ordre de w_0 ($\sim 10 \mu$), très grande devant la longueur d'onde de de Broglie le long de Ox ($\sim 1 \text{ \AA}$)

Donc, pas de réflexion de l'onde de de Broglie lorsqu'elle arrive sur le faisceau lumineux

Déphasage subi par l'onde de de Broglie en un point z (5)

Comme il n'y a pas de réflexion, l'onde transmise a même module que l'onde incidente (on néglige également tout déplacement de l'atome le long de Oz pendant la traversée du faisceau, ce qui est possible si w_0 est suffisamment petit)

Le seul effet de la traversée est donc un déphasage $e^{i\chi(z)}$ dépendant de z et de l'état interne

Analogie optique

"Réseau de phase" avec une biréfringence et des polarisations principales dépendant de z

Calcul du déphasage (6)

Soient $|\pm\rangle_z$ les 2 états propres de $[V(z)]$.

Les 2 amplitudes qu'a l'atome incident en z d'être dans les états $|+\rangle_z$ et $|-\rangle_z$ vont subir des déphasages $\chi_{\pm}(z)$ dépendant des valeurs propres $V_{\pm}(z) = \pm \frac{\hbar}{2} \Omega(z)$ du potentiel.

Le calcul de $\chi_{\pm}(z)$ peut être fait semiclassiquement car la longueur d'onde de de Broglie suivant Ox est très petite devant w_0

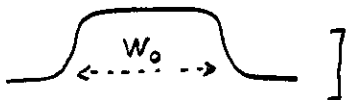
Dans le faisceau lumineux, la longueur d'onde de de Broglie est

$$\lambda_{\pm}(z) = \frac{1}{k_{\pm}(z)} \quad \text{avec} \quad k_{\pm}(z) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2M(E_0 - V_{\pm}(z))}$$

Expression de $\chi_{\pm}(z)$ (7)

$$\chi_{\pm}(z) = [k_{\pm}(z) - k_0] w_0$$

[on assimile la répartition de l'amplitude lumineuse le long de Ox au point z à un créneau carré avec des bords arrondis



Comme $E_0 = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2M} \gg |V_{\pm}|$

$$k_{\pm}(z) = k_0 \left[1 - \frac{2M V_{\pm}(z)}{\hbar^2 k_0^2} \right]^{1/2}$$

$$\approx k_0 \left[1 - \frac{M V_{\pm}(z)}{\hbar^2 k_0^2} \right] = k_0 - \frac{V_{\pm}(z)}{\hbar v_0}$$

avec $v_0 = \hbar k_0 / M$

$$\hookrightarrow [k_{\pm}(z) - k_0] w_0 = - \frac{V_{\pm}(z)}{\hbar} \frac{w_0}{v_0} = \mp \frac{\Omega(z)}{2} T$$

où $T = \frac{w_0}{v_0}$ est le temps de traversée

Fonction d'onde initiale (8)

$$|\Psi\rangle = \int dz |f, z\rangle$$

$\Psi_e(z) = 0$: L'atome est dans f
 $\Psi_f(z)$ indépendant de z ($L \gg \lambda_R$)

Changement de base

Développons $|f, z\rangle$ sur les 2 états propres $|\pm\rangle_z$ de $[V(z)]$

[voir VII-21]

$$|\Psi\rangle = \int dz \left\{ e^{-i\frac{\phi(z)}{2}} \left[\cos \frac{\alpha(z)}{2} |-\rangle_z + \sin \frac{\alpha(z)}{2} |+\rangle_z \right] \right\}$$

Fonction d'onde après traversée

Les états $|+\rangle_z$ et $|-\rangle_z$ évoluent indépendamment l'un de l'autre et subissent des déphasages $e^{-i\Omega(z)T/2}$ et $e^{i\Omega(z)T/2}$

Vecteur d'état final $|\psi'\rangle$ (9)

$$|\psi'\rangle = \int dz \left\{ e^{-i\frac{\phi(z)}{2}} \left[\cos \frac{\alpha(z)}{2} e^{i\frac{\Omega(z)T}{2}} |-\rangle_z \right. \right. \\ \left. \left. + \sin \frac{\alpha(z)}{2} e^{-i\frac{\Omega(z)T}{2}} |+\rangle_z \right] \right\}$$

Retour à la base $\{|e\rangle, |f\rangle\}$

On utilise de nouveau (VII-21)

$$|\psi'\rangle = \int dz \left\{ |f, z\rangle \left[\cos \frac{\Omega(z)T}{2} + i \cos \alpha(z) \sin \frac{\Omega(z)T}{2} \right] \right. \\ \left. + |e, z\rangle \left[-i \sin \alpha(z) \sin \frac{\Omega(z)T}{2} e^{-i\phi(z)} \right] \right\}$$

Le module reste bien constant

$$|\psi_e(z)|^2 + |\psi_f(z)|^2 = |\psi'_e(z)|^2 + |\psi'_f(z)|^2$$

Calcul analogue à celui de la traversée d'une lame biréfringente en Optique

Distribution d'impulsion après (11) traversée du faisceau lumineux

Suivant l'état interne dans lequel il sort (e ou f), l'atome n'a pas la même fonction d'onde en z

- S'il sort dans f , sa fonction d'onde en z est une constante, dont la transformée de Fourier est $\delta(p_z)$
 \hookrightarrow S'il sort dans f , l'atome a la même impulsion $p_z = 0$ qu'à l'entrée

- S'il sort dans e , sa fonction d'onde est e^{ikz} dont la transformée de Fourier est $\delta(p_z - \hbar k)$

\hookrightarrow S'il sort dans e , l'atome a gagné une impulsion $\hbar k$ égale à celle des photons du faisceau lumineux

Onde progressive résonnante (10)

$$\omega_1(z) = \omega_1 = -d E_0 / \hbar$$

Indépendant de z

$$\Omega(z) = \sqrt{[\omega_1(z)]^2 + (\omega_2 - \omega_0)^2} = \omega_1$$

Indépendant de z

$$\phi(z) = -kz$$

$$\sin \alpha(z) = \frac{\omega_1(z)}{\Omega(z)} = 1 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

On en déduit

$$\begin{cases} \psi'_f(z) = \cos \frac{\omega_1 T}{2} \\ \psi'_e(z) = -i \sin \frac{\omega_1 T}{2} e^{ikz} \end{cases}$$

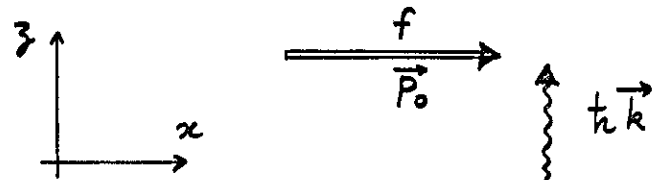
Après traversée du faisceau, l'atome a une probabilité $\cos^2 \frac{\omega_1 T}{2}$ d'être dans f

$\sin^2 \frac{\omega_1 T}{2}$ d'être dans e

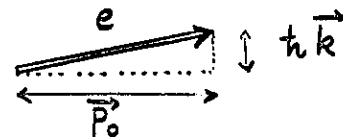
[Si $\omega_1 T = \pi$, impulsion π]

Interprétation corpusculaire (12)

Etat initial

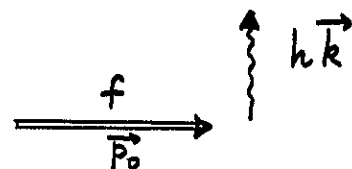


Absorption d'un photon



L'atome monte dans e et gagne $\hbar k$

Emission stimulée d'un photon
 (l'émission spontanée est négligée)



L'atome redescend dans f et repart $\hbar k$

Onde stationnaire résonnante (13)

$\phi(z) = 0 \quad \delta = \omega - \omega_0 = 0$

$\omega_1(z) = 2\omega_1 \cos kz = \Omega(z)$

$\sin \alpha(z) = 1 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

On en déduit

$\psi_f'(z) = \cos(\omega_1 T \cos kz)$

$\psi_e'(z) = -i \sin(\omega_1 T \cos kz)$

ψ_f' et ψ_e' sont des fonctions périodiques de z , de période $\frac{2\pi}{k}$

Leurs transformées de Fourier en z sont donc des "peignes" de fonctions $\delta(p_z - n\hbar k)$ avec n entier ≥ 0 , les coefficients de ces fonctions δ étant les coefficients du développement en série de Fourier de ψ_e' et ψ_f'

Quelques formules utiles (14)

$e^{\pm i u \cos \theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\pm i)^n J_n(u) e^{\mp i n \theta}$

J_n : Fonction de Bessel d'ordre n
(Formule importante pour la modulation de fréquence)

$J_n(u) = (-1)^n J_{-n}(u)$

$J_n(u) = (-1)^n J_n(-u)$

On en déduit que

$\cos(u \cos \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n J_{2n}(u) e^{2i n \theta}$

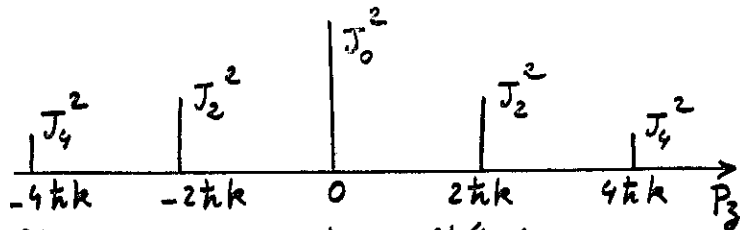
$\sin(u \cos \theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n J_{2n+1}(u) e^{i(2n+1)\theta}$

Seuls les harmoniques pairs (impairs) apparaissent dans le développement en série de Fourier de $\cos(u \cos \theta)$ [$\sin(u \cos \theta)$]

Distribution d'impulsion après traversée du faisceau lumineux (15)

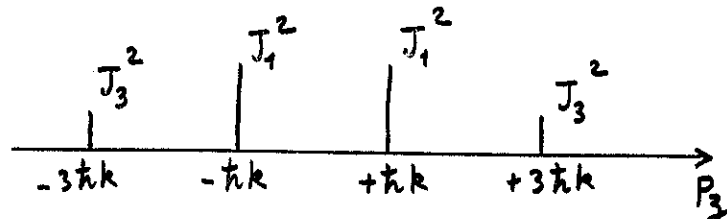
Atome sortant dans l'état f

L'impulsion p_z peut avoir toutes les valeurs $2n\hbar k$ avec des probabilités $J_{2n}^2(\omega_1 T)$



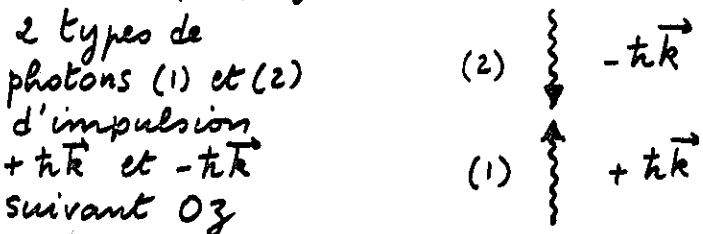
Atome sortant dans l'état e

L'impulsion p_z peut avoir toutes les valeurs $(2n+1)\hbar k$ avec des probabilités $J_{2n+1}^2(\omega_1 T)$

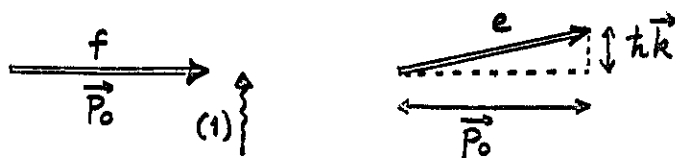


Interprétation corpusculaire (16)

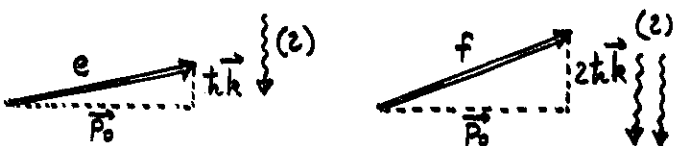
L'onde stationnaire est une superposition de 2 ondes progressives se propageant en sens inverse



Absorption d'un photon (1)



Absorption d'un photon (1) suivie de l'émission stimulée d'un photon (2)



L'atome retourne dans f avec une impulsion $\hbar k - (-\hbar k) = 2\hbar k$

Pics à $2n\hbar k$

Correspondent à une suite de processus d'absorption et d'émission stimulée où, globalement, n photons sont absorbés dans le mode (1) [ou (2)], et n photons sont émis de manière stimulée dans l'autre mode, l'atome retournant à la fin dans l'état f

Pics à $(2n+1)\hbar k$

$n+1$ photons absorbés globalement dans un mode et n photons émis de manière stimulée dans l'autre mode, l'atome finissant dans l'état e

Redistribution entre les 2 modes non vides

Pics très étroits car on néglige l'émission spontanée

(17) Autre formulation du problème (18)

Etats de base du système atome + mode (1) + mode (2)

$|a, n_1, n_2\rangle$

Atome dans l'état a (f ou e) en présence de n_1 photons (1), n_2 photons (2)

Partons de $|f, n_1, n_2\rangle$. L'atome peut passer de f à e en absorbant un photon (1) ou (2). L'état $|f, n_1, n_2\rangle$ est donc couplé à $|e, n_1-1, n_2\rangle$ ou $|e, n_1, n_2-1\rangle$ (qui ont tous même énergie si $\omega = \omega_0$)

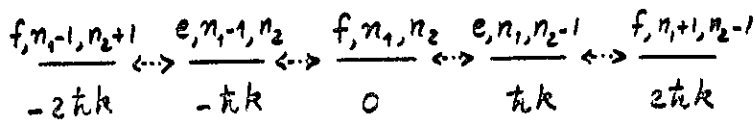
L'état $|e, n_1-1, n_2\rangle$ est couplé, soit à $|f, n_1, n_2\rangle$, soit à $|f, n_1-1, n_2+1\rangle$ [émission d'un photon stimulé (1) ou (2)]

Et ainsi de suite ... Ensemble d'états de même énergie couplés de proche en proche

Diagramme énergétique (19)

Ordonnées : énergie Abcisses : impulsion

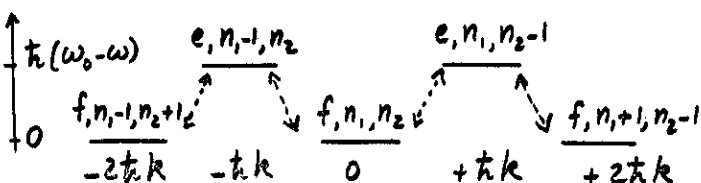
Cas résonnant



Tous les états ont même énergie. Le lien entre la parité de n et l'état e ou f apparaît clairement.

Analogie avec la propagation dans un solide (l'espace des positions étant remplacé par celui des impulsions)

Cas non résonnant



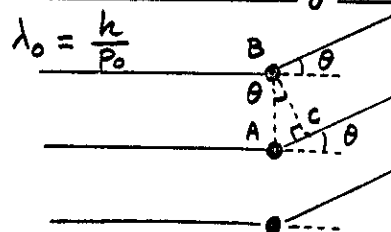
2 groupes d'états séparés par $\hbar(\omega_0 - \omega)$. Si l'on part de f , ce sont surtout les états f qui seront peuplés (conservation de l'énergie)

Interprétation ondulatoire (20)

Dans la diffraction habituelle par un réseau, c'est une onde lumineuse qui est diffractée par un réseau de matière.

Ici, c'est une onde de matière (onde de de Broglie) qui est diffractée par un réseau lumineux.

Condition d'interférence constructive



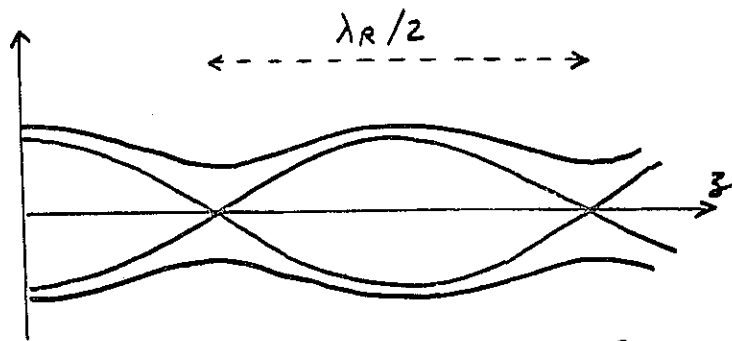
Période du réseau lumineux λ_R

$AC = AB \sin \theta = n \lambda_0$

$\rightarrow \sin \theta = n \frac{\lambda_0}{AB} = n \frac{\lambda_0}{\lambda_R} = n \frac{\hbar k}{P_0}$

$P_z = P_0 \sin \theta = n \hbar k$

Changement de périodicité du (21) réseau quand on sort de résonance



A résonance, les 2 potentiels lumineux sont $\pm \frac{\hbar}{2} \omega_1(z) = \pm \hbar \omega_1 \cos k z$
Période λ_R

Hors résonance ($\omega \neq \omega_0$), ces 2 potentiels sont
 $\pm \frac{\hbar}{2} \Omega(z) = \pm \frac{\hbar}{2} [4\omega_1^2 \cos^2 k z + (\omega_0 - \omega)^2]^{1/2}$

La période passe de λ_R à $\lambda_R/2$.

Interprétation du fait qu'on a surtout les impulsions paires à la sortie

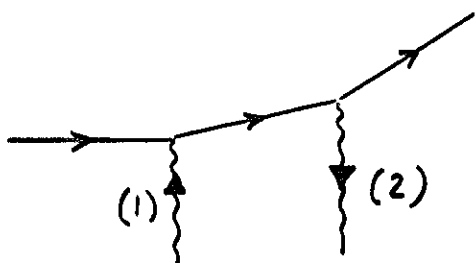
Interprétation corpusculaire (23)

Effet Compton stimulé

Diffusion Compton d'un photon du mode non vide (1) vers le mode non vide (2)

Amplitude proportionnelle à $\sqrt{n_1(n_2+1)}$. Section efficace proportionnelle à $n_1(n_2+1)$
(Pour l'effet Compton spontané, on aurait n_1)

Représentation diagrammatique



Effet Kapitza-Dirac (22)

Electron libre traversant une onde lumineuse stationnaire

Diffraction de Bragg de l'onde de Broglie électronique par le potentiel associé à l'onde lumineuse

Ce potentiel n'est autre que l'énergie cinétique de vibration de l'électron dans l'onde lumineuse (voir II-20). Comme l'énergie de vibration est quadratique en champ [$v \cos^2 k z = (1 + \cos 2k z)/2$], la période du potentiel est $\lambda_R/2$ et le transfert d'impulsion est un multiple de $2\hbar k$

En fait, le potentiel est très petit, et, seul, le transfert $\pm 2\hbar k$ est appréciable

Quelques références

Théorie

R. J. COOK, A. F. BERNHARDT
Phys. Rev. A 18, 2533 (1978)

A. F. BERNHARDT, B. W. SHORE
Phys. Rev. A 23, 1290 (1981)

E. ARIMONDO, A. BAMBINI, S. STENHOLM
Phys. Rev. A 24, 898 (1981)

C. TANGUY Thèse 3^{ème} cycle Paris 1981

Expérience

Séminaire de D. PRITCHARD
au Collège de France (8/3/83)

Effet Kapitza-Dirac avec des électrons

P. L. KAPITZA, P. A. M. DIRAC
Proc. Camb. Phil. Soc. 29, 297 (1933)