

G - Dépendance en vitesse des forces radiatives

- 1 - Introduction (T.1 → 4)
- 2 - Atome en mouvement dans une onde plane
Calcul de la force - Effet Doppler (T.5 → 7)
- 3 - Atome en mouvement dans une onde stationnaire
 - a) Notations - Analogies avec un problème de résonance magnétique (T.8 → 10)
 - b) Discussion qualitative basée sur cette analogie
 - Vitesse faible - Approximation adiabatique (T.11)
 - Vitesse élevée - Résonances à 1 ou plusieurs photons (T.12 → 16)
 - c) Traitement quantitatif
 - Développement en série de Fourier du vecteur de Bloch et de la force - Relations de récurrence (T.17 → 19)
 - Résolution perturbative des relations de récurrence (T.20 → 22)
 - Méthode des fractions continues (T.23 → 26)
 - d) Résultats du calcul et discussion (Page V-8)

Buts du § G

(1)

- Etudier la dépendance en vitesse des forces radiatives dans 2 cas importants
 - Onde plane
 - Onde stationnaire
- Interpréter les résultats en termes d'effet Doppler
Suivant sa vitesse, l'atome est plus ou moins en résonance avec l'onde, et la force est plus ou moins grande.
- Processus multiphotoniques résonnants quand plusieurs modes sont non vides et subissent des déplacements Doppler différents (Cas de l'onde stationnaire)
→ Forces "mixtes" d'un type nouveau

Vitesse initiale \vec{v}_0

(2)

- L'atome est supposé maintenant avoir une vitesse initiale $\vec{v}_0 = \frac{\vec{p}_0}{m}$ non nulle
- On néglige la variation de vitesse Δv_0 due aux forces radiatives pendant la durée de vie τ de e . Ceci est possible si (voir IV-27)
 $\hbar\Gamma \gg E_{\text{recul}}$
- Dans les équations de Bloch, la position \vec{R} de l'atome est donc considérée comme une fonction linéaire de t

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{v}_0 t$$

Principe du calcul

(3)

- Résolution des équations de Bloch pour un temps t d'interaction tel que $\tau \ll t \ll T_{ext}$

$$\frac{1}{\Gamma} \ll t \ll \frac{\hbar}{E_{excit}}$$

↳ $u(\vec{R}, \vec{v}_0, t), v(\vec{R}, \vec{v}_0, t), w(\vec{R}, \vec{v}_0, t)$

- A partir de u, v et de $\vec{\nabla} E_0(\vec{R}), \vec{\nabla} \phi(\vec{R})$, calcul de la force $\vec{F}(\vec{R}, \vec{v}_0, t)$

dépendant à la fois de la position \vec{R} de l'atome à l'instant t et de sa vitesse $\vec{v}_0 = \dot{\vec{R}}$

- Evolution ultérieure de \vec{R}

Donnée par

$$M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}(\vec{R}, \dot{\vec{R}}, t)$$

Onde monochromatique (4)

$$E(\vec{r}, t) = E_0(\vec{r}) \cos[\omega t + \phi(\vec{r})]$$

L'amplitude E_0 et la phase ϕ ne dépendent pas de t

Dans les équations de Bloch les grandeurs relatives au champ sont évaluées en

$$\vec{r} = \vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{v}_0 t$$

Par exemple

$$\omega_1(\vec{R}) = -d E_0(\vec{R}) / \hbar$$

Dépendance implicite de t via \vec{R}

$$\dot{\omega}_1(t) = -\frac{d}{\hbar} \vec{\nabla} E_0(\vec{R}) \cdot \dot{\vec{R}}$$

$$= \omega_1(t) \frac{\vec{\nabla} E_0(\vec{R})}{E_0(\vec{R})} \cdot \vec{v}_0$$

De même

$$\dot{\phi}(t) = \vec{\nabla} \phi(\vec{R}) \cdot \vec{v}_0$$

Onde plane $E_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ (5)

Cas le plus simple possible

$\omega_1 = -d E_0 / \hbar$ et $\vec{\nabla} \phi = -\vec{k}$ sont indépendants de \vec{r} et t

$$\dot{\phi} = (\vec{\nabla} \phi) \cdot \dot{\vec{R}} = -\vec{k} \cdot \vec{v}_0$$

On posera

$$\Delta = \vec{k} \cdot \vec{v}_0$$

Δ aussi ne dépend pas de \vec{r} et t

Equations de Bloch

$$\begin{cases} \dot{u} = (\delta - \Delta) v - \Gamma u / 2 \\ \dot{v} = -(\delta - \Delta) u - \omega_1 v - \Gamma v / 2 \\ \dot{w} = \omega_1 v - \Gamma (\frac{1}{2} + w) \end{cases}$$

Comme dans F, système différentiel linéaire à coefficients constants (et de plus indépendants de \vec{R})

Seule différence

$$\delta \rightarrow \delta - \Delta = \delta - \vec{k} \cdot \vec{v}_0$$

Force $\vec{F} = \text{D quadr. } E_0 \vec{\nabla} \phi$ (6)

$$\vec{F} = d v(t) E_0(-\vec{k}) = \hbar \vec{k} \omega_1 v(t)$$

Valeur stationnaire

Identique à celle donnée en IV-8 avec $\delta \rightarrow \delta - \Delta$

$$\vec{F} = \hbar \vec{k} \frac{\omega_1^2}{2} \frac{\frac{\Gamma}{2}}{(\omega - \omega_0 - \Delta)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + \frac{\omega_1^2}{2}}$$

Seul effet physique lié à la vitesse \vec{v}_0 : la fréquence ω de l'onde plane est remplacé par la fréquence apparente $\omega - \Delta = \omega - \vec{k} \cdot \vec{v}_0$

décalé par effet Doppler

La force \vec{F} , qui dépend de l'écart à résonance, dépend donc de \vec{v}_0 (mais non de \vec{R})

Onde stationnaire (8)

Superposition d'ondes planes (7)

Problème plus difficile car il est en général incorrect d'ajouter indépendamment les forces associées aux diverses ondes planes (et tenant compte des effets Doppler pour chaque onde)

Importance des relations de phase entre les diverses ondes
 Redistribution cohérente

Les forces radiatives dépendent à la fois de \vec{V}_0 et de \vec{R}

Apparition de processus nouveaux faisant intervenir à la fois redistribution et diffusion

- 2 ondes planes de même fréquence ω , de même amplitude e_0 , se propageant en sens inverse le long de Oz \rightarrow Onde résultante

$$E(z, t) = E_0(z) \cos \omega t$$

$$E_0(z) = 2 e_0 \cos kz$$

- Fréquence de Rabi pour chacune des 2 ondes planes

$$\omega_1 = -d e_0 / \hbar$$

- Fréquence de Rabi (dépendant de z) pour l'onde stationnaire

$$\omega_1(z) = -d E_0(z) / \hbar = 2 \omega_1 \cos kz$$

- On a introduit ω_1 pour pouvoir comparer les effets de l'onde stationnaire à la somme des effets des 2 ondes planes

Atome en mouvement

$$z \rightarrow Z = z_0 + v_0 t$$

Z : coordonnée du centre du paquet d'ondes

Equations de Bloch

$$\begin{cases} \dot{u} = \delta v - \Gamma u / 2 \\ \dot{v} = -\delta u - 2 \omega_1 \cos kZ w - \Gamma v / 2 \\ \dot{w} = 2 \omega_1 \cos kZ v - \Gamma (\frac{1}{2} + w) \end{cases}$$

Comme $Z = z_0 + v_0 t$, système différentiel linéaire à coefficients périodiques en t, de période $\frac{2\pi}{\Delta}$

\hookrightarrow Il existe une solution périodique, en régime forcé (si $t \gg \Gamma^{-1}$), de période $2\pi / \Delta$

On ne s'intéresse pas au régime transitoire ($0 < t < \Gamma^{-1}$)

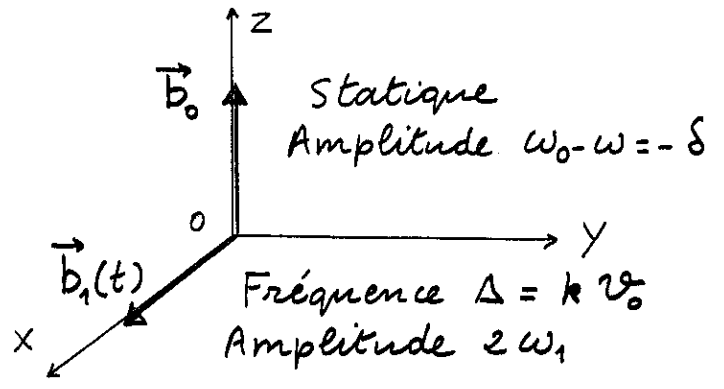
(9) Problème équivalent pour le spin fictif (10)

Dans le référentiel tournant OXYZ, le spin fictif est soumis

- à un champ $\vec{b}_0 \parallel \vec{a} \text{ Oz}$ d'amplitude $\omega_0 - \omega = -\delta$

- à un champ oscillant $\vec{b}_1(t) \parallel \vec{a} \text{ Ox}$, de fréquence Δ

$$b_1(t) = 2 \omega_1 \cos k(z_0 + v_0 t) = 2 \omega_1 \cos(kz_0 + \Delta t)$$



Analogie étroite avec un problème de résonance magnétique

Discussion qualitative (11)

V-4

Vitesse nulle $v_0 = 0 \rightarrow \Delta = 0$

Champ \vec{B}_1 statique

↳ Solution stationnaire des E.B.O.

↳ Force \vec{F} calculé au § F pour un atome immobile en \mathcal{L}_0

Vitesse faible $|\Delta| \ll \Gamma$

Champ $\vec{B}_1(t)$ variant très lentement (période $2\pi/\Delta$ longue devant le temps de relaxation Γ^{-1})

En 1^{ère} approximation, le spin suit adiabaticquement le mouvement de $\vec{B}_1(t) \rightarrow$ Force \vec{F} calculé comme si l'atome était "figé" en $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + v_0 t$ à chaque instant t

1^{ère} correction à l'approximation adiabatique: en $\frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{k v_0}{\Gamma}$

↳ Forces linéaires en v_0 (voir § G.4)

Amortissement ou accélération?

Résonances d'ordre supérieur (13)

Bien connues en résonance magnétique (transitions à plusieurs quanta)

Le champ de radiofréquence polarisé linéairement le long de OX est la superposition de 2 champs tournants droit et gauche, auxquels sont associés des photons de radiofréquence σ^+ et σ^- (de moment cinétique $J_z = +\hbar$ ou $-\hbar$)

Le spin peut passer de $-1/2$ à $+1/2$ en absorbant plusieurs photons de 2 types avec conservation simultanée de l'énergie et du moment cinétique

Remarque: ici pas d'approximation du champ tournant car ω_1 n'est pas négligeable devant $\omega_0 - \omega$

Vitesses élevées $|\Delta| \gg \Gamma$ (12)

Le champ $\vec{B}_1(t)$ varie trop vite pour que le spin puisse suivre adiabaticquement.

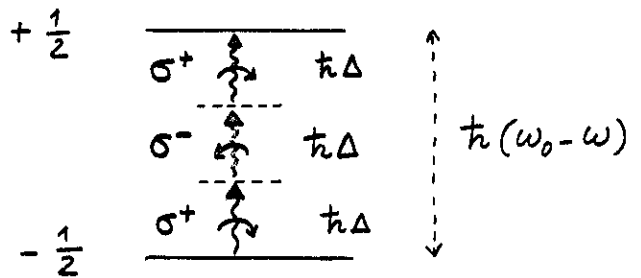
L'analogie avec un problème de résonance magnétique permet de prévoir que des effets résonnants se produiront si $\pm \Delta$ coïncide avec la fréquence de Larmor $\omega_0 - \omega$ dans b_0 .

$$\Delta = \omega - \omega_0 \rightarrow \omega_0 = \omega - k v_0$$

$$-\Delta = \omega - \omega_0 \rightarrow \omega_0 = \omega + k v_0$$

Interprétation: Résonance quand la vitesse de l'atome lui permet, par effet Doppler, d'entrer en résonance avec l'une ou l'autre des 2 ondes planes formant l'onde stationnaire

Résonance à 3 photons (14)



Si $\Delta = (\omega_0 - \omega)/3$, l'absorption de 2 photons σ^+ et d'1 photon σ^- , d'énergie $\hbar\Delta$, donne au spin l'énergie et le moment cinétique nécessaires pour passer de $-1/2$ à $+1/2$.

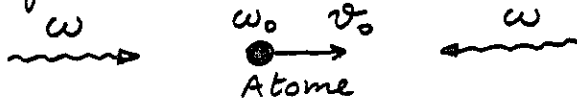
Plus généralement, résonance à un nombre impair de photons $n+1$ photons σ^+ , n photons σ^- quand $\Delta = (\omega_0 - \omega)/(2n+1)$

Quanta $\hbar\Delta$ appelés parfois "Dopplerons"

Ref: KYRÖLÄ, STENHOLM Opt. Comm. 22, 123 (1977)

Interprétation en termes de photons optiques (dans l'espace réel) (15)

Référentiel du labo



Référentiel au repos de l'atome



L'atome "voit" 2 ondes de fréquences différentes

Il peut passer de f à e en absorbant n+1 photons $\omega + \Delta$ et en émettant de manière stimulée n photons $\omega - \Delta$

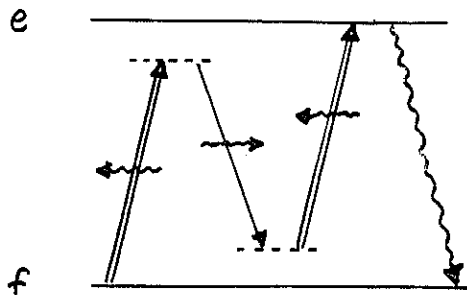
Résonance si

$$(n+1)(\omega + \Delta) - n(\omega - \Delta) = \omega_0$$

c-à-d si $\omega_0 - \omega = (2n+1)\Delta$

Impulsion acquise: $-(2n+1)\hbar\vec{k}$

Résonance à 3 photons optiques (16)



Flèches doubles : photons $\omega + \Delta$
 Flèches simples : " $\omega - \Delta$
 Flèches ondulées : photons spontanés

- Processus d'ordre supérieur faisant intervenir à la fois

- une redistribution entre les 2 ondes planes (un photon passe du mode \leftarrow au mode \rightarrow)
- une diffusion d'un photon \leftarrow vers un mode vide

↳ Force de type "mixte"

Traitement quantitatif (17)

- Retour aux équations de Bloch (V.9)

La solution en régime forcé, périodique en t, de période $2\pi/\Delta$, peut être aussi considérée comme périodique en z, de période $2\pi/k$ (car z est relié linéairement à t)

- Développement de u, v, w en série de Fourier de z

$$u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n e^{in k z}$$

+ Formules analogues pour v, w

Conditions de réalité

$$u_n = u_{-n}^*$$

- En régime forcé (une fois le régime transitoire amorti)

$$\dot{u} = \frac{du}{dz} \dot{z} = \frac{du}{dz} v_0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} in \Delta u_n e^{in k z}$$

Relations de récurrence (18)

Les développements de Fourier insérés dans les E.B.O. donnent

$$\begin{cases} (in\Delta + \frac{\Gamma}{2}) u_n = \delta v_n \\ (in\Delta + \frac{\Gamma}{2}) v_n = -\delta u_n + \omega_1(w_{n-1} + w_{n+1}) \\ (in\Delta + \Gamma) w_n = \omega_1(v_{n-1} + v_{n+1}) - \frac{\Gamma}{2} \delta_{n0} \end{cases}$$

1^{ère} équation $\rightarrow u_n = \frac{\delta}{in\Delta + \frac{\Gamma}{2}} v_n$

Les 2 autres deviennent

$$\begin{cases} D(n) v_n = -\omega_1(w_{n-1} + w_{n+1}) \\ E(n) w_n = \omega_1(v_{n-1} + v_{n+1}) - \frac{\Gamma}{2} \delta_{n0} \end{cases}$$

avec $E(n) = in\Delta + \Gamma$

$$D(n) = \frac{(in\Delta + \frac{\Gamma}{2})^2 + \delta^2}{in\Delta + \frac{\Gamma}{2}}$$

Si $|\Delta| \gg \Gamma$

$$D(n) \approx \frac{(\delta - n\Delta + i\frac{\Gamma}{2})(\delta + n\Delta - i\frac{\Gamma}{2})}{in\Delta}$$

Passé par un minimum pour $\delta = \pm n\Delta$

Développement de Fourier de \mathcal{F} (19)

$$\mathcal{F} = \underbrace{D_{\text{phase}}}_{d u(z)} \underbrace{\frac{d}{dz} E_0(z)}_{-2e_0 k \sin kz}$$

$$\mathcal{F}(z) = 2\hbar k \omega_1 u(z) \sin kz$$

$$u(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n e^{in kz}$$

$$\mathcal{F}(z) = \mathcal{F}_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \{ \mathcal{F}_n^c \cos nkz + \mathcal{F}_n^s \sin nkz \}$$

$$\mathcal{F}_0 = 2\hbar k \omega_1 \text{Im}(u_{-1} - u_1)$$

\mathcal{F}_0 est la moyenne spatiale de $\mathcal{F}(z)$

$$\mathcal{F}_n^c = 2\hbar k \omega_1 \text{Im}(u_{n-1} - u_{n+1})$$

$$\mathcal{F}_n^s = 2\hbar k \omega_1 \text{Re}(u_{n-1} - u_{n+1})$$

$\mathcal{F}_2^s \sin 2kz$ a la même dépendance en z que le gradient d'intensité, c-à-d que la force dipolaire pour un atome de vitesse nulle

Seule \mathcal{F}_2^s a une limite non nulle quand $v_0 \rightarrow 0$

Résolution perturbative (20)

Développement en puissances de ω_1

$$v_n = \sum_{p=0}^{\infty} v_n^{(p)} \omega_1^p \quad w_n = \sum_{p=0}^{\infty} w_n^{(p)} \omega_1^p$$

Les relations de récurrence deviennent

$$\begin{cases} D(n) v_n^{(p)} = - [w_{n-1}^{(p-1)} + w_{n+1}^{(p-1)}] \\ E(n) w_n^{(p)} = [v_{n-1}^{(p-1)} + v_{n+1}^{(p-1)}] - \frac{\Gamma}{2} \delta_{n0} \delta_{p0} \end{cases}$$

- A l'ordre $p=0$ en ω_1 seul est $\neq 0$
 $w_0^{(0)} = -\Gamma/2$

- A l'ordre $p=1$ en ω_1 seuls sont $\neq 0$
 $v_{\pm 1}^{(1)}$ (et par suite $u_{\pm 1}^{(1)}$)

$D(1)$ et $D(-1)$ au dénominateur
 \hookrightarrow résonances en $\delta = \omega - \omega_0 = \pm \Delta$

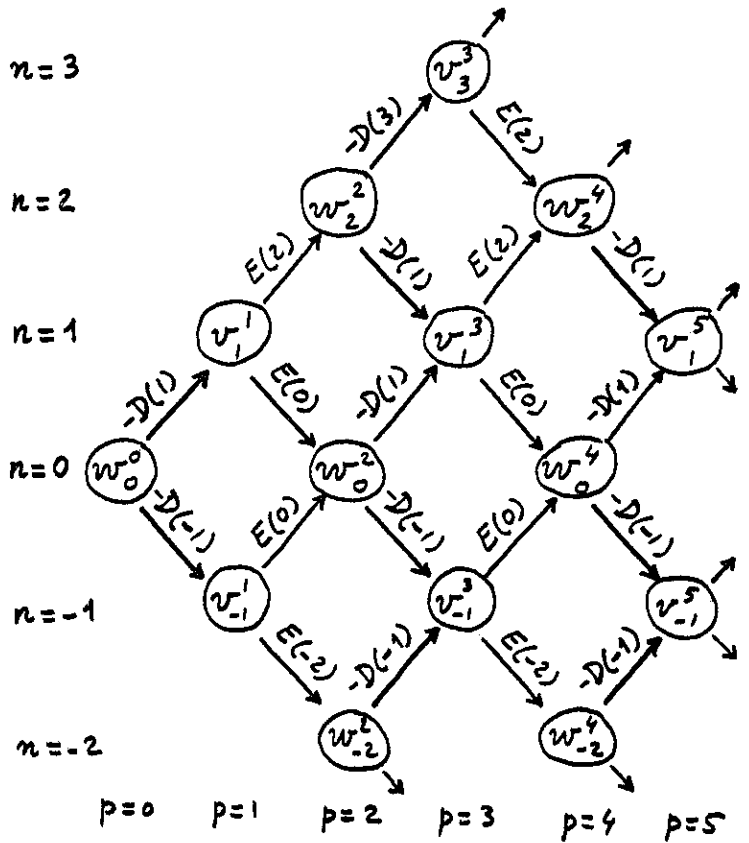
- A l'ordre $p=2$: $w_0^{(2)}$ et $w_{\pm 2}^{(2)}$

- A l'ordre $p=3$: $v_{\pm 1}^{(3)}$ et $v_{\pm 3}^{(3)}$

$D(3)$ et $D(-3)$ apparaissent pour $v_{\pm 3}^{(3)}$

\hookrightarrow Résonances en $\delta = \omega - \omega_0 = \pm 3\Delta$

Structure de la solution (21)



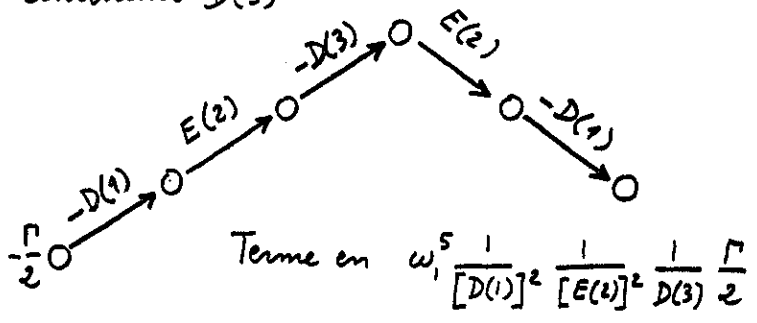
Pour w : n est pair
 Pour v (et u) : n est impair
 Dans \mathcal{F} : seulement harmoniques pairs

Exemple de calcul (22)

$\mathcal{F}_0 = 2\hbar k \omega_1 \text{Im}(u_{-1} - u_1)$
 dépend de $u_{\pm 1}$, donc de $v_{\pm 1}$

A quel ordre p en ω_1 voit on apparaître $D(3)$ pour la 1^{ère} fois dans v_1 , et donc la résonance à 3 photons $\omega - \omega_0 = \pm 3\Delta$ dans \mathcal{F}_0 ?

D'après la figure de (V-21), à l'ordre 5 en ω_1 . Un seul "chemin" conduit alors de $w_0^{(0)} = -\Gamma/2$ à $v_1^{(5)}$ en contenant $D(3)$



Terme en $\omega_1^5 \frac{1}{[D(1)]^2} \frac{1}{[E(2)]^2} \frac{1}{D(3)} \frac{\Gamma}{2}$

La force contient $\hbar k \omega_1$ en plus
 \hookrightarrow Varie en $\omega_1^6 \sim (\text{Intensité})^3$

Méthode des fractions continues (23)

Posons $f_n = \begin{cases} w_n & \text{si } n \text{ est pair} \\ v_n & \text{impair} \end{cases}$

$C(n) = \begin{cases} 1/E(n) & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1/D(n) & \text{impair} \end{cases}$

Les relations de récurrence (V-18) peuvent être condensées en

$$f_n/C(n) = \omega_1 (f_{n-1} + f_{n+1}) - (\Gamma/2) \delta_{n0}$$

Pour $n \neq 0$, équation "homogène"

$$\frac{1}{\omega_1 C(n)} = \frac{f_{n-1}}{f_n} + \frac{f_{n+1}}{f_n}$$

Supposons $n \geq 1$ et posons $g_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$

$$\frac{1}{\omega_1 C(n)} = \frac{1}{g_{n-1}} + g_n$$

$$\frac{1}{g_{n-1}} = \frac{1 - \omega_1 C(n) g_n}{\omega_1 C(n)}$$

$$\rightarrow \boxed{g_{n-1} = \frac{\omega_1 C(n)}{1 - \omega_1 C(n) g_n}}$$

Expression de f_0 Comme $C(0) = \frac{1}{\Gamma}$ (25)

$$f_0 = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \omega_1 C(0) 2 \operatorname{Re} g_0} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \Sigma}$$

$$\Sigma = 2 \operatorname{Re} \frac{\omega_1^2 C(0) C(1)}{1 - \frac{\omega_1^2 C(1) C(2)}{1 - \frac{\omega_1^2 C(2) C(3)}{1 - \dots}}}$$

Calcul de n'importe quel f_n

Par exemple f_2

$$f_2 = \frac{f_2}{f_1} \frac{f_1}{f_0} f_0 = g_1 g_0 f_0$$

$$\begin{array}{ccc} \swarrow & & \searrow \\ \frac{\omega_1 C(2)}{1 - \frac{\omega_1^2 C(2) C(3)}{1 - \frac{\omega_1^2 C(3) C(4)}{1 - \dots}}} & & \frac{\omega_1 C(1)}{1 - \frac{\omega_1^2 C(1) C(2)}{1 - \frac{\omega_1^2 C(2) C(3)}{1 - \dots}}} \end{array} f_0$$

Pour $n < 0$ $f_{-n} = f_n^*$

On peut ainsi calculer tous les f_n , donc tous les w_{2n} v_{2n+1} u_{2n+1} et donc tous les coefficients de Fourier de \mathcal{F}

V-7

Calcul de $g_0 = \frac{f_1}{f_0} = \frac{v_1}{w_0}$ (24)

$$g_0 = \frac{\omega_1 C(1)}{1 - \omega_1 C(1) g_1} = \frac{\omega_1 C(1)}{1 - \frac{\omega_1^2 C(1) C(2)}{1 - \omega_1 C(2) g_2}}$$

$$= \frac{\omega_1 C(1)}{1 - \frac{\omega_1^2 C(1) C(2)}{1 - \frac{\omega_1^2 C(2) C(3)}{1 - \frac{\omega_1^2 C(3) C(4)}{1 - \dots}}}}$$

"Fraction continue" donnant $\frac{f_1}{f_0}$

Conditions de réalité

$$f_1 = f_{-1}^* \quad f_0 = f_0^*$$

Pour $n=0$, équation "inhomogène"

$$f_0/C(0) = \omega_1 (f_{-1} + f_1) - \Gamma/2$$

$$f_1 + f_{-1} = 2 \operatorname{Re} f_1 = 2 \operatorname{Re} f_0 g_0 = 2 f_0 \operatorname{Re} g_0$$

Comme on a calculé g_0 , l'équation inhomogène donne f_0

Avantages de la méthode des fractions continues (26)

- Très bien adapté au calcul sur ordinateur
- Si l'on arrête la fraction continue à un certain stade, on obtient un quotient de 2 polynômes beaucoup plus proche de la solution exacte qu'un développement perturbatif
- Méthode très générale, applicable en résonance magnétique, en théorie du laser ...

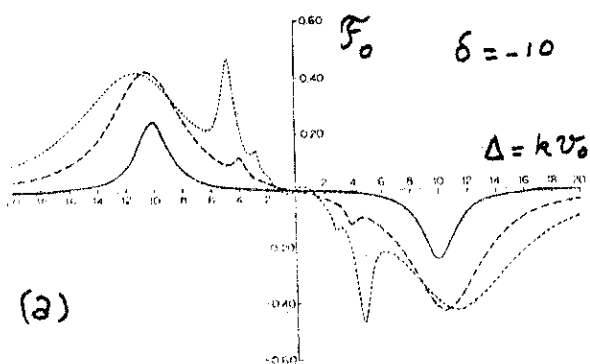
Référence pour le problème de ce §

MINOGIN, SERIMAA

Optics. Comm. 30, 373 (1979)

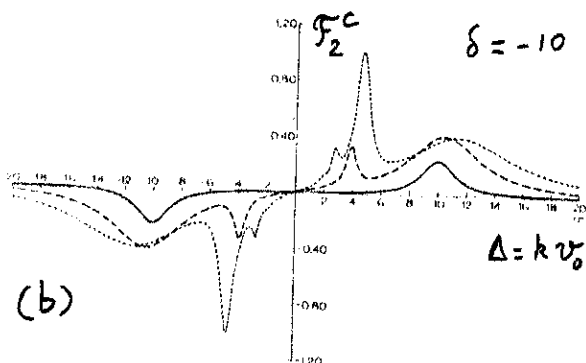
Résultats du calcul utilisant la méthode des fractions continues (référence MINOGIN, SERIMAN - les figures sont extraites de cette référence) V-8

- En abscisses $\Delta = k\nu_0$ (l'unité est $\pi/2$)
- En ordonnées F_0 pour la figure a, F_2^C pour b, F_2^S pour c
- Toutes les courbes correspondent à $\delta = -10$ (toujours en unités $\pi/2$)
- L'intensité croît de la courbe en trait plein, à la courbe en tiretés, puis en pointillés



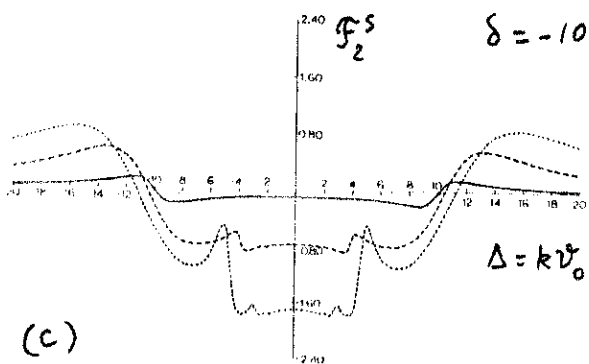
(a)

- A basse intensité, on voit bien une résonance pour $\Delta = \pm \delta = \pm 10$ sur F_0 .
- Puis à plus forte intensité, on voit apparaître la résonance à 3 photons en $\Delta = \pm \delta/3 = \pm 3,3$ puis la résonance à 5 photons en $\Delta = \pm \delta/5 = \pm 2$
- Noter le changement de signe de la pente à l'origine à fortes intensités.



(b)

F_2^C a un comportement très analogue à F_0



(c)

F_2^S est la seule composante de Fourier à n'être pas nulle en $\nu_0 = 0$

les résonances à 1 ou plusieurs photons apparaissent avec une forme de dispersion