

## Introduction à la fin de la 1<sup>ère</sup> partie du cours

Le traitement présenté dans les 3 premiers paragraphes A, B, C, de cette 1<sup>ère</sup> partie est entièrement classique, et repose sur le calcul de la force de Lorentz séculaire exercée par une onde monochromatique sur un dipôle classique. En particulier, l'exemple de l'électron libre étudié en C ne fait appel à aucun concept quantique.

La fin de la 1<sup>ère</sup> partie est consacrée à l'étude des forces radiatives s'exerçant sur un atome neutre à 2 niveaux. Il s'agit là d'un système quantique qui n'a pas de limite classique. Peut-on dans ce cas continuer à utiliser l'expression de la force classique du § A, même si l'on ne s'intéresse, comme dans cette 1<sup>ère</sup> partie, qu'à la valeur moyenne de la force?

C'est pourquoi il a semblé utile, dans le § D qui suit, d'établir l'expression de la force moyenne en partant des équations de Heisenberg décrivant le mouvement du centre de masse de l'atome et en en prenant la valeur moyenne (Théorème d'Ehrenfest). On pourra ainsi déterminer dans quelles conditions l'expression classique du § A peut continuer à être utilisée. Les équations du mouvement du dipôle moyen seront également établies (Equations de Bloch optiques).

Les paragraphes suivants seront consacrés à une interprétation géométrique des résultats obtenus ainsi qu'au calcul et à l'interprétation des forces radiatives s'exerçant sur un atome neutre à 2 niveaux, initialement immobile ou en mouvement (forces dépendant de la vitesse).

## D) Atome neutre à 2 niveaux dans une onde lumineuse résonnante

### Théorème d'Ehrenfest et Equations de Bloch optiques

- 1 - Introduction      Transparent T 1
- 2 - Hamiltonien      (T 2 → 4)  
Hamiltonien atomique, d'interaction, total.
- 3 - Evolution du centre de masse (Théorème d'Ehrenfest)
  - Equations de Heisenberg pour la position et l'impulsion du centre de masse. (T 5)
  - Equations d'évolution des valeurs moyennes. Difficultés du calcul de la force moyenne (T 6).
  - Approximations conduisant à l'expression classique (T 7 → 12)
  - Conclusions sur la force radiative moyenne (T 13)
- 4 - Evolution des variables internes (Equations de Bloch optiques)
  - Champ agissant sur l'atome      T 14 → 15
  - Modèle simple d'atome - Approximation du champ tournant T 16 → 18
  - Matrice densité interne - Relaxation radiative T 19 → 20
  - Equations d'évolution de la matrice densité interne T 21 → 25
- 5 - Récapitulation générale      T 26 → 27

## Buts du § D (2)

- Etablir à partir du théorème d'Ehrenfest l'expression de la force radiative moyenne exercée par une onde lumineuse sur un atome neutre

Justifier ainsi le résultat purement classique du § A, préciser ses conditions de validité, et le généraliser (ondes non monochromatiques, vitesses de translation non nulles...)

- Etablir les équations d'évolution du dipole atomique dans le cas d'un atome à 2 niveaux (Equations de Bloch optiques)

## Hamiltonien d'interaction (3) avec le champ incident $V(t)$

### Approximation dipolaire électrique

$$V(t) = -\vec{D} \cdot \vec{E}(\vec{R}, t)$$

Interaction du dipole  $\vec{D}$  avec le champ électrique de l'onde incidente, évalué à la position  $\vec{R}$  du centre de masse

Termes négligés (dipolaire magnétique, quadrupolaire électrique...) plus petits par un facteur  $a_0/\lambda$

Le champ incident est traité classiquement, de sorte que  $V(t)$  est un opérateur purement atomique, dépendant des opérateurs "interne"  $\vec{D}$  et "externe"  $\vec{R}$

## Hamiltonien atomique $H_A$ (2) (en l'absence de champ)

### 2 types d'opérateurs atomiques

- Variables du centre de masse  
Degrés de liberté externes ou de translation

$\vec{R}$  : position du centre de masse  
 $\vec{P}$  : impulsion " " "

- Variables internes (dans le système du centre de masse)

Par exemple, l'opérateur dipole  $\vec{D} = \sum_i q_i (\vec{r}_i - \vec{R}) = \sum_i q_i \vec{r}_i$  (car  $\sum_i q_i = 0$ )

### Hamiltonien $H_A$

$$H_A = \frac{\vec{P}^2}{2M} + h_A$$

$\frac{\vec{P}^2}{2M}$  Energie cinétique de translation (M: masse totale de l'atome)

$h_A$  Hamiltonien interne (Niveaux d'énergie électroniques)

## Hamiltonien total H (4)

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2M} + h_A - \vec{D} \cdot \vec{E}(\vec{R}, t)$$

Que manque-t-il ?

- Termes suivants du développement multipolaire ( $a_0/\lambda$ )
- Corrections relativistes ( $v/c$ )
- Hamiltonien du champ quantique et interaction de l'atome avec le champ quantique, en particulier le champ du vide

Importance pour l'émission spontanée (voir cours ultérieurs)

Ici, l'émission spontanée sera décrite phénoménologiquement par des termes d'amortissement dans les équations d'évolution du dipole moyen  $\langle \vec{D} \rangle$

Evolution du centre de masse (5)Point de vue de Heisenberg

- Instant initial  $t_0 = 0$   
Etat du système :  $|\psi\rangle$   
Observables :  $\vec{R}, \vec{P}, \vec{D}, \dots$
- Instant ultérieur  $t$   
 $|\psi\rangle$  reste fixe. Les observables  $G$  évoluent conformément à  
 $i\hbar \dot{G}(t) = [G(t), H(t)]$

Equations d'évolution de  $\vec{R}$  et  $\vec{P}$ 

$$\dot{\vec{R}}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\vec{R}(t), H(t)] = \vec{\nabla}_{\vec{P}} H(t) = \frac{\vec{P}(t)}{M}$$

$$\dot{\vec{P}}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\vec{P}(t), H(t)] = -\vec{\nabla}_{\vec{R}} H(t)$$

$$M\ddot{\vec{R}}_i(t) = \sum_j D_j(t) \frac{\partial}{\partial R_i(t)} E_j(\vec{R}(t), t) = F_i(t)$$

Grande ressemblance entre l'opérateur force  $F_i(t)$  et la force séculaire classique  $F_i(t)$  du § A.

Hypothèse sur la durée  $t$  (7) de l'interaction

- On suppose  $t$  suffisamment voisin de l'instant initial 0 pour qu'on puisse écrire

$$\vec{R}(t) \approx \vec{R}(0) + \frac{\vec{P}(0)}{M} t = \vec{R} + \frac{\vec{P}}{M} t \quad (1)$$

Entre 0 et  $t$ , l'atome se déplace avec sa vitesse initiale  $\vec{P}/M$ .

La variation de vitesse due aux forces radiatives entre 0 et  $t$  est donc supposé négligeable (les conditions de validité de (1) seront précisées ultérieurement)

- Si la condition (1) est remplie,  $\vec{R}(t)$  reste un opérateur n'agissant que sur la partie externe de  $|\psi\rangle$  (supposé factorisé), car  $\vec{R}(t)$  ne dépend alors que de  $\vec{R}$  et  $\vec{P}$ .

Equations d'évolution des valeurs (6) moyennes (Théorème d'Ehrenfest)

$$\langle \psi | \vec{R}(t) | \psi \rangle = \vec{R}(t)$$

$$M \dot{\langle \vec{R}_i(t) \rangle} = \sum_j \langle \psi | D_j(t) \frac{\partial}{\partial R_i(t)} E_j(\vec{R}(t), t) | \psi \rangle$$

2 difficultés

1 - La moyenne du produit d'opérateurs du 2<sup>ème</sup> membre n'est pas en général égale au produit des moyennes (corrélations entre variables externes et internes)

Même si l'état initial  $|\psi\rangle$  est factorisé (en une partie externe et interne),  $\vec{R}(t)$  agit sur ces 2 types de degrés de liberté de  $|\psi\rangle$  (si  $t$  est suffisamment grand)

2 - Même si l'élément de matrice est factorisé, on a en général  $\langle \psi | E(\vec{R}, t) | \psi \rangle \neq E(\langle \vec{R} \rangle, t)$

Développement en ondes planes (8) du champ  $E(\vec{R}(t), t)$ 

Apparaissent dans ce développement des termes de la forme  $e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}(t)} \approx e^{i\vec{k} \cdot (\vec{R} + \frac{\vec{P}}{M} t)}$

si la condition (1) est remplie

Nous allons chercher maintenant à quelles conditions doit satisfaire l'état initial  $|\psi\rangle$

pour qu'on puisse écrire  $\underbrace{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{R} + \frac{\vec{P}}{M} t)}}_{\text{Opérateur}} |\psi\rangle \approx \underbrace{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{R} + \frac{\vec{P}}{M} t)}}_{\text{Nombre}} |\psi\rangle$

avec  $\vec{R} = \langle \psi | \vec{R} | \psi \rangle$   $\vec{P} = \langle \psi | \vec{P} | \psi \rangle$

c'est à dire encore  $e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}(t)} |\psi\rangle \approx e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}(t)} |\psi\rangle$

$E(\vec{R}(t), t) |\psi\rangle \approx E(\vec{R}(t), t) |\psi\rangle$   
avec  $\vec{R}(t) \approx \vec{R} + \frac{\vec{P}}{M} t$

Hypothèses sur l'état initial  $|\psi\rangle$  (9)

- Factorisé
- Le paquet d'ondes associé à  $|\psi\rangle$  est centré sur  $\vec{R} = \langle \psi | \vec{R} | \psi \rangle$  avec une largeur  $\Delta R$  très petite devant la longueur d'onde lumineuse  $\Delta R \ll \lambda \iff \boxed{k \Delta R \ll 1}$  (2)

- Dans l'espace des impulsions, ce paquet d'ondes est centré en  $\vec{P} = \langle \psi | \vec{P} | \psi \rangle$  et a une largeur  $\Delta P \approx \hbar / \Delta R$ .

$t$  est supposé suffisamment petit pour que

$$\boxed{k \Delta P t / M \approx \hbar k t / M \Delta R \ll 1} \quad (3)$$

- De (2) et (3) on déduit alors  $e^{i\vec{k} \cdot (\vec{R} + \frac{\vec{P}}{M} t)} |\psi\rangle \approx e^{i\vec{k} \cdot (\vec{R} + \frac{\vec{P}}{M} t)} |\psi\rangle$

Expression de la force moyenne (11)

$$M \ddot{\vec{R}}_i(t) = \sum_j \langle \psi | D_j(t) \frac{\partial}{\partial R_i(t)} \underbrace{E_j(\vec{R}(t), t)}_{\partial_i E_j(\vec{R}(t), t)} | \psi \rangle$$

$$= \sum_j \underbrace{\langle \psi | D_j(t) | \psi \rangle}_{D_j(t)} \partial_i E_j(\vec{R}(t), t)$$

$$M \ddot{\vec{R}}_i(t) = \sum_j D_j(t) \partial_i E_j(\vec{R}(t), t)$$

On retrouve l'expression de la force classique du § A, le dipole classique étant remplacé par la valeur moyenne du dipole quantique et le champ étant évalué au centre du paquet d'ondes

Expression plus générale

- Onde pas forcément mono-chromatique
- Vitesse initiale  $\dot{\vec{R}}(t) = \vec{P}(t) / M$  non nulle

Récapitulation des conditions (10) sur le temps  $t$

$t$  est suffisamment petit pour que  $\vec{R}(t) \approx \vec{R} + \frac{\vec{P}}{M} t$  (1)

$$\hbar k t / M \Delta R \ll 1 \quad (3)$$

Or,  $\Delta R$  est tel que

$$k \Delta R \ll 1 \quad (2)$$

En éliminant  $\Delta R$  entre (2) et (3) on obtient

$$\boxed{\frac{\hbar}{t} \gg \frac{\hbar^2 k^2}{2M} = E_{\text{recul}}} \quad (3')$$

$E_{\text{recul}}$  est l'énergie de recul de l'atome lors de l'émission d'un photon

Si (1), (2) et (3') sont remplies, l'opérateur  $\vec{R}(t)$  peut être remplacé par sa valeur moyenne  $\vec{R}(t)$  dans l'expression de la force moyenne

Temps de réponse du dipole (12)

- Temps d'amortissement caractéristique  $\tau$  : durée de vie radiative de l'état excité  $e$

Largeur naturelle de  $e$  :  $\Gamma$

$$\boxed{\Gamma = \frac{1}{\tau}}$$

- L'expression classique de la force peut être utilisée en régime stationnaire si la condition (3') est valable avec  $t = \tau$ , c.-à-d si

$$\boxed{\hbar \Gamma \gg E_{\text{recul}}} \quad (3'')$$

- Condition largement réalisée pour les transitions permises. Par exemple, pour les raies D de Na  $\hbar \Gamma \approx 400 E_{\text{recul}}$

### Conclusions pour l'expression (13) de la valeur moyenne de la force

- L'expression classique de la force moyenne peut être utilisée
- si le paquet d'ondes atomique initial a des dimensions petites devant la longueur d'onde lumineuse
  - si le temps d'interaction  $t$  est court devant  $\hbar / E_{\text{recoil}}$  et suffisamment court pour qu'on puisse négliger la variation de vitesse due aux forces radiatives
  - la valeur stationnaire du dipôle peut être utilisée dans l'expression de la force si la largeur naturelle de l'état excité est grande devant l'énergie de recul

### Expression du champ agissant (15) sur l'atome

$$\vec{E}(\vec{R}(t), t) = \vec{E}^+(\vec{R}(t), t) e^{-i\omega t} + \vec{E}^-(\vec{R}(t), t) e^{i\omega t}$$

Champ quasimonochromatique et non monochromatique

- Dépendance principale en  $e^{\pm i\omega t}$

-  $\vec{E}^{\pm}(\vec{R}(t), t)$  : variation avec  $t$  beaucoup plus lente

2 causes de variation avec  $t$

(i) Dépendance explicite en  $t$   
L'onde incidente peut être non monochromatique

(ii) Dépendance via  $\vec{R}(t)$

Même si l'onde incidente est monochromatique, l'atome en mouvement peut la ressentir comme non monochromatique

### Equations d'évolution des (14) variables internes

- Un raisonnement analogue à celui fait plus haut montre que, dans les équations d'évolution du dipôle moyen, on peut remplacer l'opérateur position du centre de masse par le centre  $\vec{R}(t)$  du paquet d'ondes.

- Le champ électrique qui agit sur l'atome est donc le champ

$$\vec{E}(\vec{R}(t), t)$$

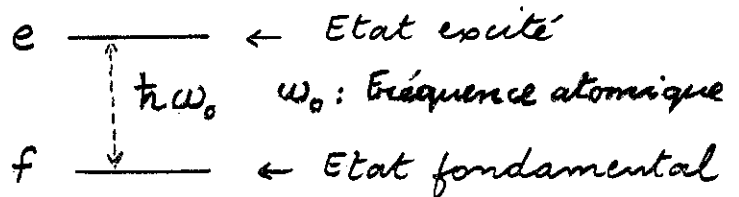
évalué au centre du paquet d'ondes en mouvement

$$\vec{R}(t) \approx \vec{R} + \frac{\vec{P}}{M} t$$

C'est ainsi qu'apparaîtront les effets liés à la vitesse  $\frac{\vec{P}}{M}$

### Modèle simple d'atome (16)

#### Atome à 2 niveaux



#### Hamiltonien atomique interne $h_A$

Si l'on prend le zéro d'énergie au milieu de  $e$  et  $f$ ,  $h_A$  est représenté par la matrice

$$h_A = \frac{\hbar\omega_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

#### Désaccord

$$\delta = \omega - \omega_0$$

entre la fréquence atomique et la fréquence centrale de l'onde  
Excitation quasirésonnante

$$|\delta| \ll \omega_0$$

Opérateur dipôle

(17)

$$D_j = \delta_{j3} d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} j = 2, 3, 3 \\ d \text{ réel} \end{matrix}$$

 $\vec{D}$  oscille suivant  $Oz$  $\vec{D}$  : opérateur impair, non diagonal

$$D_3 = D = \underbrace{d |e\rangle\langle f|}_{D_+} + \underbrace{d |f\rangle\langle e|}_{D_-}$$

$D_+$  : composante "montante" de  $D$   
Fait passer de  $f$  à  $e$

$D_-$  : composante "descendante" de  $D$   
Fait passer de  $e$  à  $f$

Interaction avec le champ

$$V(t) = -D E_3(\vec{R}(t), t)$$

Pour simplifier les notations,  
on posera parfois

$$E_3^{\pm}(\vec{R}(t), t) = \underbrace{E^{\pm}(t)}_{\text{Variation lente}}$$

Approximation du champ tournant

(18)

$$\begin{aligned} V(t) &= -D E(\vec{R}(t), t) = \\ &= -D_+ E^+(t) e^{-i\omega t} - D_- E^-(t) e^{i\omega t} \\ &= -D_- E^+(t) e^{-i\omega t} - D_+ E^-(t) e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Les termes de la dernière ligne ne conduisent à aucun effet résonnant quand  $\omega - \omega_0 \rightarrow 0$  à la différence de ceux de la deuxième ligne. On les néglige

Quand le champ  $E$  est traité quantiquement, les termes de la dernière ligne décrivent des processus où l'atome passe de  $e$  à  $f$  avec absorption d'un photon ou de  $f$  à  $e$  avec émission d'un photon (processus non résonnants)

Point de vue de Schrödinger

(19)

Sera utilisé ici pour décrire l'évolution de l'état interne.

Possibilité également d'utiliser le point de vue d'Heisenberg (cf cours ultérieur)

Description par matrice densité

Impossibilité de décrire l'évolution atomique due à des processus dissipatifs, comme l'émission spontanée, en termes de vecteur d'état

Les termes d'amortissement correspondants seront rajoutés phénoménologiquement dans l'équation d'évolution de la matrice densité

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{ee} & \sigma_{ef} \\ \sigma_{fe} & \sigma_{ff} \end{pmatrix}$$
Relaxation par émission spontanée

(20)

$$\frac{d}{dt} \sigma_{ee} = -\Gamma \sigma_{ee} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \sigma_{ff} = +\Gamma \sigma_{ee} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \sigma_{ef} = -\frac{\Gamma}{2} \sigma_{ef} \quad \frac{d}{dt} \sigma_{fe} = -\frac{\Gamma}{2} \sigma_{fe} \quad (3)$$

(1) : L'atome quitte  $e$  avec un temps de transition  $\Gamma$

(2) : Transfert de cet atome de  $e$  vers  $f$

$\Gamma$  : Temps d'émission spontanée  
Largeur naturelle de  $e$

$\Gamma = \frac{1}{\tau}$   $\tau$  : durée de vie radiative

(3) : Amortissement des "cohérences optiques", ou encore du dipôle moyen avec un temps  $\frac{\Gamma}{2}$ . En effet,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(t) &= \text{Tr} \{ D \sigma(t) \} \\ &= d [\sigma_{ef}(t) + \sigma_{fe}(t)] \end{aligned}$$

Evolution de  $\sigma$  due à  $\bar{h}_A + V(t)$  (21)

$$\frac{d}{dt} \sigma(t) = \frac{1}{i\hbar} [\bar{h}_A + V(t), \sigma(t)]$$

$$\bar{h}_A + V(t) = \begin{pmatrix} \hbar\omega_0/2 & -d \mathcal{E}^+(t) e^{-i\omega t} \\ -d \mathcal{E}^-(t) e^{i\omega t} & -\hbar\omega_0/2 \end{pmatrix}$$

1<sup>er</sup> Changement de variables  
(pour éliminer la dépendance temporelle rapide)

$$\sigma_{ef}(t) = \tilde{\sigma}_{ef}(t) e^{-i\omega t} \quad \sigma_{fe}(t) = \tilde{\sigma}_{fe}(t) e^{i\omega t}$$

$$\sigma_{ee} = \tilde{\sigma}_{ee} \quad \sigma_{ff} = \tilde{\sigma}_{ff}$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt} \tilde{\sigma}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\tilde{H}(t), \tilde{\sigma}(t)]$$

$$\tilde{H}(t) = \begin{pmatrix} \hbar(\omega_0 - \omega)/2 & -d \mathcal{E}^+(t) \\ -d \mathcal{E}^-(t) & -\hbar(\omega_0 - \omega)/2 \end{pmatrix}$$

Dépendance temporelle lente  
(Equivalent du passage dans le référentiel tournant)

2<sup>ème</sup> changement de variables (23)

(suggéré par les expressions de  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$ )

Dans  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  apparaissent  $\mathcal{D}_+ e^{-i\phi} = d \tilde{\sigma}_{fe}(t) e^{-i\phi(\vec{R}(t), t)}$

et la quantité complexe conjuguée

On pose donc

$$\hat{\sigma}_{fe}(t) = \tilde{\sigma}_{fe}(t) e^{-i\phi(\vec{R}(t), t)}$$

$$\hat{\sigma}_{ee} = \tilde{\sigma}_{ee} = \sigma_{ee} \quad \hat{\sigma}_{ff} = \tilde{\sigma}_{ff} = \sigma_{ff}$$

Equation d'évolution de  $\hat{\sigma}$

$$\frac{d}{dt} \hat{\sigma}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}(t), \hat{\sigma}(t)]$$

$$\hat{H}(t) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -\delta - \dot{\phi}(t) & \omega_1(t) \\ \omega_1(t) & \delta + \dot{\phi}(t) \end{pmatrix}$$

$\delta = \omega - \omega_0$  Désaccord

$$\dot{\phi}(t) = \left( \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) \right)_{\vec{r}=\vec{R}(t)} + \dot{\vec{R}}(t) \cdot \left( \nabla \phi(\vec{r}, t) \right)_{\vec{r}=\vec{R}(t)}$$

$\omega_1(t) = -d \mathcal{E}_0(\vec{R}(t), t) / \hbar$  Fréquence de Rabi

Retour sur l'expression de la force (22)

$$M \ddot{\vec{R}} = \mathcal{D}(t) \nabla \mathcal{E}(\vec{R}(t), t) = \vec{F}(t)$$

$$\mathcal{D}(t) = \mathcal{D}_+(t) e^{i\omega t} + \mathcal{D}_-(t) e^{-i\omega t}$$

$$\mathcal{D}_+(t) = d \tilde{\sigma}_{fe}(t) \quad \mathcal{D}_-(t) = d \tilde{\sigma}_{ef}(t)$$

$$\mathcal{E}(\vec{r}, t) = \mathcal{E}^+(\vec{r}) e^{-i\omega t} + \mathcal{E}^-(\vec{r}) e^{i\omega t}$$

$\vec{r}$  : point courant de l'espace

$$\mathcal{E}^\pm(\vec{r}, t) = \frac{\mathcal{E}_0(\vec{r}, t)}{2} e^{\mp i\phi(\vec{r}, t)}$$

↳ Calculs et résultats analogues

à ceux du § A avec toutefois

$$\mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{E}_0(\vec{R}(t), t) \quad \phi_0 \rightarrow \phi_0(\vec{R}(t), t)$$

$$\nabla \phi \rightarrow (\nabla \phi(\vec{r}, t))_{\vec{r}=\vec{R}(t)}$$

$$\nabla \mathcal{E}_0 \rightarrow (\nabla \mathcal{E}_0(\vec{r}, t))_{\vec{r}=\vec{R}(t)}$$

Toutes les grandeurs relatives au champ, et apparaissant dans les expressions de  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$ , doivent être évaluées au centre du paquet d'ondes

Equations d'évolution globale de  $\hat{\sigma}$  (24)

Contribution du commutateur avec  $\hat{\sigma}$  + Relaxation par émission spontanée

$$\frac{d}{dt} \hat{\sigma}_{ee}(t) = \frac{i}{2} \omega_1(t) [\hat{\sigma}_{fe}(t) - \hat{\sigma}_{ef}(t)] - \Gamma \hat{\sigma}_{ee}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\sigma}_{ff}(t) = -\frac{d}{dt} \hat{\sigma}_{ee}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\sigma}_{ef}(t) = i[\delta + \dot{\phi}(t)] \hat{\sigma}_{ef}(t) + \frac{i}{2} \omega_1(t) [\hat{\sigma}_{ee}(t) - \hat{\sigma}_{ff}(t)] - \frac{\Gamma}{2} \hat{\sigma}_{ef}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \hat{\sigma}_{fe}(t) = \left[ \frac{d}{dt} \hat{\sigma}_{ef}(t) \right]^*$$

Système différentiel linéaire permettant de calculer l'évolution de l'état interne

La 2<sup>ème</sup> équation exprime que

$$\text{Tr} \hat{\sigma} = \hat{\sigma}_{ee}(t) + \hat{\sigma}_{ff}(t) = \text{Cte} = 1$$

3<sup>ème</sup> changement de variables (25)

$$u(t) = (\hat{\sigma}_{fe}(t) + \hat{\sigma}_{ef}(t)) / 2$$

$$v(t) = (\hat{\sigma}_{fe}(t) - \hat{\sigma}_{ef}(t)) / 2i$$

Ce sont  $u(t)$  et  $v(t)$  qui apparaissent dans  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  (composantes du dipole en phase et en quadrature avec le champ)

$$w(t) = (\hat{\sigma}_{ee}(t) - \hat{\sigma}_{ff}(t)) / 2$$

Différence de populations

Equations de Bloch optiques

$$\frac{d}{dt} u(t) = [\delta + \dot{\phi}(t)] v(t) - \frac{\Gamma}{2} u(t)$$

$$\frac{d}{dt} v(t) = -[\delta + \dot{\phi}(t)] u(t) - \omega_1(t) w(t) - \frac{\Gamma}{2} v(t)$$

$$\frac{d}{dt} w(t) = +\omega_1(t) v(t) - \Gamma \left( \frac{1}{2} + w(t) \right)$$

Interprétation géométrique sera donnée ultérieurement

Système d'équations couplées (27)

- Equations de Bloch optiques pour  $u(t)$ ,  $v(t)$ ,  $w(t)$

Dépendent de  $\vec{R}(t)$

- Equation du mouvement de  $\vec{R}(t)$

Dépend de  $u(t)$  et  $v(t)$  via  $\vec{F}(t)$

La condition  $\hbar\Gamma \gg E_{recul}$

- permet d'utiliser ces équations pendant un temps plus long que  $\tau$

- entraîne que les variables internes suivent adiabotiquement l'évolution des variables internes

Phénomènes négligés

Séparation du paquet d'ondes (Effet Stern et Gerlach optique)

Diffusion d'impulsion liée aux fluctuations de la force

Récapitulation générale (26)

- A l'instant initial 0, atome en  $\vec{R}$  avec la vitesse  $\vec{P}/M$

$$\vec{R}(t) = \vec{R} + \frac{\vec{P}}{M} t$$

- On en déduit  $\omega_1(t)$  et  $\dot{\phi}(t)$

- Les équations de Bloch optiques permettent alors de calculer  $u(t)$  et  $v(t)$

- Connaissant  $u(t)$  et  $v(t)$ , ainsi que  $\vec{\nabla}\phi = (\vec{\nabla}\phi(\vec{r}, t))_{\vec{r}=\vec{R}(t)}$  et  $\vec{\nabla}E_0 = (\vec{\nabla}E_0(\vec{r}, t))_{\vec{r}=\vec{R}(t)}$ , on en déduit

$$\vec{F}(t) = u(t) \vec{\nabla}E_0 + v(t) E_0 \vec{\nabla}\phi$$

-  $\vec{F}(t)$  peut être alors reporté dans l'équation  $M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}(t)$ , ce qui permet de calculer la variation de vitesse de l'atome

Référence

R. J. COOK

Phys. Rev. A 20, 224 (1979)