

B - Considérations énergétiques - Absorption et redistribution de photons.

- 1 - Introduction (Transparent 1)
- 2 - Energie absorbée par le dipole par unité de temps (2 → 3)
- 3 - Interprétation physique de \mathcal{F}_1 (4 → 6)
- 4 - Interprétation physique de \mathcal{F}_2 (7 → 13)
Modèle simple
Généralisation
- 5 - Récapitulation (14)

C - Premier exemple simple - Electron libre dans une onde lumineuse

- 1 - Introduction (15)
- 2 - Etude du mouvement d'oscillation stationnaire (16 → 19)
- 3 - Calcul et interprétation physique de \mathcal{F}_2 (20 → 21)
Gradient de l'énergie moyenne de vibration
- 4 - Calcul et interprétation physique de \mathcal{F}_1 (22 → 24)
Pression de radiation
- 5 - Généralisation (25 → 26)

Buts du § B

(1)

- Evaluer, en régime stationnaire, l'énergie fournie par le champ incident au dipole atomique
- Par des arguments de conservation d'énergie, en déduire l'énergie perdue par le champ incident, et, par suite, le nombre de photons incidents qui sont absorbés par unité de temps
- Si le champ incident n'est pas une onde plane, faire ce bilan énergétique mode par mode.
- En déduire une interprétation physique des forces $\vec{\mathcal{F}}_1$ et $\vec{\mathcal{F}}_2$ en termes d'absorption ou de redistribution des photons incidents

Travail effectué par le champ incident sur la charge q

(2)

$$dW = \vec{\mathcal{F}} \cdot d\vec{r}$$

$$\frac{dW}{dt} = \vec{\mathcal{F}} \cdot \dot{\vec{r}} = \underbrace{\vec{\mathcal{F}} \cdot \dot{\vec{R}}}_{=0 \text{ car } \dot{\vec{R}} = \vec{0}} + \underbrace{\vec{\mathcal{F}} \cdot (\dot{\vec{r}} - \dot{\vec{R}})}_{= \vec{\mathcal{F}} \cdot \dot{\vec{D}} / q}$$

(atome initialement immobile)

Moyenne séculaire

$$\overline{\frac{dW}{dt}} = \overline{\vec{E}(\vec{R}, t) \cdot \dot{\vec{D}}} = \overline{E(\vec{R}, t) \dot{D}}$$

Seule, la force électrique travaille

$$E = E_z \quad D = D_z$$

$$E(\vec{R}, t) = E^+(\vec{R}) e^{-i\omega t} + E^-(\vec{R}) e^{i\omega t}$$

$$D(t) = D^+ e^{i\omega t} + D^- e^{-i\omega t}$$

$$\dot{D}(t) = i\omega [D^+ e^{i\omega t} - D^- e^{-i\omega t}]$$

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = i\omega [D^+ E^+(\vec{R}) - D^- E^-(\vec{R})]}$$

Expression équivalente de \overline{dW}/dt (3)

$$\vec{E}^{\pm}(\vec{R}) = \frac{\vec{E}_0(\vec{R})}{2} e^{\mp i\phi(\vec{R})} \quad (\text{cf I-11})$$

$$\hookrightarrow \frac{dW}{dt} = i \frac{\omega \epsilon_0}{2} [\mathcal{D}^+ e^{-i\phi} - \mathcal{D}^- e^{i\phi}]$$

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = -\omega \epsilon_0 \mathcal{D}_{\text{quadrature avancée}}}$$

Nombre de photons incidents absorbés par unité de temps

Par conservation de l'énergie

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)_{\text{fournie au dipôle par le champ}} = \left(\frac{dW}{dt}\right)_{\text{perdue par le champ}}$$

Le champ incident est monochromatique

Donc $dW = dN \hbar \omega$ où dN est le nombre de photons absorbés

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{1}{\hbar \omega} \frac{dW}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{D}^+ \vec{E}^+(\vec{R}) - \mathcal{D}^- \vec{E}^-(\vec{R})] \\ &= -\epsilon_0 \mathcal{D}_{\text{quadrature avancée}} / \hbar \end{aligned}$$

Interprétation physique de \vec{F}_1 (4)

De I-14 et II-3

$$\vec{F}_1 = -\hbar (\vec{\nabla} \phi) \frac{dN}{dt}$$

on déduit

$$\text{Onde plane } \phi = -\vec{k} \cdot \vec{R} \quad (\text{voir I-11})$$

$$\hookrightarrow \boxed{\vec{F}_1 = \hbar \vec{k} \frac{dN}{dt}}$$

dN photons incidents, ayant chacun une impulsion $\hbar \vec{k}$, sont absorbés par le dipôle, qui gagne donc l'impulsion $d\vec{p} = \hbar \vec{k} dN$ pendant dt , d'où la force $d\vec{p}/dt = \hbar \vec{k} dN/dt$

Cas général

Superposition d'ondes planes de même ω , mais de \vec{k} différents - $\hbar (\vec{\nabla} \phi)$ apparaît comme l'impulsion "moyenne" des photons absorbés (Par exemple, $-\hbar \vec{\nabla} \phi = \vec{0}$ pour une onde stationnaire)

Que devient l'énergie absorbée par le dipôle? (5)

Reévacuée par les processus dissipatifs responsables de l'amortissement du dipôle.

En particulier, amortissement radiatif par émission spontanée

Ce sont d'ailleurs les termes d'amortissement dans l'équation d'évolution du dipôle qui sont, en régime stationnaire, à l'origine de la composante de \mathcal{D} en quadrature avec \vec{E} . D'où la dénomination utilisée parfois

\vec{F}_1 : Force "dissipative"

\vec{F}_2 : Force "réactive"

Bilan global d'impulsion (6)

En régime stationnaire, les dN photons incidents absorbés pendant dt par le dipôle sont réémis spontanément dans les modes du champ initialement vides, avec des probabilités égales dans 2 directions opposées

L'impulsion reperdue par le dipôle lors de la réémission est donc nulle en moyenne

\hookrightarrow Idée que le traitement élémentaire présenté ici contient en fait une 2^{ème} moyenne (en plus de la moyenne séculaire) sur les photons émis spontanément, et ignore donc les fluctuations correspondantes pour \vec{F}_1

Interprétation de \vec{F}_2

- Pour une onde plane
 $E_0 = \text{Constante} \rightarrow \vec{\nabla} E_0 = \vec{0} \rightarrow \vec{F}_2 = \vec{0}$
- Pour avoir un gradient d'amplitude, il faut donc superposer des ondes planes de \vec{k} différents
- Commençons par un modèle simple de 2 ondes planes, d'amplitudes E_1 et E_2 , se propageant en sens inverse
 $\vec{k}_1 = \vec{k} = -\vec{k}_2$

$$E^+ = E_1 e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} + E_2 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}}$$

Superposition de ces 2 ondes

- On se place en un point \vec{R} où les 2 ondes sont en quadrature.
En un tel point, le gradient de l'amplitude globale est $\neq 0$ ($\parallel \vec{k}$)

Transfert d'énergie d'une onde (9) à l'autre

- D_1 en quadrature avancée sur E_2 fournit de l'énergie à E_2
 $\left(\frac{dW_2}{dt}\right)_{\text{par } E_2} \text{ gagnée} = \omega E_2 D_1 = \alpha \omega E_2 E_1$

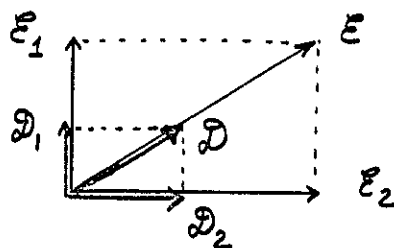
- D_2 en quadrature retard sur E_1 , absorbe de l'énergie sur E_1
 $\left(\frac{dW_1}{dt}\right)_{\text{par } E_1} \text{ perdue} = \omega E_1 D_2 = \alpha \omega E_1 E_2$

↳ L'énergie gagné par une onde est perdue par l'autre

Redistribution à énergie constante

Par contre, comme l'impulsion change d'une onde à l'autre, le bilan global d'impulsion est non nul

$$\left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{\text{par dipole}} \text{ gagnée} = \frac{\alpha \omega E_1 E_2}{\hbar \omega} (\hbar \vec{k}_1 - \hbar \vec{k}_2) \neq 0$$

(7) Discussion dans le plan complexe (8)

$D = \alpha E$: Dipole en phase avec le champ total E
 α : réel (pas forcément susceptibilité linéaire - Peut dépendre de $|E|^2$)

$$\hookrightarrow D_2 = \alpha E_2 \quad D_1 = \alpha E_1$$

- D en phase avec E
- ↳ Pas d'absorption globale d'énergie
- D_2 en phase avec E_2 , mais en quadrature retard sur E_1
- D_1 en phase avec E_1 , mais en quadrature avancée sur E_2

Importance des relations de (10) phase entre les 2 ondes

- L'onde incidente \vec{k}_1 induit un dipole D_1 qui dépend de la phase de cette onde au point \vec{R}

- Ce dipole D_1 rayonne dans le mode \vec{k}_2 et c'est l'interférence entre ce champ rayonné dans le mode \vec{k}_2 et le champ incident dans \vec{k}_2 qui est responsable de l'amplification de l'onde \vec{k}_2

- La redistribution n'est donc pas une succession de 2 processus incohérents (absorption de \vec{k}_1 et émission induite de \vec{k}_2). Ces 2 processus interfèrent d'une manière qui dépend de la phase relative des 2 ondes au point \vec{R} .

Généralisation

- Superposition quelconque d'ondes planes. Modes μ, ν, \dots

$$E^+(\vec{R}) = E_\mu^+(\vec{R}) + E_\nu^+(\vec{R}) + \dots$$

$$E_\mu^+(\vec{R}) = E_\mu^+ e^{i\vec{k}_\mu \cdot \vec{R}} \quad E_\nu^+(\vec{R}) = E_\nu^+ e^{i\vec{k}_\nu \cdot \vec{R}}$$

- Composante en phase du dipole

$$D^- = \alpha E^+(\vec{R}) = D_\mu^- + D_\nu^- + \dots$$

$$D_\mu^- = \alpha E_\mu^+ e^{i\vec{k}_\mu \cdot \vec{R}} \quad D_\nu^- = \alpha E_\nu^+ e^{i\vec{k}_\nu \cdot \vec{R}}$$

α réel

Contribution d'une paire de modes μ, ν à la force \vec{F}_2

$$\vec{F}_2 = D^+ \vec{\nabla} E^- + D^- \vec{\nabla} E^+ =$$

$$\alpha [E_\mu^-(\vec{R}) + E_\nu^-(\vec{R}) + \dots] [i\vec{k}_\mu E_\mu^+(\vec{R}) + i\vec{k}_\nu E_\nu^+(\vec{R}) + \dots]$$

$$= i\alpha (\vec{k}_\mu - \vec{k}_\nu) [E_\nu^-(\vec{R}) E_\mu^+(\vec{R}) - E_\mu^-(\vec{R}) E_\nu^+(\vec{R})] + c.c.$$

+ contribution des autres paires μ, ν'

(11) Travail fourni par E_μ sur D_ν

$$\frac{dW_{\mu\nu}}{dt} = i\omega [D_\nu^+ E_\mu^+(\vec{R}) - D_\nu^- E_\mu^-(\vec{R})] \quad (\text{voir II-2})$$

Nombre de photons disparaissant du mode μ à cause de D_ν

$$\frac{dN_{\mu\nu}}{dt} = \frac{i\alpha}{\hbar} [E_\nu^-(\vec{R}) E_\mu^+(\vec{R}) - E_\nu^+(\vec{R}) E_\mu^-(\vec{R})]$$

Travail fourni par E_ν sur D_μ

et nombre de photons disparaissant du mode ν à cause de D_μ

$$\frac{dN_{\nu\mu}}{dt} = \frac{i\alpha}{\hbar} [E_\mu^-(\vec{R}) E_\nu^+(\vec{R}) - E_\mu^+(\vec{R}) E_\nu^-(\vec{R})]$$

Bilan global d'énergie

$$\frac{d}{dt} (N_{\mu\nu} + N_{\nu\mu}) = 0$$

Redistribution à énergie constante

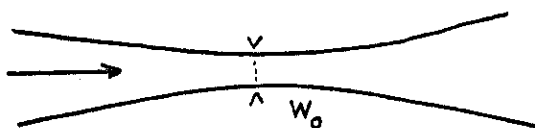
Bilan global d'impulsion

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{\text{paires } \mu, \nu} [\hbar \vec{k}_\mu \frac{d}{dt} N_{\mu\nu} + \hbar \vec{k}_\nu \frac{d}{dt} N_{\nu\mu}]$$

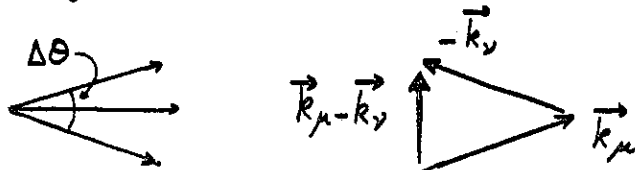
$$= \sum_{\mu, \nu} i\alpha (\vec{k}_\mu - \vec{k}_\nu) [E_\nu^-(\vec{R}) E_\mu^+(\vec{R}) - E_\nu^+(\vec{R}) E_\mu^-(\vec{R})]$$

On retrouve exactement \vec{F}_2

Application: Force \vec{F}_2 maximale (13) pour un faisceau gaussien



Vecteurs \vec{k} des ondes planes incidentes repartis dans un angle $\Delta\theta \approx 1/w_0$ autour de la direction moyenne



La valeur maximale de $\vec{k}_\mu - \vec{k}_\nu$ est réalisée en prenant les 2 valeurs extrêmes pour \vec{k}_μ et \vec{k}_ν

Force \vec{F}_2 maximale dans la direction transversale (inversement proportionnelle au diamètre w_0 du faisceau)

Récapitulation (14)

Force \vec{F}_1 (Gradient de phase)

Perte globale d'énergie pour le champ incident

Disparition globale de photons dans les modes non vides

Transfert de ces photons vers les modes initialement vides

Force de "diffusion"

Force \vec{F}_2 (Gradient d'amplitude)

Pas de changement global d'énergie du champ incident

Nombre total de photons incidents constant

Redistribution cohérente des photons incidents entre les modes non vides

(de même énergie mais d'impulsion différente), les modes initialement vides restant vides

Force de "redistribution"

Forces radiatives exercées (15)
par une onde monochromatique
sur un électron libre

- Illustration simple des notions introduites en A et B.
- Equation d'Abraham-Lorentz pour calculer le mouvement d'oscillation rapide de l'électron
- \vec{R} , centre de cette oscillation, évolue beaucoup plus lentement. On suppose que $\dot{\vec{R}} = \vec{0}$ à $t = 0$, et demeure négligeable pendant le temps d'établissement du régime d'oscillation stationnaire
- Possibilité de traitements plus complets :
 Onde non monochromatique
 Effets relativistes

Mouvement d'oscillation (16)
Interaction avec le champ incident

$m \ddot{\vec{r}} = q \vec{E}(\vec{r}, t) + q \dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r}, t)$
 La force magnétique instantanée est v/c fois plus petite que la force électrique instantanée
 A l'ordre le plus bas en v/c et a/λ , l'oscillation de l'électron autour de \vec{R} est due à la seule force électrique instantanée, évaluée en \vec{R}
 $m \ddot{\vec{r}}_{\text{osill}} = q \vec{E}(\vec{R}, t)$
 Rappelons que, pour avoir la force séculaire, il faut développer la force électrique à l'ordre 1 en $(\vec{r} - \vec{R})/\lambda$ autour de \vec{R} , et garder la force magnétique à l'ordre 0 ($\propto \int A$)

Interaction de l'électron avec (17)
son champ propre

- Responsable d'une correction de masse (supposée réintégrée dans m)
- Responsable d'un amortissement radiatif dû à la perte d'énergie par rayonnement de la charge oscillante
 La force de freinage associé est la "réaction de rayonnement" qu'on peut montrer être égale à
 $\vec{R} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\vec{r}}$

Equation d'Abraham-Lorentz
 $m \ddot{\vec{r}} = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\vec{r}} + q \vec{E}(\vec{R}, t)$

Simplifications (18)

- Le mouvement oscillant de $\vec{D} = q(\vec{r} - \vec{R})$ est très rapide devant le mouvement lent de \vec{R} (voir hypothèses sur $\dot{\vec{R}}$ dans II-15)
 $\hookrightarrow q \ddot{\vec{r}} \approx \ddot{\vec{D}} \quad q \ddot{\vec{r}} \approx \ddot{\vec{D}}$
 $\ddot{\vec{D}} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \ddot{\vec{D}} = \frac{q^2}{m} \vec{E}(\vec{R}, t)$
 On a posé $e^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}$
- Comme le mouvement de \vec{D} est sinusoïdal, $\ddot{\vec{D}} \approx -\omega^2 \vec{D}$
 $\ddot{\vec{D}} + \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega^2}{mc^3} \vec{D} = \frac{q^2}{m} \vec{E}(\vec{R}, t)$
- \vec{E} polarisé suivant Oz près de \vec{R}
 Origine des temps telle que $\phi(\vec{R}) = 0$
 $\hookrightarrow E_i(\vec{R}, t) = \delta_{i3} E_0(\vec{R}) \cos \omega t$

Calcul du dipole induit (19)

$$E_z(\vec{R}, t) = E(\vec{R}, t) = E^+ e^{-i\omega t} + E^- e^{i\omega t}$$

$$E^+ = E^- = E_0(\vec{R})/2$$

$$D_3(t) = D(t) = D^+ e^{i\omega t} + D^- e^{-i\omega t}$$

En régime stationnaire,

$$\left[-\omega^2 + \frac{2}{3} i \frac{e^2 \omega^3}{m c^3}\right] D^+ = \frac{q^2}{m} E^-$$

$$D_+ = -\frac{q^2}{m \omega^2} \frac{1}{1 - \frac{2 i e^2 \omega}{3 m c^3}} E^-$$

$$\frac{e^2 \omega}{m c^3} = \frac{e^2}{m c^2} \frac{\omega}{c} = \frac{r_0}{\lambda} \ll 1$$

$$r_0 = \frac{e^2}{m c^2} = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad \text{Rayon classique de } e^-$$

$$D_{\text{phase}} = -\frac{q^2}{m \omega^2} \frac{E_0}{2}$$

$$D_{\text{quadr. avancée}} = -\frac{q^2}{m \omega^2} \frac{2 r_0}{3 \lambda} \frac{E_0}{2}$$

Expression de la force \vec{F}_2 (20)

$$\vec{F}_2 = D_{\text{phase}} \vec{\nabla} E_0(\vec{R}) = -\frac{q^2}{2 m \omega^2} E_0(\vec{R}) \vec{\nabla} E_0(\vec{R}) = -\vec{\nabla} \frac{q^2 E_0^2(\vec{R})}{4 m \omega^2}$$

Proportionnelle au gradient d'intensité lumineuse

Interprétation de $q^2 E_0^2(\vec{R})/4 m \omega^2$

Energie cinétique moyenne de vibration de l'électron dans l'onde

En effet, si l'on néglige la réaction de rayonnement ($r_0/\lambda \ll 1$)

$$\ddot{z} = \frac{q E_0(\vec{R})}{m} \cos \omega t$$

$$\dot{z} = \frac{q E_0(\vec{R})}{m \omega} \sin \omega t$$

$$E_{\text{vib}}(\vec{R}) = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 = \frac{q^2 E_0^2}{2 m \omega^2} \underbrace{\sin^2 \omega t}_{= 1/2}$$

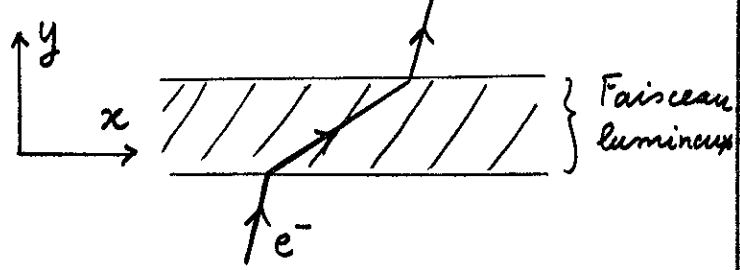
$$\boxed{\vec{F}_2 = -\vec{\nabla} E_{\text{vib}}(\vec{R})}$$

Conclusions pour \vec{F}_2 (21)

L'énergie moyenne de vibration de e^- dans une onde lumineuse apparaît comme une énergie potentielle pour le mouvement lent de e^- , qui est repoussé hors des régions de forte intensité

Exemple de conséquence

Réfraction d'un faisceau de e^- par un faisceau lumineux



v_x diminue dans le faisceau
 v_y reste inchangée

Expression de la force \vec{F}_1 (22)

$$\vec{F}_1 = D_{\text{quadr. avancée}} E_0(\vec{\nabla} \phi) = -\frac{q^2}{m \omega^2} \frac{2 r_0}{3 \lambda} \frac{E_0^2}{2} (\vec{\nabla} \phi)$$

Cas d'une onde plane

$$\phi = -\vec{k} \cdot \vec{R} \rightarrow \vec{\nabla} \phi = -\vec{k}$$

Relions E_0^2 au flux incident moyen d'énergie F_{inc}

$$F_{\text{inc}} = \epsilon_0 c^2 |\vec{E} \times \vec{B}| = \epsilon_0 c E_0^2 \underbrace{\cos^2 \omega t}_{= 1/2}$$

On peut alors réécrire \vec{F}_1 sous la forme

$$\vec{F}_1 = \underbrace{\frac{8 \pi r_0^2}{3}}_{\text{Section efficace Thomson}} \underbrace{\frac{F_{\text{inc}}}{\hbar \omega}}_{\text{Flux de photons incidents}} \underbrace{\hbar \vec{k}}_{\text{Impulsion de chaque photon}}$$

Section efficace Thomson Flux de photons incidents Impulsion de chaque photon

Interprétation physique de \vec{F}_1 (23)

Des photons incidents disparaissent du faisceau lumineux et sont diffusés dans d'autres directions (avec une probabilité égale dans 2 directions opposées). C'est la diffusion Thomson

Leur nombre par unité de temps est le produit du flux de photons incidents par la section efficace Thomson

L'impulsion qui disparaît du faisceau lumineux est prise par l'électron, d'où la force \vec{F}_1 . \vec{F}_1 est souvent appelé

Force de pression de radiation

\vec{F}_2 force pondéromotrice

Ordres de grandeur relatifs de \vec{F}_1 et \vec{F}_2 (24)

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{2r_0}{\lambda} \frac{E_0^2}{2} \frac{|\vec{\nabla}\phi|}{E_0 |\vec{\nabla}E_0|}$$

$$\vec{\nabla}\phi \approx \vec{k} \quad |\vec{k}| = \frac{1}{\lambda}$$

$$\hookrightarrow \frac{F_1}{F_2} \approx \frac{r_0}{\lambda^2} \frac{I}{|\vec{\nabla}I|} \quad I: \text{intensité}$$

Soit L la longueur caractéristique sur laquelle I varie

$$\frac{F_1}{F_2} \approx \frac{r_0}{\lambda} \frac{L}{\lambda} \quad \left\{ \begin{array}{l} r_0 \approx 2.10^{-13} \text{ cm} \\ \lambda \approx 10^{-5} \text{ cm} \end{array} \right.$$

F_1 ne devient de l'ordre de F_2 que pour $L \gtrsim$ quelques mètres. Or, au foyer d'un faisceau, $L \approx$ quelques microns. Donc, en général

$$F_2 \gg F_1$$

Généralisation à des ondes non monochromatiques (25)

Amplitude variant non seulement dans l'espace, mais aussi dans le temps

Impulsions laser

On peut alors montrer que (en plus de la pression de radiation qui demeure très faible), il y a toujours une force proportionnelle au gradient de l'énergie moyenne de vibration

$$\vec{F}_2 = - \vec{\nabla} \overline{E_{vib}}(\vec{R}, t)$$

T.W.B. KIBBLE Phys. Rev. Lett 16, 1054 (1966)

Etude relativiste dans

T.W.B. KIBBLE Phy. Rev 150, 1060 (1966)

Exemple : Entraînement d'un electron initialement immobile par un train d'ondes planes (26)



L'électron est accéléré vers la droite quand le train d'ondes arrive sur lui (repoussé des régions de forte intensité), puis ralenti quand le train d'ondes le quitte (repoussé vers la gauche). Il se retrouve immobile, mais plus loin à droite

Origine de la force : quand l'intensité croît, ou décroît, avec t, \vec{r} n'est plus en phase avec \vec{E} (même sans réaction de rayonnement), donc \vec{r} n'est plus en quadrature avec \vec{B} et $q\vec{r} \times \vec{B} \neq \vec{0}$