2.12.80

Etude des corrections relativistes par la méthode de l'hamiltonien effectif (suite et fin)

But de ce cours

- Terminer le calcul de l'hamiltonien effectif.
- Interpréter physiquement les différents termes obtenus au cours de ce calcul

Plan

Suite et fin du calcul de l'hamiltonien effectif

- Calcul de l'ordre 3 T1 à T11
- Récapitulation et identification des différents termes T12 à T13

Discussion physique

- Délocalisation de la charge dûe au principe de Pauli et aux effets à plusieurs particules T14 à T16
- Interprétation du terme de Darwin T17
- Réduction de la self-énergie électrostatique T18
- Moment magnétique de spin T19
- Nouvelle correction de self énergie T20
- Couplage spin-orbite T21

T1

Ordre 3 Calcul de

$$-\frac{1}{8m^2c^4}P_+\left[\mathcal{U},[\mathcal{U},\mathcal{W}]\right]P_+ \qquad \text{Théorie à 1 particule}$$

$$-\frac{1}{8m^2c^4}P_1\left[U,[U,W]\right]P_1 \qquad \text{Théorie à N particules}$$

U et V opérateurs en $2^{\text{ème}}$ quantification associés

$$\mathcal{U} = c\vec{\alpha}\cdot\vec{\pi}_t \qquad \vec{\pi}_t = \vec{p} - e\vec{A}_0(\vec{r}) - e\vec{A}(\vec{r})$$

$$\mathcal{W} = \mathcal{H}_R + e\phi_0(\vec{r}) \qquad \mathcal{H}_R = \sum_{k\varepsilon}\hbar\omega\left(a^+_{k\varepsilon}a_{k\varepsilon}+\tfrac{1}{2}\right)$$

Notations pour les potentiels et les champs

Indice 0 : potentiels et champs statiques appliqués

Pas d'indice : potentiels et champs du rayonnement quantique (voir développement de $\vec{A}(\vec{r})$ et $\vec{E}(\vec{r})$ T.3 page IV-2)

Indices t : potentiels et champs totaux

$$\vec{A}_t = \vec{A}_0 + A \qquad \phi_t = \phi_0 \qquad \vec{E}_t = \underbrace{\vec{E}_0}_{-\vec{\nabla}\phi_0} + \vec{E}$$

T2

Quelques commutateurs utiles faisant intervenir le rayonnement quantifié

$$[a_{k\varepsilon}, a^+_{k'\varepsilon'}] = \delta_{kk'}\delta_{\varepsilon\varepsilon'}$$

$$[a_{k\varepsilon}, a_{k'\varepsilon'}] = [a^+_{k\varepsilon}, a^+_{k'\varepsilon'}] = 0$$

A partir de ces commutateurs et des expressions donnant $\vec{A}(\vec{r})$, $\mathcal{H}_R$, $\vec{E}(\vec{r})$ en fonction des $a_{k\varepsilon}$ et $a^+_{k\varepsilon}$, on déduit aisément

$$[\vec{A}(\vec{r}), \vec{A}(\vec{r}')] = 0$$

$$[\vec{A}(\vec{r}), \mathcal{H}_R] = -i\hbar\,\vec{E}(\vec{r})$$

$$[A_i(\vec{r}), E_j(\vec{r})] = \sum_{k\varepsilon} -\frac{i\hbar}{\varepsilon_0 L^3}\,\varepsilon_i\varepsilon_j = -\sum_{k\varepsilon}\frac{i\hbar}{3\varepsilon_0 L^3}\,\delta_{ij}$$

T3

Calcul de $[\mathcal{U},\mathcal{W}]$

$$[\mathcal{U},\mathcal{W}] = c\left[\vec\alpha.(\vec p - e\vec A_0 - e\vec A),\ e\phi_0 + \mathcal{H}_R\right]$$

Le seul commutateur non nul avec ϕ_0 est

$$c[\vec\alpha.\vec p, e\phi_0] = ec\vec\alpha.\underbrace{[\vec p,\phi_0]}_{-i\hbar\vec\nabla\phi_0 = +i\hbar\vec E_0} = +ie\hbar c\,\vec\alpha.\vec E_0$$

Le seul commutateur non nul avec $\mathcal H_R$ est

$$c\left[-e\vec\alpha.\vec A(\vec r),\mathcal H_R\right] = +ie\hbar c\,\vec\alpha.\vec E$$

Finalement,

$$[\mathcal U,\mathcal W] = ie\hbar c\,\vec\alpha.\vec E_t$$

Calcul de $[\mathcal U,[\mathcal U,\mathcal W]]$

$$[\mathcal U,[\mathcal U,\mathcal W]] = ie\hbar c^2\left[\vec\alpha.\vec\Pi_t\ ,\ \vec\alpha.\vec E_t\right]$$

D'après la formule (voir T6, page VII-2)

$$(\vec\alpha.\vec A)(\vec\alpha.\vec B) = \vec A.\vec B + i\vec\sigma.(\vec A\times\vec B)$$

on déduit aisément

$$\left[(\vec\alpha.\vec A),(\vec\alpha.\vec B)\right] = \sum_i [A_i,B_i] + i\vec\sigma.(\vec A\times\vec B - \vec B\times\vec A)$$

T4

Par suite,

$$\frac{1}{ie\hbar c^2}[\mathcal U,[\mathcal U,\mathcal W]] = \sum_i[\Pi_{it},E_{it}] + i\vec\sigma.(\vec\Pi_t\times\vec E_t - \vec E_t\times\vec\Pi_t)$$

Calcul de $[\Pi_{it},E_{it}]$

$$[\Pi_{it},E_{it}] = [p_i - eA_{it}(\vec r)\ ,\ E_{it}(\vec r)]$$

$$= \underbrace{[p_i,E_{it}(\vec r)]}_{-i\hbar\,\partial_i E_{it}(\vec r)} - e\underbrace{[A_{it}(\vec r),E_{it}(\vec r)]}_{\substack{[A_i(\vec r),\,E_i(\vec r)]\\ \text{voir T2}}}$$

Or $\sum_i \partial_i E_{it}(\vec r) = \vec\nabla.\vec E(\vec r) = 0$ car le rayonnement libre est transverse

$$\sum_i\partial_i E_{i0}(\vec r) = -\sum_i\partial_i\partial_i\phi_0(\vec r) = -\Delta\phi_0(\vec r),$$

↪ $$\sum_i[\Pi_{it},E_{it}] = i\hbar\,\Delta\phi_0(\vec r) + \sum_{k\varepsilon}\frac{ie\hbar}{\varepsilon_0 L^3}$$

T-5

Récapitulation pour l'ordre 3 et pour la théorie à 1 particule

On trouve l'hamiltonien suivant agissant dans $\mathcal E_+$

$$\mathcal H'^{(3)}_{eff} = \frac{e\hbar^2}{8m^2c^2}\,\Delta\phi_0(\vec r) + \frac{e\hbar}{8m^2c^2}\,\vec\sigma.\left[\vec\Pi_t\times\vec E_t - \vec E_t\times\vec\Pi_t\right] + \sum_{k\varepsilon}\frac{e^2\hbar^2}{8m^2c^2\varepsilon_0L^3}$$

Un dernier terme en $\frac{1}{c^2}$ apparaît à l'ordre 4 (voir remarque T26 page VII-7)

$$-\frac{1}{8m^3c^2}\left[\vec\Pi_t^2 - e\hbar\,\vec\sigma.\vec B_t\right]^2$$

T-6

Calcul de $[U,V]$ (Théorie à N particules)

$$U = \sum_{\alpha\beta}(c\vec\alpha.\vec\Pi_t)_{\alpha\beta}\ c^+_\alpha c_\beta$$

$$W = \underbrace{\sum_{\gamma\delta} e(\phi_0)_{\gamma\delta}\,c^+_\gamma c_\delta}_{W_0} + \mathcal H_R$$

$\mathcal H_R$ agit dans l'espace de Fock des photon. C'est un multiple de $\mathbb 1$ dans l'espace de Fock des e^+ et e^- : c'est pourquoi il ne s'exprime pas en fonction des c et c^+

$$[U,W] = [U,W_0] + [U,\mathcal H_R]$$

$$[U,\mathcal H_R] = \sum_{\alpha\beta}\left[(c\vec\alpha.\vec\Pi_t)_{\alpha\beta}\ ,\ \mathcal H_R\right]c^+_\alpha c_\beta$$

$$= \sum_{\alpha\beta}\Big(\underbrace{[c\vec\alpha.\vec\Pi_t,\mathcal H_R]}_{=\,ie\hbar c\,\vec\alpha.\vec E}\Big)_{\alpha\beta}\ c^+_\alpha c_\beta \quad \text{d'après (T-2)}$$

Donc

$$[U,\mathcal H_R] = ie\hbar c\sum_{\alpha\beta}(\vec\alpha.\vec E)_{\alpha\beta}\ c^+_\alpha c_\beta$$

T-7

Calcul de $[U, W_0]$

D'après la formule générale (T23, page VII, 7)

$$[U, W_0] = \sum_{\alpha\beta} [\mathcal{U}, e\phi_0]_{\alpha\beta}\, c_\alpha^+ c_\beta$$
$$+ \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} [\mathcal{U}_{\alpha\beta}, (e\phi_0)_{\gamma\delta}]\, c_\alpha^+ c_\gamma^+ c_\delta c_\beta$$

Mais $(e\phi_0)_{\gamma\delta}$ est un nombre qui commute avec $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$. Donc la 2ème ligne donne 0. Quant à la 1ère

$$[\mathcal{U}, e\phi_0]_{\alpha\beta} = [c\vec{\alpha}\,\vec{\pi}_t, e\,\phi_0] = ie\hbar c\, \vec{\alpha}.\vec{E}_0$$

Finalement, en regroupant les 2 résultats précédents

$$[U, W] = ie\hbar c \sum_{\alpha\beta} (\vec{\alpha}.\vec{E}_t)_{\alpha\beta}\, c_\alpha^+ c_\beta$$

$[U, W]$ est donc simplement l'opérateur à 1 particule associé en seconde quantification à

$$[\mathcal{U}, \mathcal{W}] = ie\hbar c\, \vec{\alpha}.\vec{E}_t$$

T-8

Calcul de $[U,[U,W]]$ Théorie à N particules

Toujours d'après T23, page VII-7, on obtient

$$[U,[U,W]] = \sum_{\alpha\beta} \left([\mathcal{U},[\mathcal{U},\mathcal{W}]]\right)_{\alpha\beta}\, c_\alpha^+ c_\beta \; +$$
$$\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} [\mathcal{U}_{\alpha\beta}, [\mathcal{U},\mathcal{W}]_{\gamma\delta}]\, c_\alpha^+ c_\gamma^+ c_\delta c_\beta$$

1ère ligne : Même résultat que la théorie à 1 particule

2ème ligne : Terme nouveau

Calcul du commutateur de la 2ème ligne

$$ie\hbar c^2 \left[\left(\vec{\alpha}.(\vec{p}-e\vec{A}_0-e\vec{A})\right)_{\alpha\beta}, \left(\vec{\alpha}.(\vec{E}_0+\vec{E})\right)_{\gamma\delta}\right]$$

Seul $(\vec{\alpha}.\vec{A})_{\alpha\beta}$ et $(\vec{\alpha}.\vec{E})_{\gamma\delta}$ ne commutent pas car ils restent des opérateurs vis à vis des photons. En utilisant les développements de $\vec{A}$ et $\vec{E}$ en $a_{k\varepsilon}$ et $a^+_{k\varepsilon}$ et les commutateurs T2, on obtient pour ce terme

$$-\sum_{k\varepsilon} \frac{e^2\hbar^2 c^2}{2\varepsilon_0 L^3} \left[\left(\vec{\varepsilon}.\vec{\alpha}\, e^{i\vec{k}.\vec{r}}\right)_{\alpha\beta} \left(\vec{\varepsilon}.\vec{\alpha}\, e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right)_{\gamma\delta} + \vec{k} \rightleftarrows -\vec{k}\right]$$

T-9

Réduction de $c_\alpha^+ c_\gamma^+ c_\delta c_\beta$

Réintroduisons la distinction entre les c et les b. Par suite du caractère non diagonal de $\vec{\alpha}$, le produit $c_\alpha^+ c_\beta$ (associé à $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$) est, soit $c_\alpha^+ b_\beta^+$, soit $b_\alpha c_\beta$. De même, le produit $c_\gamma^+ c_\delta$ (associé à $(\vec{\alpha}.\vec{E}_t)_{\gamma\delta}$) est, soit $c_\gamma^+ b_\delta^+$, soit $b_\gamma c_\delta$.

Finalement, $c_\alpha^+ c_\gamma^+ c_\delta c_\beta$ comporte en fait 4 termes

$c_\alpha^+ c_\gamma^+ b_\delta^+ b_\beta^+$ crée $2e^+$ et $2e^-$
↳ valeur moyenne nulle dans $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}_1$

$b_\alpha b_\gamma c_\delta c_\beta$ détruit $2e^+$ et $2e^-$
↳ valeur moyenne nulle dans $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}_1$

$c_\alpha^+ b_\gamma c_\delta b_\beta^+$

$b_\alpha c_\gamma^+ b_\delta^+ c_\beta$

Seules, les 2 dernières lignes peuvent donner une contribution dans $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}_1$

T-10

Valeur moyenne du nouveau terme dans $\mathcal{E}_0$ (vide)

Valeur moyenne nulle. Dans la 3ème ligne, c_δ détruit un électron qui n'existe pas. Idem pour c_β dans la 4ème ligne

Valeur moyenne du nouveau terme dans $\mathcal{E}_1$ (multiplicité à 1 particule)

$$P_1 c_\alpha^+ b_\gamma c_\delta b_\beta^+ P_1 = -P_1 c_\alpha^+ c_\delta \underbrace{b_\gamma b_\beta^+}_{= \delta_{\gamma\beta} - b_\beta^+ b_\gamma} P_1$$

$b_\beta^+ b_\gamma$ agissant dans P_1 donne 0 (destruction d'un positron γ qui n'existe pas)

$$P_1 c_\alpha^+ b_\gamma c_\delta b_\beta^+ P_1 = -\delta_{\gamma\beta}\, P_1 c_\alpha^+ c_\delta P_1$$

En revenant à l'élément de matrice du commutateur (voir T8), on a

$$\sum_{\gamma\beta} \left[\left(\vec{\varepsilon}.\vec{\alpha}\, e^{i\vec{k}.\vec{r}}\right)_{\alpha\beta} \left(\vec{\varepsilon}.\vec{\alpha}\, e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right)_{\gamma\delta} \delta_{\beta\gamma} + \vec{k} \rightleftarrows -\vec{k}\right]$$
$$= 2\left(\vec{\varepsilon}.\vec{\alpha}\right)^2_{\alpha\delta} = 2\delta_{\alpha\delta}$$

T-11

Finalement, on obtient pour la contribution de la 3ème ligne de T9

$$+\sum_{k\varepsilon} \frac{e^2\hbar^2 c^2}{\varepsilon_0 L^3} P_1 \underbrace{\sum_\alpha c^+_\alpha c_\alpha}_{N_e \text{ : nbre total de } e^-} P_1$$

$P_1 N_e P_1 = P_1$ car $N_e = 1$ dans $\mathcal{E}_1$

Le calcul de la 4ème ligne de T-9 conduit à 1 résultat identique

Conclusion pour $[U,[U,W]]$

Le terme nouveau introduit par la théorie à 1 particule dans le calcul de $[U,[U,W]]$ s'écrit donc finalement

$$+\sum_{k\varepsilon} \frac{2e^2\hbar^2 c^2}{\varepsilon_0 L^3} P_1$$

Il faut en tenir compte car le vide n'est pas affecté par $[U,[U,W]]$

T-12

Récapitulation pour l'hamiltonien effectif dans $\mathcal{E}_1$ (théorie à N particules)

C'est l'hamiltonien effectif à 1 particule associé en seconde quantification à

$$\mathcal{H}_{eff} = mc^2 + \mathcal{H}_R + e\phi_0(\vec{r}) + V_{coulomb}$$
$$+ \frac{\vec{\Pi}_t^2}{2m} - \frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma}.\vec{B}_t(\vec{r})$$
$$+ \frac{e\hbar^2}{8m^2c^2}\Delta\phi_0 + \frac{e\hbar}{8m^2c^2}\vec{\sigma}.\left[\vec{\Pi}_t\times\vec{E}_t - \vec{E}_t\times\vec{\Pi}_t\right]$$
$$-\sum_{k\varepsilon}\frac{e^2\hbar^2}{8m^2c^2\varepsilon_0 L^3} - \frac{1}{8m^3c^2}\left[\vec{\Pi}_t^2 - e\hbar\vec{\sigma}.\vec{B}_t\right]^2$$

Différence avec la théorie à 1 particule : Différence de signe pour le terme

$-\sum_{k\varepsilon}\frac{e^2\hbar^2}{8m^2c^2\varepsilon_0 L^3}$ (voir T-5)

Le signe correct est le signe $-$ et non $+$

Ce terme peut d'ailleurs s'écrire aussi (voir la définition de $\mathcal{E}_v^0$ en T 12 page IV-4)

$$-\sum_{k\varepsilon}\frac{e^2\hbar^2}{8m^2c^2\varepsilon_0 L^3} = -\sum_{k\varepsilon}\mathcal{E}_v^0\,\frac{\hbar\omega}{2mc^2}$$

T-13

Identification des différents termes de $\mathcal{H}_{eff}$

mc^2 : énergie au repos

$\mathcal{H}_R$: énergie des photons

$e\phi_0(\vec{r})$: couplage avec le potentiel électrostatique extérieur

$V_{Coulomb}$: Self-énergie électrostatique.

$\frac{\vec{\Pi}_t^2}{2m}$: énergie cinétique

$-\frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma}.\vec{B}_t$: couplage du moment magnétique de spin avec le champ magnétique total

$\frac{e\hbar^2}{8m^2c^2}\Delta\phi_0$: terme de Darwin

$\frac{e\hbar}{8m^2c^2}\vec{\sigma}.\left[\vec{\Pi}_t\times\vec{E}_t-\vec{E}_t\times\vec{\Pi}_t\right]$: couplage spin-orbite

$-\sum_{k\varepsilon}\mathcal{E}_v^0\frac{\hbar\omega}{2mc^2}$: Correction à la self-énergie (effets relativistes et à plusieurs particules)

$-\frac{1}{8m^3c^2}\left[\vec{\Pi}_t^2 - e\hbar\vec{\sigma}.\vec{B}_t\right]^2$: Correction "masse vitesse"

T-14

Discussion physique

Modification du "vide" par la présence d'un e

Dans le "vide", tous les états $E<0$ sont occupés. Seules sont observables les déviations par rapport au vide.

Quand on rajoute un e^- d'énergie $E>0$ par suite du principe de Pauli, les électrons du "vide" dans le même état de spin que lui ne peuvent se trouver au même endroit.

Le principe de Pauli introduit des corrélations entre les positions de 2 fermions dans le même état de spin. Corrélations existant même en l'absence de toute interaction et liées uniquement au caractère antisymétrique de la fonction d'onde.

Par sa seule présence, et sans qu'il interagisse avec eux, un électron $E>$ repousse donc les électrons du vide dans le même état de spin. La charge totale est bien sûr conservée, mais il y a apparition d'une distribution de charge délocalisée autour de l'électron.

T-15

Expression quantitative de l'idée précédente

Etude de la fonction de corrélation de la densité $\langle \rho(\vec{r})\rho(\vec{r}\,')\rangle = G(\vec{r}-\vec{r}\,')$

- Calcul dans la théorie à 1 particule
- Calcul dans la théorie à N particule

(Voir V. WEISSKOPF, Phys. Rev. 56, 72 (1939))

- Dans le 1er cas (théorie à 1 particule), on trouve $e^2\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$: charge ponctuelle
- Dans le 2ème cas (théorie à N particule) on trouve une fonction de largeur $\hbar/mc$ qui s'exprime à partir d'une fonction de Henkel de 1ère espèce

Distribution de charge délocalisée s'étendant sur des dimensions de l'ordre de la longueur d'onde de Compton $\hbar/mc$

Conclusion : dans la théorie à N particules, à un électron d'énergie $E>0$ est associé une distribution de charge délocalisée sur un volume de l'ordre de $(\hbar/mc)^3$

T-16

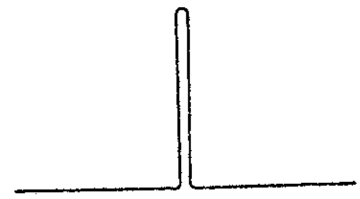

FIG. 1a. Schematic charge distribution of the electron.

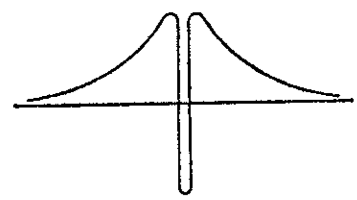

FIG. 1b. Schematic charge distribution of the vacuum electrons in the neighborhood of an electron.

Figure extraite de l'article de V. WEISSKOPF cité plus haut

T-17

Interprétation du terme de Darwin

Lorsqu'un potentiel électrostatique externe ϕ_0 interagit avec un électron d'énergie $E>0$, il interagit en fait avec la distribution de charge délocalisée décrite précédemment. Il faut donc ajouter à $e\phi_0(\vec{r})$ un terme faisant intervenir les dérivées secondes de $e\,\phi_0$ multipliées par le carré de la dimension de la distribution de charge, c-à-d $\hbar^2/m^2c^2$. On retrouve ainsi le terme de Darwin $\frac{e\hbar^2}{8m^2c^2}\,\Delta\phi_0$

Analogie avec le moyennage de ϕ_0 dû à la vibration de e dans les fluctuations du vide. Mais la délocalisation de l'électron a ici une origine autre que les fluctuations du vide. C'est la corrélation spatiale avec les électrons du vide associée au principe de Pauli.

Remarque : on ne tient pas compte ici de la perturbation des électrons du vide par le potentiel ϕ_0 appliqué. Effet apparaissant aux ordres supérieurs (polarisation du vide)

T-18

Réduction de la self-énergie électrostatique.

La délocalisation de la charge discutée plus haut est également responsable d'une réduction de la self-énergie électrostatique

Effet non calculé ici puisqu'on ne tient pas compte de Vcoulomb aux ordres supérieurs à 1 (de toutes façons, la coupure à $\hbar k_M \ll mc^2$ introduit dans le calcul de Vcoulomb une longueur caractéristique $1/k_M \gg \hbar/mc$)

Résultats du calcul complet (tenant compte des modes relativistes $\hbar\omega \gtrsim mc^2$ la divergence de la self-énergie électrostatique passe d'une divergence linéaire

$$c^2 k_M = \alpha\, mc^2 \cdot \frac{\hbar c k_M}{mc^2}$$

à une divergence logarithmique

$$\frac{\alpha}{\pi}\, mc^2 \,\mathrm{Log}\,\frac{\hbar c k_M}{mc^2}$$

T-19

Le moment magnétique de spin

Le calcul précédent a fait apparaître à l'ordre 2 un moment magnétique de spin avec un facteur $g = 2$

Impossibilité de comprendre ce moment magnétique comme résultant de la rotation d'un corps chargé sur lui-même (on trouverait $g = 1$)

Importance des effets à plusieurs particules. La présence d'un électron $E > 0$ dans un état de spin $|\uparrow\rangle$ induit une distribution de charge autour de lui (effet du principe de Pauli). Cette distribution de charge n'est pas statique. Elle tourne autour de l'électron (dans le sens direct si le spin est dans l'état $\uparrow$). Contribution de cette circulation de charge au moment magnétique de l'ensemble ? (Problème à approfondir)

T-20

Terme $-\sum_{k\varepsilon} \frac{E_v^0 \hbar\omega}{2mc^2}$

Nouveau terme de self énergie lié aux effets à plusieurs particules et aux relations de commutation des champs quantiques.

Il apparaît avec un signe $-$ (et non avec un signe $+$ comme c'est le cas dans la théorie à 1 particule)

On retrouve là encore que les effets à plusieurs particules réduisent la self energie calculée dans la théorie à une particule.

Résultat du calcul complet (tenant compte des modes $\hbar\omega \gtrsim mc^2$) : la divergence de la self-énergie totale (électrostatique + celle due aux fluctuations du vide + magnétique) est logarithmique.

T-21

Couplage spin-orbite

Calculons tout d'abord l'interaction du moment magnétique de spin $\vec{M}_S$ avec le champ magnétique motionnel $\vec{B}_{mot}$ "vu" par le spin par suite de son déplacement à la vitesse $\vec{v}$ dans le champ électrique total $\vec{E}_t$: $-\vec{M}_S \cdot \vec{B}_{mot}$

$$\vec{B}_{mot} = -\frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E}_t$$

Or $\vec{v} = \frac{\vec{\Pi}_t}{m}$, et l'opérateur hermitique associé à $\vec{v} \times \vec{E}_t$ est

$$\frac{1}{2m}\left(\vec{\Pi}_t \times \vec{E}_t - \vec{E}_t \times \vec{\Pi}_t\right)$$

En remplaçant $\vec{M}_S$ par $\frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma}$, on trouve

$$-\vec{M}_S \cdot \vec{B}_{mot} = \frac{e\hbar}{4m^2c^2}\vec{\sigma}\left[\vec{\Pi}_t \times \vec{E}_t - \vec{E}_t \times \vec{\Pi}_t\right]$$

résultat qui coïncide avec celui de T.12 à un facteur 2 près.

<u>Origine de ce facteur 2</u> : le référentiel au repos de l'électron n'est pas un référentiel d'inertie, et il apparaît dans ce référentiel un couple d'inertie, d'origine cinématique, et dont il faut tenir compte (précession de Thomas)