Etude des corrections relativistes par la méthode de l'hamiltonien effectif (suite)

Buts de ce cours.

- Poursuivre la discussion des corrections relativistes.
- Calculer explicitement l'hamiltonien effectif décrivant ces corrections en suivant la méthode exposée plus haut.

Plan

③ Hamiltonien d'interaction V en seconde quantification

Règles de sélection

Couplages induits par V entre multiplicités propres de H_0 (T1 à T6)

④ Expression de Heff à l'ordre 3 inclus en V (T7 à T-12)

⑤ Calcul explicite de Heff (T-13)

Ordre 0 et 1 (T-14)

Ordre 2 (T-15 à T-21)

Un intermédiaire de calcul commode pour l'ordre 3 (T22 à T25)

Hamiltonien d'interaction V en seconde quantification. [T1]

$$V = U + W + W_{coulomb}$$

$$\begin{cases} U = \int d^3r\, \Psi^+(\vec{r})\, \mathcal{U}\, \Psi(\vec{r}) \\ W = \int d^3r\, \Psi(\vec{r})\, \mathcal{W}\, \Psi(\vec{r}) \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{U} = c\vec{\alpha}.\vec{\Pi}_t = c\vec{\alpha}.\left(\vec{p} - e\vec{A}_0(\vec{r}) - e\vec{A}(\vec{r})\right)$$

$$\mathcal{W} = e\phi_0(\vec{r}) + \mathcal{H}_R$$

(Voir T3 pour $W_{coulomb}$)

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_k \left(a_{ok}\, u_{ok}(\vec{r}) + b^+_{ok}\, v_{o\bar{k}}(\vec{r})\right)$$

$$\Psi^+(\vec{r}) = \sum_k \left(a^+_{ok}\, u^*_{o\bar{k}}(\vec{r}) + b_{ok}\, v^*_{o\bar{k}}(\vec{r})\right)$$

Expression de U

Comme les seuls éléments de matrice de $\mathcal{U}$ sont entre u_0 et v_0, il vient

$$U = \sum_{kk'}\left(\langle v_{o\bar{k}'}|\mathcal{U}|u_{ok}\rangle\, b_{ok'}\, a_{ok} + \langle u_{ok}|\mathcal{U}|v_{o\bar{k}'}\rangle\, a^+_{ok}\, b^+_{ok'}\right)$$

U détruit ou crée une paire e^+, e^-

Couplages induits par U [T-2]

Règle de sélection $\Delta n = \pm 2$

U couple donc des multiplicités adjacentes rangées sur une même colonne verticale du tableau T-21 (page VI-6)

Conservation de la charge globale mais non du nombre total de particules

Expression de W

Les seuls éléments de matrice non nuls de $\mathcal{W}$ sont entre 2 u_0 ou 2 v_0

$$W = \sum_{kk'}\left(\langle u_{ok'}|\mathcal{W}|u_{ok}\rangle\, a^+_{ok'}\, a_{ok} + \langle v_{o\bar{k}'}|\mathcal{W}|v_{o\bar{k}}\rangle\, b_{ok'}\, b^+_{ok}\right)$$

W ne change pas le nombre total de particules ! N'agit qu'à l'intérieur de chaque multiplicité

Cas particulier de $\mathcal{H}_R$

$\mathcal{H}_R$ n'agit que sur les photons.

Opérateur unité dans l'espace de Fock des électrons et positrons.

Cas particulier de $W_{coulomb}$ [T3]

Par seconde quantification de $V_{coulomb}$, on obtient

$$W_{coulomb} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\iint d^3r\, d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

avec $\rho(\vec{r}) = \Psi^+(\vec{r})\Psi(\vec{r})$

Energie électrostatique de la distribution de charges

$W_{coulomb}$ conserve la charge globale mais peut faire varier le nombre total de particules de $\Delta n = 0, \pm 2, \pm 4$

$W_{coulomb}$ n'est pas diagonal comme l'opérateur $V_{coulomb}$ dont il est issu

Dans les multiplicités à 2 particules ($1e^+, 1e^-$; $2e^+$, $2e^-$) la restriction de $W_{coulomb}$ à ces multiplicités fait apparaître l'interaction de Coulomb instantanée entre les 2 particules

(T4) Simplification

On s'intéresse ici à la multiplicité $\mathcal{E}_1$ à 1e

On ne tiendra pas compte de la différence entre $V_{coulomb}$ et $W_{coulomb}$. On ignorera donc tous les effets nouveaux venant corriger l'énergie du champ électrostatique propre de l'électron et liés aux positrons (créations virtuelles de paires e^+-e^-)

Ces effets sont en effet très petits à la limite faiblement relativiste étudiée ici. Pour $\hbar\omega \gtrsim mc^2$, ils sont responsables de plusieurs corrections intéressantes :

- diminution de la divergence de la self-énergie électrostatique
  Divergence linéaire en k_M → logarithmique
- Renormalisation de la charge
- Polarisation du vide

Possibilité également d'utiliser la jauge de Lorentz au lieu de la jauge de Coulomb (interactions électrostatiques résultant de l'échange de photons "longitudinaux" et "temporels")

Jusqu'à quel ordre faut-il pousser le calcul ? [T-5]

Ordre 0 en V $\quad H_0 = mc^2(N_e + N_p)$

↳ ordre "-2" en $1/c$
ordre "-1" en $1/m$

Ordre 1 en V

Restriction de V à la multiplicité $\mathcal{E}_1$

↳ ordre 0 en $1/c$ et $1/m$

Ordre 2 en V

1 dénominateur d'énergie en $\frac{1}{mc^2}$

2 numérateurs en c (provenant de $\mathcal{U} = c\vec{\alpha}.\vec{\Pi}_\perp$)

↳ ordre 0 en $1/c$, ordre 1 en $1/m$

Ordre 3 en V

2 dénominateurs d'énergie : $\frac{1}{m^2c^4}$

3 numérateurs $\mathcal{U}(\sim c)$, $\mathcal{U}(\sim c)$, $\mathcal{W}$

↳ ordre 2 en $1/c$, ordre 2 en $1/m$

On se limitera à cet ordre

Voir cependant remarque (T-26) page VII-7

Une formule utile relative aux matrices α_i de Dirac [T-6]

A partir de $(\alpha_i) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \sigma_i \\ \hline \sigma_i & 0 \end{array}\right)$

on calcule aisément

$$(\alpha_i\alpha_j - \alpha_j\alpha_i) = \left(\begin{array}{c|c} \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i & 0 \\ \hline 0 & \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i \end{array}\right)$$

Or, les matrices σ_i de Pauli satisfont à

$$\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i\sum_k \varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

Donc
$$\begin{cases} \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij} \\ \alpha_i\alpha_j - \alpha_j\alpha_i = 2i\sum_k \varepsilon_{ijk}\sigma_k \end{cases}$$

↳ $$\alpha_i\alpha_j = \delta_{ij} + i\sum_k \varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

On en déduit que si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont 2 vecteurs (n'agissant pas sur les degrés de liberté internes) :

$$(\vec{\alpha}.\vec{A})(\vec{\alpha}.\vec{B}) = \vec{A}.\vec{B} + i\vec{\sigma}.(\vec{A}\times\vec{B})$$

T-7

Expression de H_{eff} à l'ordre 3 inclus en V

- Nécessité de pousser ce calcul jusqu'à l'ordre 3 inclus en V pour obtenir H_{eff} à l'ordre 2 inclus en $1/m$ et $1/c$

Retour aux formules générales du cours II (voir T-10 page II-3)

- Simplification importante

Les multiplicités propres de H_0 sont toutes complètement dégénérées. Une seule énergie non-perturbée E_i pour chaque multiplicité $\mathcal{E}_i$

$\text{—}\ \mathcal{E}_j$ $\qquad$ P_i : projecteur sur $\mathcal{E}_i$

$\text{—}\ \mathcal{E}_i$ $\qquad$ $H_0 P_i = P_i H_0 = E_i P_0$

$$V = \underbrace{\sum_i P_i W P_i}_{\text{Partie "diagonale" de } V} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} P_i U P_j}_{\text{Partie "non-diagonale" de } V}$$

T-8

Résultats du calcul

(avec les étapes intermédiaires importantes du calcul)

Ordre 0

$$P_i H_{eff}^{(0)} P_i = P_i H_0 P_i = E_i P_i$$

Ordre 1

- Expression de $P_i H_{eff}^{(1)} P_i$

$$P_i H_{eff}^{(1)} P_i = P_i W P_i$$

- Calcul de S_1 (nécessaire pour l'ordre 2)

$$S_1 = \sum_i \sum_{j \neq i} i \, \frac{P_i U P_j}{E_j - E_i}$$

Ordre 2

- Expression de $P_i H_{eff}^{(2)} P_i$

$$P_i H_{eff}^{(2)} P_i = \sum_{j \neq i} \frac{P_i U P_j U P_i}{E_i - E_j}$$

T-9

Ordre 2 (suite)

- Calcul de S_2 (nécessaire pour l'ordre 3)

$$S_2 = \sum_i \sum_{j \neq i} -i \, \frac{P_i [U, W] P_j}{(E_j - E_i)^2} + \sum_i \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i,j} \frac{i}{2} \frac{1}{E_j - E_i} P_i U P_k U P_j \times \left(\frac{1}{E_j - E_k} + \frac{1}{E_i - E_k} \right)$$

Ordre 3 : Calcul de $P_i H_{eff}^{(3)} P_i$

$$P_i H_{eff}^{(3)} P_i = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \frac{1}{(E_i - E_j)^2} \left\{ P_i [U, W] P_j U P_i - P_i U P_j [U, W] P_i \right\}$$
$$+ \frac{1}{3} \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i,j} P_i U P_j U P_k U P_i \times \left\{ \frac{2}{(E_i - E_k)(E_i - E_j)} + \frac{1}{(E_i - E_j)(E_j - E_k)} + \frac{1}{(E_i - E_k)(E_k - E_j)} \right\}$$

T-10

Simplifications supplémentaires pour la théorie à 1 particule

- $\mathcal{H}_0$ n'a alors que 2 multiplicités propres $\mathcal{E}_+$ et $\mathcal{E}_-$
- les termes $\sum_i \sum_{j \neq i} \sum_{k \neq i,j}$ disparaissent
- le dénominateur $\frac{1}{E_+ - E_-}$ est une constante $\frac{1}{2mc^2}$ ainsi que $\frac{1}{(E_+ - E_-)^2}$

On peut alors faire apparaître des relations de fermeture intermédiaire et obtenir une forme <u>opératorielle</u> pour $\mathcal{H}_{eff}$

$$P_+ \mathcal{H}_{eff} P_+ = mc^2 P_+ + P_+ \mathcal{W} P_+ + P_+ \mathcal{V}_{coulomb} + \frac{1}{2mc^2} P_+ \mathcal{U}^2 P_+ - \frac{1}{8m^2c^4} P_+ \left[\mathcal{U}, [\mathcal{U}, \mathcal{W}] \right] P_+$$

T-11

Simplifications supplémentaires dans la théorie à N particules quand on néglige la différence entre $V_{Coulomb}$ et $W_{Coulomb}$

- La partie non diagonale, U, de V ne couple alors que des multiplicités adjacentes sur une même verticale du tableau T21 page VI-6 : $\Delta n = \pm 2$

On a alors $\dfrac{1}{E_i - E_j} = \pm \dfrac{1}{2mc^2}$

et $\dfrac{1}{(E_i - E_j)^2} = \dfrac{1}{4m^2c^2}$

Possibilité de faire apparaître des relations de fermeture intermédiaires et d'obtenir des formes opératorielles

- Avec 3 opérateurs U, on ne peut partir de E_i et revenir à E_i

$$\underbrace{P_i\, U\, P_j}_{\Delta n = \pm 2}\ \underbrace{U\, P_k}_{\Delta n = \pm 2}\ \underbrace{U\, P_i}_{\Delta n = \pm 2} \longrightarrow (\Delta n)_{total} = \pm 2, \pm 6$$

La dernière ligne de (T-9) ne contribue donc pas.

T-12

Expression finale de Heff

(quand on néglige la différence entre $V_{Coulomb}$ et $W_{Coulomb}$)

$$\begin{aligned} P_1 H_{eff} P_1 = \ & mc^2\, P_1 \\ & + P_1 W P_1 + P_1 V_{Coulomb} \\ & - \frac{1}{2mc^2} P_1 U^2 P_1 \\ & - \frac{1}{8m^2c^4} P_1 \left[U, [U, W] \right] P_1 \end{aligned}$$

Noter les analogies et différences avec $P_+ \mathcal{H}_{eff} P_+$ (voir T-10)

Noter en particulier le signe $-$ dans le terme d'ordre 2 : $-\frac{1}{2mc^2} P_1 U^2 P_1$

T-13

Calcul explicite de l'hamiltonien effectif

- On va calculer parallèlement

$P_+ \mathcal{H}_{eff} P_+$ (Equ. de Dirac à 1 particule) voir T-10

$P_1 H_{eff} P_1$ (Equ. de Dirac à N particules) voir T-12

pour voir à partir de quel ordre, et dans quelles conditions, les 2 expressions diffèrent.

- La discussion physique des termes obtenus aux différents ordres sera ensuite faite dans le cadre de la théorie à N particules (seul, $P_1 H_{eff} P_1$, a un sens physique clair).

Quand il y a coïncidence entre $P_+ \mathcal{H}_{eff} P_+$ et $P_1 H_{eff} P_1$, c'est que les transitions virtuelles entre multiplicités propres $\mathcal{E}_+$ et $\mathcal{E}_-$ de $\mathcal{H}_0$ sous l'effet de V "simulent" bien les effets à plusieurs particules décrits par $P_1 H_{eff} P_1$.

T-14

Ordre 0 et ordre 1

Résultat très simple et identique pour les 2 théories

Restriction à $\mathcal{E}_+$ (dans le 1er cas), à $\mathcal{E}_1$ (dans le 2ème) de l'hamiltonien à 1 particule :

$$mc^2 + e\phi_0(\vec{r}) + \mathcal{H}_R + V_{Coulomb}$$

mc^2 : énergie au repos de l'électron

$e\phi_0(\vec{r})$: interaction avec le potentiel électrostatique extérieur

$\mathcal{H}_R$: énergie des photons transverses

$V_{Coulomb}$: énergie du champ électrostatique propre de la particule.

T 15

Calcul de l'ordre 2 pour $P_+ \mathcal{H}_{eff} P_+$

D'après (T-10), il faut calculer

$$\frac{1}{2mc^2}\,\mathcal{U}^2 \quad \text{avec} \quad \mathcal{U} = c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\Pi}_t$$

$$\vec{\Pi}_t = \vec{p} - e\vec{A}_t(\vec{r}) \longleftarrow \text{Potentiel vecteur total}$$

$$\vec{A}_t(\vec{r}) = \vec{A}_o(\vec{r}) + \vec{A}(\vec{r})$$

$\vec{A}_o$: Potentiel vecteur statique appliqué ; $\vec{A}$: Potentiel vecteur du rayonnement quantifié

D'après (T-6)

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{\Pi}_t)(\vec{\alpha}\cdot\vec{\Pi}_t) = \vec{\Pi}_t^{\,2} + i\,\vec{\sigma}\cdot(\vec{\Pi}_t\times\vec{\Pi}_t)$$

Or

$$\vec{\Pi}_t\times\vec{\Pi}_t = \underbrace{\vec{p}\times\vec{p}}_{=0} + e^2\,\underbrace{\vec{A}_t\times\vec{A}_t}_{=0} - e\,(\underbrace{\vec{p}\times\vec{A}_t}_{= -\vec{A}_t\times\vec{p} + \frac{\hbar}{i}\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{A}_t}_{\vec{B}_t}} + \vec{A}_t\times\vec{p})$$

$\vec{B}_t$ champ magnétique total

Donc

$$\vec{\Pi}_t\times\vec{\Pi}_t = -\frac{e\hbar}{i}\,\vec{B}_t$$

T 16

Récapitulation

$$\frac{1}{2mc^2}\,\mathcal{U}^2 = \frac{\vec{\Pi}_t^{\,2}}{2m} - \frac{e\hbar}{2m}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{B}_t$$

On peut réécrire le dernier terme

$$-g\,\mu_B\,\frac{\vec{S}}{\hbar}\cdot\vec{B}_t \qquad \text{avec}$$

$$g = 2 \qquad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \qquad \vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$$

g : Facteur g ; μ_B : Magnéton de Bohr ; $\vec{S}$: Spin

Conclusion : A l'ordre 2, et dans la théorie à 1 particule, on voit apparaître :

- l'énergie cinétique $\frac{\vec{\Pi}_t^{\,2}}{2m}$
- le spin $\frac{1}{2}$ de l'électron
- le moment magnétique de spin de l'électron, avec le facteur $g = 2$, interagissant avec le champ magnétique total $\vec{B}_t$ (champ statique appliqué $\vec{B}_o$ + champ magnétique $\vec{B}$ du rayonnement quantifié).

T-17

Calcul de l'ordre 2 pour $P_1 H_{eff} P_1$

Il faut partir de l'expression de U en seconde quantification (voir T-1), puis calculer (d'après T-12) $-\frac{1}{2mc^2} P_1 U^2 P_1$

D'après l'expression (T-1) de U, il y a 4 types de termes dans U^2

$$b_{ok'''}\,a_{ok''}\,b_{ok'}\,a_{ok}$$

$$a^+_{ok'''}\,b^+_{ok''}\,b_{ok'}\,a_{ok}$$

$$b_{ok'''}\,a_{ok''}\,a^+_{ok}\,b^+_{ok'}$$

$$a^+_{ok'''}\,b^+_{ok''}\,a^+_{ok}\,b^+_{ok'}$$

A l'intérieur de $\mathcal{E}_1$ (multiplicité à $1e^-$), seule, la 3ème ligne a un élément de matrice non nul (à condition en plus que $k''' = k'$: création et destruction d'un positron)

Dans les 2 premières lignes, $b_{ok'}$ détruit un positron qui n'existe pas. Dans la 4ème ligne, il y a création de 2 positrons et 2 électrons ($\Delta n = 4$)

T-18

On en déduit que

$$-\frac{1}{2mc^2} P_1 U^2 P_1 = -\frac{1}{2mc^2}\sum_k\sum_{k'}\sum_{k''} \langle u_{ok}|\mathcal{U}|v_{o\bar{k}'}\rangle\langle v_{o\bar{k}'}|\mathcal{U}|u_{ok''}\rangle$$

$$P_1\, b_{ok'}\,a_{ok''}\,a^+_{ok}\,b^+_{ok'}\,P_1$$

$b_{ok'}$ anticommute avec $a_{ok''}$ et a^+_{ok}, donc commute avec $a_{ok''}a^+_{ok}$. On peut donc faire apparaître $b_{ok'}b^+_{ok'} = 1 - b^+_{ok'}b_{ok'}$. Comme $b_{ok'}P_1 = 0$, il vient finalement

$$P_1\, b_{ok'}\,a_{ok''}\,a^+_{ok}\,b^+_{ok'}\,P_1 = P_1\,a_{ok''}\,a^+_{ok}\,P_1$$

Or $\quad a_{ok''}\,a^+_{ok} = \delta_{k''k} - a^+_{ok}\,a_{ok''}$

Contribution de $\delta_{k''k}$

Déplacement global, Δ, de $\mathcal{E}_1$ vers le bas

$$\Delta = -\frac{1}{2mc^2}\sum_k\sum_{k'} \langle u_{ok}|\mathcal{U}|v_{o\bar{k}'}\rangle\langle v_{o\bar{k}'}|\mathcal{U}|u_{ok}\rangle$$

$$= -\frac{1}{2mc^2}\sum_k \langle u_{ok}|\mathcal{U}^2|u_{ok}\rangle$$

$$= -\frac{1}{2mc^2}\sum_{k'} \langle v_{o\bar{k}'}|\mathcal{U}^2|v_{o\bar{k}'}\rangle$$

T-19

Contribution de $-a^+_{ok}\, a_{ok''}$

Noter le signe − qui transforme le signe − de $-\frac{1}{2mc^2} P_1 U^2 P_1$ en signe +

$$+\frac{1}{2mc^2} \sum_k \sum_{k''} P_1\, a^+_{ok}\, a_{ok''}\, P_1 \quad \times$$

$$\underbrace{\sum_{k'} \langle u_{ok} | \mathcal{U} | v_{o\bar{k}'} \rangle \langle v_{o\bar{k}'} | \mathcal{U} | u_{ok''} \rangle}$$

$$= \langle u_{ok} | \mathcal{U}^2 | u_{ok''} \rangle$$

(à cause du caractère non diagonal de $\mathcal{U}$)

On obtient finalement pour la contribution du terme en $-a^+_{ok}\, a_{ok''}$

$$\sum_k \sum_{k''} P_1\, a^+_{ok}\, a_{ok''} P_1 \langle u_{ok} | \frac{\mathcal{U}^2}{2mc^2} | u_{ok''} \rangle$$

On reconnait la restriction à $\mathcal{E}_1$ de l'opérateur associé en seconde quantification à l'opérateur à 1 particule étudié plus haut

$$\frac{1}{2mc^2}\, \mathcal{U}^2$$

T-20

Faut-il tenir compte du déplacement global Δ de $\mathcal{E}_1$ vers le bas ?

Seule compte la position de $\mathcal{E}_1$ (multiplicité à 1 e^-) par rapport à $\mathcal{E}_0$ (vide)

Or, si on calcule Heff dans $\mathcal{E}_0$, on trouve, au 2ème ordre en V, le même déplacement global Δ

$$-\frac{1}{2mc^2} P_0 U^2 P_0 = -\Delta$$

En effet, des 4 lignes de T19, seule la 3ème ligne a un élément de matrice non nul dans $\mathcal{E}_0$, et il faut de plus prendre $k' = k'''$, $k = k''$ (création et destruction virtuelles d'une paire e^+, e^-). On retrouve alors sur l'expression Δ donnée en T-18.

Donc, il ne faut pas tenir compte de Δ car $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}_1$ sont déplacés de la même quantité.

T-21

Conclusion pour le calcul à l'ordre 2 en V

On obtient le même hamiltonien effectif à partir de la théorie à 1 particule et à partir de la théorie à N particules.

Cet hamiltonien décrit

- l'énergie cinétique
- l'interaction du moment magnétique de spin avec le champ magnétique total.

T-22

Un intermédiaire de calcul commode pour l'étude de l'ordre 3

Commutateur de 2 opérateurs à une particule en seconde quantification (on ne distinguera pas les c et les b)

$$B = \sum_{\alpha\beta} \mathcal{B}_{\alpha\beta}\, c^+_\alpha c_\beta$$

$$C = \sum_{\gamma\delta} \mathcal{C}_{\gamma\delta}\, c^+_\gamma c_\delta$$

que vaut le commutateur $[B, C]$?

$$BC = \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{B}_{\alpha\beta} \mathcal{C}_{\gamma\delta}\, c^+_\alpha c_\beta c^+_\gamma c_\delta$$

Or $\quad c_\beta c^+_\gamma = \delta_{\beta\gamma} - c^+_\gamma c_\beta$

$$\hookrightarrow BC = \sum_{\alpha\delta} \underbrace{\sum_\beta \mathcal{B}_{\alpha\beta} \mathcal{C}_{\beta\delta}}_{=(\mathcal{B}\mathcal{C})_{\alpha\delta}}\, c^+_\alpha c_\delta$$

$$-\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{B}_{\alpha\beta} \mathcal{C}_{\gamma\delta}\, c^+_\alpha c^+_\gamma c_\beta c_\delta$$

BC = Op. à 1 particule + Op. à 2 particules

$$BC = \sum_{\alpha\beta} (\mathcal{B}\mathcal{C})_{\alpha\beta}\, c_\alpha^+ c_\beta + \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{B}_{\alpha\beta}\mathcal{C}_{\gamma\delta}\, c_\alpha^+ c_\gamma^+ c_\delta c_\beta$$

Un calcul analogue donne, en changeant les indices (muets) dans la $2^{\text{ème}}$ ligne :

$$CB = \sum_{\alpha\beta} (\mathcal{C}\mathcal{B})_{\alpha\beta}\, c_\alpha^+ c_\beta + \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{C}_{\gamma\delta}\mathcal{B}_{\alpha\beta}\, c_\gamma^+ c_\alpha^+ c_\beta c_\delta$$

On anticommute ensuite dans la dernière ligne c_γ^+ et c_α^+, c_β et c_δ, ce qui globalement laisse le signe inchangé

$$CB = \sum_{\alpha\beta} (\mathcal{C}\mathcal{B})_{\alpha\beta}\, c_\alpha^+ c_\beta + \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{C}_{\gamma\delta}\mathcal{B}_{\alpha\beta}\, c_\alpha^+ c_\gamma^+ c_\delta c_\beta$$

Finalement

$$[C,B] = \sum_{\alpha,\beta} [\mathcal{C},\mathcal{B}]_{\alpha\beta}\, c_\alpha^+ c_\beta + \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} [\mathcal{B}_{\alpha\beta},\mathcal{C}_{\gamma\delta}]\, c_\alpha^+ c_\gamma^+ c_\delta c_\beta$$

Conclusion

Le commutateur $[B,C]$ de 2 opérateurs en seconde quantification associés aux opérateurs $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de la théorie à 1 particule est la somme de 2 opérateurs

- d'une part, l'opérateur en seconde quantification associé au commutateur $[\mathcal{B},\mathcal{C}]$ de la théorie à 1 particule.
- d'autre part, un opérateur à 2 particules proportionnel au commutateur $[\mathcal{B}_{\alpha\beta},\mathcal{C}_{\gamma\delta}]$

Si les éléments de matrice $\mathcal{B}_{\alpha\beta}$ et $\mathcal{C}_{\gamma\delta}$ ne demeurent pas des opérateurs vis à vis d'autres variables (comme celle du rayonnement quantifié), le commutateur des 2 nombres $\mathcal{B}_{\alpha\beta}$ et $\mathcal{C}_{\gamma\delta}$ est nul, et $[B,C]$ se calcule simplement à partir de $[\mathcal{B},\mathcal{C}]$

Importance de la quantification du rayonnement

Dans le problème étudié ici, les indices $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, sont relatifs aux états dans lesquels se trouvent les électrons et positrons

Si le rayonnement n'est pas quantifié, $\mathcal{B}_{\alpha\beta}$ et $\mathcal{C}_{\gamma\delta}$ sont des nombres, leur commutateur est nul, et la théorie à N particules n'introduit rien de nouveau dans $[B,C]$ qui ne soit déjà contenu dans $[\mathcal{B},\mathcal{C}]$

Si par contre le rayonnement est quantifié, $\mathcal{B}_{\alpha\beta}$ et $\mathcal{C}_{\gamma\delta}$ restent des opérateurs de rayonnement, dont le commutateur n'est en général pas nul et les résultats des 2 théories sont en général différents.

Remarque après T-5

Si on veut obtenir tous les termes en $\frac{1}{c^2}$, il faut encore tenir compte d'un dernier terme en $\frac{1}{c^2}$ qui apparaît à l'ordre 4 en V

3 dénominateurs d'énergie : $\frac{1}{m^3c^6}$

4 numérateurs $\mathcal{U}$ $(\sim c)$: c^4

$\hookrightarrow$ terme en $1/c^2$

Dans ce terme, seule, la partie non-diagonale U de V intervient (il faut avoir toujours U au numérateur). Pour calculer ce terme, on peut donc faire $W = 0$

Or, les $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ commutent entre eux (ils ne contiennent que $\vec{A}(\vec{r})$ qui commute avec lui même). On montre alors aisément que le dernier terme en $1/c^2$ qui apparaît à l'ordre 4 a la même expression dans les théories à 1 et N particules. Il vaut :

$$-\frac{\mathcal{U}^4}{8m^3c^6} = -\frac{1}{8m^3c^2}\left[\vec{\Pi}_t^{\,2} - e\hbar\,\vec{\sigma}.\vec{B}_t\right]^2$$

Correction "masse-vitesse" qui sera rajoutée aux termes en $1/m^2c^2$ du calcul à l'ordre 3 du § qui suit.