4-11-80 Corrections radiatives stimulées et spontanées pour une particule chargée sans spin (suite et fin)

Buts de ce cours

- Poursuivre la discussion du cours précédent.
- Interpréter les corrections radiatives stimulées calculées précédemment. Montrer qu'elles peuvent être comprises classiquement
- Calculer et interpréter les corrections radiatives spontanées

Suite du plan

⑥ Analyse classique du mouvement d'une particule chargée dans une onde haute fréquence (T1 à T6)

⑦ Interprétation physique des corrections radiatives stimulées (T7 à T11)

⑧ Corrections radiatives spontanées (T12 à T22)

Onde classique monochromatique — T-1

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{i\mathcal{E}}{\sqrt{2}}\left(\vec{\varepsilon}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \vec{\varepsilon}^{\,*} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right)$$

$$\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\varepsilon}^{\,*} = \vec{\varepsilon}^{\,*}\cdot\vec{\varepsilon} = 1$$

Moyenne de $\vec{E}^2$ sur une période

$$\overline{\vec{E}^2(\vec{r},t)} = \frac{\mathcal{E}^2}{2}\left(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\varepsilon}^{\,*} + \vec{\varepsilon}^{\,*}\cdot\vec{\varepsilon}\right) = \mathcal{E}^2$$

$\mathcal{E}$ est le champ efficace

Pour étudier le mouvement de vibration de la particule dans l'onde incidente,

- on néglige la force $e\vec{v}\times\vec{B}$ due au champ magnétique oscillant de l'onde (corrections en v/c)
- on remplace $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ par 1

$$\vec{E}(t) = \frac{i\mathcal{E}}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega t}\,\vec{\varepsilon} - e^{i\omega t}\,\vec{\varepsilon}^{\,*}\right)$$

Etude du mouvement de vibration en l'absence de champs statiques ($E_0 = B_0 = 0$) — T-2

$\vec{\rho}$: déviation de la particule de sa position moyenne

$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{\rho}$: vitesse

Intégration de $m\frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} = e\vec{E}$

$$\begin{cases} \vec{v} = -\dfrac{e\mathcal{E}}{m\omega\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega t}\,\vec{\varepsilon} + e^{i\omega t}\,\vec{\varepsilon}^{\,*}\right) \\ \vec{\rho} = -\dfrac{ie\mathcal{E}}{m\omega^2\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega t}\,\vec{\varepsilon} - e^{i\omega t}\,\vec{\varepsilon}^{\,*}\right) \end{cases}$$

$\vec{\rho}$ vibre en phase avec $\vec{E}$

$$\overline{v} = \overline{\rho} = 0$$

Moyenne du carré du déplacement

$$\overline{\rho^2} = \frac{e^2\mathcal{E}^2}{2m^2\omega^4}\left(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\varepsilon}^{\,*} + \vec{\varepsilon}^{\,*}\cdot\vec{\varepsilon}\right) = \frac{e^2\mathcal{E}^2}{m^2\omega^4}$$

Energie cinétique moyenne de vibration

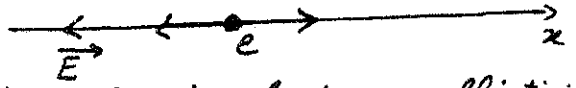
$$\mathcal{E}_v = \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{e^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}$$

T-3

Polarisation linéaire

$\vec{E}$ réel, par exemple $\vec{E} = \vec{e_x}$

Mouvement de vibration rectiligne parallèle à $\vec{E}$

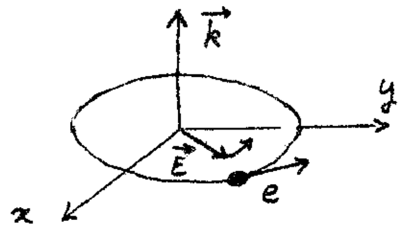


Polarisation circulaire ou elliptique

$\vec{E}$ complexe

par exemple

$\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e_x} + i\vec{e_y})$



Mouvement circulaire uniforme de la particule dans un plan perpendiculaire au vecteur d'onde $\vec{k}$

Boucle de courant possédant un moment magnétique (qui sera calculé plus loin).

T-4

Effet des champs statiques $\vec{E_0}$ et $\vec{B_0}$ sur le mouvement de vibration

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\left[\vec{E}(t) + \vec{E_0}\right] + e\,\vec{v}(t) \times \vec{B_0}$$

La force $e\vec{E_0}$ est statique et modifie très peu le mouvement de vibration

Par contre, comme la vitesse $\vec{v}(t)$ est modulée, la force magnétique $e\,\vec{v}(t) \times \vec{B_0}$ est elle aussi modulée. Elle peut donc perturber la vibration.

Il suffit donc d'écrire

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\,\vec{E}(t) + e\,\vec{v}(t) \times \vec{B_0}$$

Pour obtenir l'effet de $\vec{B_0}$ au 1er ordre en B_0, on remplace, dans $e\,\vec{v}(t) \times \vec{B_0}$, $\vec{v}(t)$ par la solution obtenue en l'absence de $\vec{B_0}$

T-5

Corrections au mouvement de vibration dues à la présence des champs statiques

$$\delta\vec{v}(t) = -i\frac{e^2\mathcal{E}}{m^2\omega^2\sqrt{2}} \times \left(\vec{\varepsilon} \times \vec{B_0}\, e^{-i\omega t} - \vec{\varepsilon}^{\,*} \times \vec{B_0}\, e^{i\omega t}\right)$$

$$\delta\vec{\rho}(t) = \frac{e^2\mathcal{E}}{m^2\omega^3\sqrt{2}} \times \left(\vec{\varepsilon} \times \vec{B_0}\, e^{-i\omega t} + \vec{\varepsilon}^{\,*} \times \vec{B_0}\, e^{i\omega t}\right)$$

Si la polarisation $\vec{\varepsilon}$ n'est pas parallèle à $\vec{B_0}$, le mouvement est modifié

Polarisation linéaire

Le mouvement, initialement rectiligne, devient légèrement elliptique

Polarisation circulaire

- Modification du rayon du cercle parcouru dans le plan $\perp$ à $\vec{k}$
- Apparition d'un mouvement de vibration le long de $\vec{k}$

T-6

Calcul du moment magnétique de la boucle de courant associée au mouvement de vibration

$$\vec{\mu}(\vec{B_0}) = \frac{e}{2m}\overline{\left(\vec{\rho}(t) + \delta\vec{\rho}(t)\right) \times \left(\vec{v}(t) + \delta\vec{v}(t)\right)}$$

On tient compte de l'effet de $\vec{B_0}$ sur le mouvement de vibration

$$\vec{\mu}(\vec{B_0}) = i\,\vec{\varepsilon} \times \vec{\varepsilon}^{\,*}\,\frac{e^3\mathcal{E}^2}{2m^2\omega^3} + \frac{e^4\mathcal{E}^2}{2m^3\omega^4}\left[(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{B_0})\,\vec{\varepsilon}^{\,*} + (\vec{\varepsilon}^{\,*}\cdot\vec{B_0})\,\vec{\varepsilon} - 2\vec{B_0}\right]$$

1ère ligne

Moment magnétique en l'absence de $\vec{B_0}$

N'existe que pour une polarisation circulaire ou elliptique.

Si $\vec{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e_x} + i\vec{e_y})$ $\quad i\,\vec{\varepsilon} \times \vec{\varepsilon}^{\,*} = \vec{e_3}$

2ème ligne

Correction due à la présence de $\vec{B_0}$

Fait apparaître un moment magnétique même pour une polarisation linéaire.

Interprétation physique des corrections radiatives stimulées

T-7

Terme $\mathcal{E}_v^N = \dfrac{e^2 \langle E_{inc}^2 \rangle}{2 m \omega^2}$

Représente l'énergie cinétique de vibration de la particule dans le rayonnement incident

Déplacement en bloc de tous les niveaux qui peut être interprété comme dû à une augmentation de la masse effective $\delta m c^2 = \mathcal{E}_v^N$

Cas où l'intensité du rayonnement incident n'est pas homogène spatialement

$\mathcal{E}_v^N$ dépend de $\vec{r}$; $\mathcal{E}_v^N(\vec{r})$

$\mathcal{E}_v^N(\vec{r})$ joue le rôle d'une énergie potentielle.

La particule est repoussée hors des régions de haute intensité

T-8 Essai de mise en évidence expérimentale du déplacement $\mathcal{E}_v^N$

V-3

Niveaux de Rydberg faiblement liés et pour lesquels l'approximation haute fréquence $\hbar\omega \gg E_L$ peut être bien remplie

Irradiation laser intense de la transition 5S – 38p de Rb

(S. Liberman, J. Pinard
Phys. Rev. A 20, 507 (1979))

Pour une évaluation précise de l'ordre de grandeur des corrections radiatives stimulées des états de Rydberg, voir

C. Fabre thèse d'état Paris 1980
chapitre II

T-9

Termes $\begin{cases} e\,\delta\phi_0(\vec{r}) \\ -\dfrac{e}{2}\left(\delta\vec{A}_0 \cdot \vec{\Pi}_0 + \vec{\Pi}_0 \cdot \delta\vec{A}_0\right) \end{cases}$

Correspondent au moyennage des champs statiques $\vec{E}_0$ et $\vec{B}_0$ sur l'étendue du mouvement de vibration. Ainsi, l'énergie potentielle électrostatique instantanée s'écrit :

$e\,\phi_0(\vec{r}+\vec{\rho})$ où $\begin{cases} \vec{r} : \text{position moyenne} \\ \vec{\rho} : \text{vibration} \end{cases}$

$$e\,\phi_0(\vec{r}+\vec{\rho}) = e\,\phi_0(\vec{r}) + e(\vec{\rho}\cdot\vec{\nabla})\,\phi_0(\vec{r}) + \frac{e}{2}(\vec{\rho}\cdot\vec{\nabla})(\vec{\rho}\cdot\vec{\nabla})\,\phi_0(\vec{r}) + \cdots$$

En utilisant $\overline{\vec{\rho}} = 0$

$$\overline{\vec{\rho}^{\,2}} = \frac{e^2 \mathcal{E}^2}{2 m^2 \omega^4}\left(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\varepsilon}^{\,*} + \vec{\varepsilon}^{\,*}\cdot\vec{\varepsilon}\right)$$

on retrouve bien

$$e\,\overline{\phi_0(\vec{r}+\vec{\rho})} = e\,\phi_0(\vec{r}) + e\,\delta\phi_0(\vec{r})$$

avec $\delta\phi_0(\vec{r}) = \dfrac{e^2 \mathcal{E}^2}{2 m^2 \omega^4}(\vec{\varepsilon}^{\,*}\cdot\vec{\nabla})(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\nabla})\,\phi_0(\vec{r})$

Même calcul pour $\delta\vec{A}_0(\vec{r})$

T-10

Terme

$$-\vec{\mu}\cdot\vec{B}_0 + W_d$$

Peut être réécrit sous la forme

$$-\int_0^1 \vec{\mu}(\lambda\vec{B}_0)\cdot\vec{B}_0\, d\lambda$$

Représente l'énergie d'interaction avec le champ statique $\vec{B}_0$ du moment magnétique, $\vec{\mu}(\vec{B}_0)$, de la boucle de courant associée au mouvement de vibration de la particule

En particulier, W_d représente la contribution du moment magnétique "induit" par la présence de $\vec{B}_0$. Correction de type "diamagnétique".

Conclusion pour les corrections radiatives stimulées

Toutes les corrections radiatives stimulées peuvent être comprises classiquement. On considère le mouvement de vibration de la particule chargée dans le rayonnement incident, mouvement éventuellement corrigé par la présence des champs statiques, et on moyenne les diverses énergies qui apparaissent sur une période $\frac{2\pi}{\omega}$

Description des effets en termes de correction de masse effective, de facteurs de forme électrique et magnétique, de moment magnétique effectif.

Effets spontanés

$$H_{eff}\,(\text{spontanés}) = \underbrace{\tfrac{1}{2}(R+S)}_{H_{f\ell}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(R-S)}_{H_r}$$

$\boxed{H_{f\ell}}$ Identique à H_{eff} (stimulés) au remplacement près de $\mathcal{E}_v^N$ par $\mathcal{E}_v^0$. Même interprétation physique

On sommera ensuite sur les modes. On peut prendre $\vec{\varepsilon}$ réel ($\rightarrow \vec{\varepsilon}\times\vec{\varepsilon}^* = 0$), ce qui fait disparaître le terme en $i\,\vec{\varepsilon}\times\vec{\varepsilon}^*$

$$H_{f\ell} = \mathcal{E}_v^0 + e\,\delta\phi_0(\vec{r}) - \frac{e}{2m}\left[\delta\vec{A}_0(\vec{r}).\vec{\Pi}_0 + \vec{\Pi}_0\,\delta\vec{A}_0(\vec{r})\right] + W_d$$

avec

$$\mathcal{E}_v^0 = \frac{e^2\hbar}{2m\varepsilon_0\omega L^3}\ \frac{1}{2}$$

$$\delta\phi_0(\vec{r}) = \frac{\mathcal{E}_v^0}{m\omega^2}\left(\vec{\varepsilon}.\vec{\nabla}\right)^2\phi_0(\vec{r})$$

$$\vec{\nabla}\times\delta\vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{\mathcal{E}_v^0}{m\omega^2}\left(\vec{\varepsilon}.\vec{\nabla}\right)^2\vec{A}_0(\vec{r})$$

$$W_d = \frac{\mathcal{E}_v^0 e^2}{m^2\omega^2}\left[\vec{B}_0^{\,2} - (\vec{\varepsilon}.\vec{B}_0)^2\right]$$

Terme nouveau

$$H_r = \tfrac{1}{2}(R-S)$$

$$R = \mathcal{E}_v^0 - \frac{\mathcal{E}_v^0}{\hbar\omega}\,\frac{2}{m}\left(\vec{\varepsilon}.\vec{\Pi}_0\right)\left(\vec{\varepsilon}.\Pi_0\right)$$

$$\cdot\ \frac{\mathcal{E}_v^0}{\hbar^2\omega^2}\,\frac{1}{m}\left(\left(\vec{\varepsilon}.\vec{\Pi}_0\right)\left[H_A, \vec{\varepsilon}.\vec{\Pi}_0\right] - \left[H_A, \vec{\varepsilon}.\vec{\Pi}_0\right]\left(\vec{\varepsilon}.\vec{\Pi}_0\right)\right) + \cdots$$

S obtenu à partir de R en changeant ω en $-\omega$. D'où

$$H_r = \tfrac{1}{2}(R-S) = -\frac{\mathcal{E}_v^0}{\hbar\omega}\,\frac{2}{m}\left(\vec{\varepsilon}.\vec{\Pi}_0\right)^2$$

Moyenne angulaire

Effet de la "couronne" de modes de fréquence ω obtenue par moyenne angulaire

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{4\pi}\sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}}\iint d\Omega_k$$

Moyenne angulaire

Formules utiles pour les calculs

$$\sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \varepsilon_i\,\varepsilon_j = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}$$

$$\int d\Omega_k\,\frac{k_i k_j}{k^2} = \frac{1}{3}\,\delta_{ij}$$

Résultat du calcul

$$\langle H_{f\ell}(\omega)\rangle_{ang} = \mathcal{E}_v^0 + e\,\frac{\mathcal{E}_v^0}{3m\omega^2}\,\Delta\phi_0(\vec{r})$$

$$-\frac{e}{2m}\left(\delta\vec{A}_0.\vec{\Pi}_0 + \vec{\Pi}_0.\delta\vec{A}_0\right) + \frac{2\,\mathcal{E}_v^0}{3m^2\omega^2}\,e^2\,\vec{B}_0^{\,2}$$

avec $\vec{\nabla}\times\delta\vec{A}_0 = \dfrac{\mathcal{E}_v^0}{3m\omega^2}\,\Delta\vec{B}_0(\vec{r})$

$$\langle H_r(\omega)\rangle_{ang} = -\frac{4}{3}\,\frac{\mathcal{E}_v^0}{\hbar\omega}\,\frac{\vec{\Pi}_0^{\,2}}{2m}$$

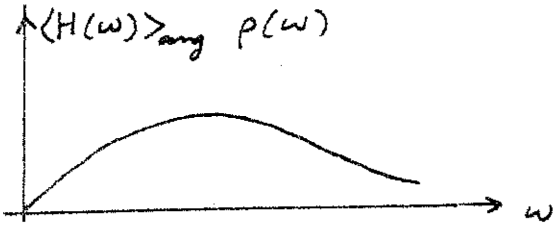
T-15

Intégration sur ω

– Nombre de modes de fréquence comprise entre ω et $\omega + d\omega$

$$\rho(\omega)\,d\omega = 2 \times 4\pi \times \frac{k^2 dk}{(2\pi/L)^3} = \frac{L^3}{\pi^2 c^3}\,\omega^2 d\omega$$

– les corrections radiatives spontanées s'obtiennent en pondérant l'effet de la "couronne de modes" ω par $\rho(\omega)$ et en intégrant sur ω



Courbe donnant la dépendance en ω des corrections radiatives (ω : fréquence du photon émis et réabsorbé virtuellement)

T-16

Borne inférieure ω_m

En principe, les calculs précédents ne sont valables que si $\hbar\omega \gg E_L$ (multiplicités bien séparées).

Il faut donc prendre une borne inférieure ω_m telle que $\hbar\omega_m \gg E_L$ et évaluer la contribution des modes $0 \leq \omega \leq \omega_m$ par une méthode directe, autre que celle de l'hamiltonien effectif.

Très souvent, la contribution des modes $0 \leq \omega \leq \omega_m$ est négligeable, et on peut en plus prendre $\omega_m = 0$ sans commettre d'erreur importante.

T-17

Borne supérieure ω_M

Les calculs précédents ne tiennent compte d'aucun effet relativiste (en plus, approximation dipolaire électrique). Ne sont donc valables que si $\hbar\omega \ll mc^2$.

Il faut donc limiter l'intégration par une borne supérieure ω_M telle que $\hbar\omega_M \ll mc^2$. La théorie présentée ici ne peut que donner la contribution aux corrections radiatives des modes $\omega_m \leq \omega \leq \omega_M$

Contribution des modes $\omega > \omega_M$

Il faut tenir compte des effets relativistes, des créations de paires.

Possibilité de généraliser la méthode de l'hamiltonien effectif.

T-18

Résultats de l'intégration sur ω

On pose $\alpha = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{\hbar c} = \dfrac{1}{137}$

Contribution de H_{fl}

(On suppose $B_0 = 0$)

– Energie cinétique de vibration

$$\frac{\alpha}{\pi}\,\frac{\hbar^2(\omega_M^2 - \omega_m^2)}{2mc^2} \simeq \frac{\alpha}{\pi}\,\frac{\hbar^2\omega_M^2}{2mc^2} = \delta m_{fv}\, c^2$$

– Moyennage spatial du potentiel

$$\frac{\alpha}{3\pi}\,\frac{\hbar^2}{m^2c^2}\log\frac{\omega_M}{\omega_m}\; e\,\Delta\phi_0(\vec{r})$$

En ce qui concerne l'effet des fluctuations du vide, on obtient des résultats en accord quantitatif avec ceux du cours 1979-80

Voir T-14 page XI-4
T-16 page XI-5

T-19

Contribution de H_r

Correction à l'énergie cinétique de la forme $-\frac{\delta m_r}{m}\frac{\vec{\Pi}_0^2}{2m}$

avec $\delta m_r = \frac{e^2\omega_M}{3\pi^2\varepsilon_0 c^3} = \frac{4}{3}\frac{\alpha}{\pi}\frac{\hbar\omega_M}{c^2}$

En regroupant ce terme avec $\frac{\vec{\Pi}_0^2}{2m}$, on obtient $\frac{\vec{\Pi}_0^2}{2m}\left(1-\frac{\delta m_r}{m}\right) \simeq \frac{\vec{\Pi}_0^2}{2(m+\delta m_r)}$

L'effet du terme $\frac{1}{2}(R-S)$ est donc équivalent à une modification de l'énergie cinétique due à une renormalisation de la masse

L'expression obtenue pour δm_r coïncide avec celle obtenue dans le cours 1979-80 et décrivant l'effet de la réaction de rayonnement (T 8 page XI-3)

T-20

Réaction de rayonnement

Rappel du calcul classique effectué dans le cours 1979-80

Equation de la dynamique d'une particule interagissant avec le champ de rayonnement

Potentiel extérieur

Champ de rayonnement libre existant en l'absence de particule

$$(m+\delta m_r)\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{3c^2}\dddot{\vec{r}} + e\vec{E}_0(t)$$

Termes provenant de l'interaction de la particule avec son propre champ de rayonnement, c-à-d le champ qu'elle rayonne à son propre emplacement.

En théorie quantique, le terme en $\dddot{\vec{r}}$ n'intervient que dans les transitions réelles.

T-21

Conclusion pour les corrections radiatives spontanées

A l'ordre 1 en $\mathcal{E}_v^0$, et 0 en $\frac{1}{c}$, elles se classent en 2 catégories

Effet des fluctuations du vide $\left(\frac{1}{2}(R+S)\right)$

- Energie cinétique de vibration de la particule dans les fluctuations du vide
- Modification de l'énergie potentielle due à un moyennage spatial des champs.

Effet de la réaction de rayonnement $\left(\frac{1}{2}(R-S)\right)$

- Modification de l'énergie cinétique due à une renormalisation de la masse.

Justification de l'image de Welton pour le Lamb-shift

T-22

Remarques

Le calcul précédent a fait apparaître $\delta m_{fv}c^2$ et $\frac{\delta m_r}{m}\frac{\vec{\Pi}_0^2}{2m}$

Pourquoi ne voit-on pas apparaître $\delta m_r c^2$ et $\frac{\delta m_{fv}}{m}\frac{\vec{\Pi}_0^2}{2m}$?

1. $\frac{\delta m_{fv}}{m}\frac{\vec{\Pi}_0^2}{2m}$ est en $\frac{\mathcal{E}_v^0}{mc^2}E_L$ et ne peut être obtenu dans un calcul à l'ordre 0 en $\frac{1}{mc^2}$ ($\mathcal{E}_v^0$, $\mathcal{E}_v^0\frac{E_L}{\hbar\omega}$, $\mathcal{E}_v^0\frac{E_L^2}{\hbar^2\omega^2}$)

   Ce terme sera obtenu plus loin.

2. $\delta m_r c^2$ n'apparaît pas car on n'a pas tenu compte dans l'hamiltonien de départ de l'énergie du champ électrostatique propre de la particule.