

Buts de ce cours

- Calculer les corrections radiatives spontanées à l'ordre $1/c^2$ inclus, en particulier celles faisant intervenir le spin. Compléter ainsi le cours V.
- Interpréter physiquement les résultats et répondre aux questions posées dans le cours I, en ce qui concerne l'origine et le signe de $g-2$.

Plan

D - Etude des effets spontanés

- 1 - Effets spontanés dus aux fluctuations du vide T1 à T10
- 2 - Effets spontanés dus à la réaction de rayonnement T11 à T15
- 3 - Récapitulation et conclusion T16 à T17
- 4 - Intégration sur ω T18 à T19

E - Aperçu sur l'effet des modes relativistes ($\hbar\omega \gtrsim mc^2$) T20 à T22

Etude des corrections radiatives spontanées T1

$$H_{\text{eff}}(\text{corr. radiatives}) = \underbrace{N(R+S)}_{\text{Effets stimulés}} + \underbrace{R}_{\text{Effets spontanés}}$$

$$H_{\text{eff}}(\text{corr. rad. Spontanées}) = \underbrace{\frac{1}{2}(R+S)}_{H_{\text{fe}}} + \underbrace{\frac{1}{2}(R-S)}_{H_{\text{rr}}}$$

H_{fe} : effets spontanés dus aux fluctuations du vide. Même interprétation que pour les effets stimulés au remplacement près de E_r^N par E_r^0 (idem que pour cours IV et V)

H_{rr} : effets spontanés dus à la réaction de rayonnement

- Moyenne angulaire : effet d'une "couronne de modes"

$$\frac{1}{8\pi} \sum_{\vec{e}} \int d^3k \quad (\text{On peut donc prendre } \vec{e} \text{ réel})$$

- Intégration sur ω entre ω_m et ω_M

Nouveaux termes apparaissant dans T-2

H_{fe} (par rapport à ceux du cours V)

2 nouveaux termes

(i) Terme
$$- \frac{E_r^0}{mc^2} \frac{\vec{\pi}_0^2}{2m}$$

Interprétation physique : variation de l'énergie cinétique due à la renormalisation de la masse δm_{fv} associé aux fluctuations du vide

$$\delta m_{fv} = \frac{E_r^0}{c^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\vec{\pi}_0^2}{2(m+\delta m_{fv})} &= \frac{\vec{\pi}_0^2}{2m} - \frac{\delta m_{fv}}{m} \frac{\vec{\pi}_0^2}{2m} + \dots \\ &= \frac{\vec{\pi}_0^2}{2m} - \frac{E_r^0}{mc^2} \frac{\vec{\pi}_0^2}{2m} + \dots \end{aligned}$$

Existence de ce terme déjà soupçonné plus haut (voir T22 p. V-6)

(ii) Termes dépendant du spin

$$H_{fv}(\text{spin}) = \frac{E_r^0}{mc^2} \frac{e\hbar}{2m} \left[2\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0 - (\vec{K} \cdot \vec{\sigma})(\vec{K} \cdot \vec{B}_0) \right]$$

T-3

Moyenne angulaire des termes dépendant du spin de H_{fv}

En utilisant $\langle K_i K_j \rangle_{ang} = \frac{1}{3} \delta_{ij} = \langle E_i E_j \rangle_{ang}$
 on obtient $\langle H_{fv}(\text{spin}) \rangle_{ang} = \frac{e\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0 \frac{5}{3} \frac{E_v^0}{mc^2}$

Contribution des différents termes de $H_{fv}(\text{spin})$ au facteur $5/3$

- (22)(10) $\rightarrow + \frac{2}{3}$
- (d) $\rightarrow + 1$
- (14)(00) $\rightarrow - \frac{2}{3}$
- (12)(11) $\rightarrow + \frac{2}{3}$

Le signe global est le même que celui des term. (22)(10) associé au spin seul.

Comme $\frac{5}{3} > \frac{2}{3}$, l'effet des 3 autres termes (termes "croisés" charge-spin) augmente l'effet du terme associé au spin seul.

T-4

Effet des fluctuations du vide (de fréquence ω) sur le spin

En regroupant $\langle H_{fv}(\text{spin}) \rangle_{ang}$ avec le terme $-\frac{e\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0$ de l'hamiltonien électronique, on obtient :

$$-\frac{e\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0 + \langle H_{fv}(\text{spin}) \rangle_{ang} = -\frac{e\hbar}{2m} \left(1 - \frac{5}{3} \frac{E_v^0}{mc^2}\right) \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0$$

Tout se passe donc comme si le moment magnétique de spin de l'électron était diminué par un facteur $1 - \frac{5}{3} \frac{E_v^0}{mc^2}$

T-5

Conclusion sur l'effet des fluctuations du vide sur le moment magnétique de spin

L'image d'un moment magnétique vibrant angulairement sous l'effet du champ B d'une onde plane laisse prévoir une réduction du moment magnétique effectif de spin.

On pourrait espérer que le couplage entre la vibration de la charge et celle du spin renverserait le signe de cette correction. Il n'en est rien. Le calcul précis des termes "croisés" charge spin montre qu'ils ne font qu'empirer la situation. Le facteur de réduction du moment magnétique de spin passe de $(1 - \frac{2}{3} \frac{E_v^0}{mc^2})$ à $(1 - \frac{5}{3} \frac{E_v^0}{mc^2})$.

T-6

Comparaison de l'effet des F.V. sur le spin et les variables orbitales

Effet sur les variables orbitales

$$\frac{\vec{\Pi}_0^2}{2m} \rightarrow \frac{\vec{\Pi}_0^2}{2m} \left(1 - \frac{E_v^0}{mc^2}\right)$$

Effet sur les variables de spin

$$-\frac{e\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0 \rightarrow -\frac{e\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0 \left(1 - \frac{5}{3} \frac{E_v^0}{mc^2}\right)$$

- (i) L'effet n'est pas le même. On ne peut pas tout décrire par une simple renormalisation de la masse qui reviendrait à changer m en $m + \frac{E_v^0}{c^2}$ à la fois dans $\frac{\vec{\Pi}_0^2}{2m}$ et $-\frac{e\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0$ [c'est ce que fait le terme (d) dans $H_{fv}(\text{spin})$ mais il n'est pas le seul !]

(ii) l'effet des fluctuations du vide est plus important sur le spin que sur l'orbitale.

Cas particulier d'un electron dans un champ magnetique uniforme \vec{B}_0

T-7 T-8

Diagramme d'energie pour $g=2$

X-3

Négligeons tout d'abord les corrections radiatives

① Niveaux d'energie de $\frac{\vec{\pi}_0^2}{2m}$

$$\vec{\pi}_0 = \vec{p} - e\vec{A}_0(\vec{r}) \quad \vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{B}_0 \times \vec{r}$$

"Niveaux de Landau" repérés par un entier $n=0, 1, 2, \dots$, d'energie $n\hbar\omega_c$

$$\omega_c = \frac{|e|\hbar B_0}{m} : \text{Fréquence cyclotron}$$

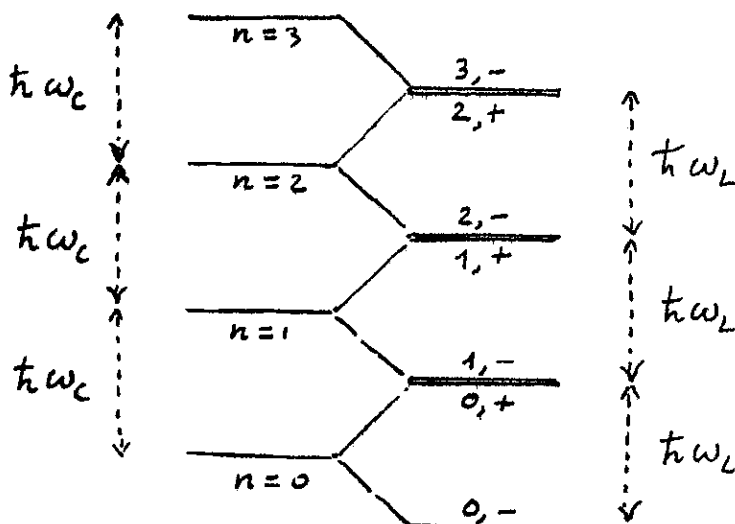
② Niveaux d'energie de $-\frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0$

2 niveaux de spin $|+\rangle$ et $|-\rangle$ séparés par $\hbar\omega_L$

$$\omega_L = g \frac{|e|\hbar B_0}{2m} : \text{Fréquence de Larmor}$$

$$g=2 \Rightarrow \omega_L = \omega_c$$

(Sans corrections radiatives)



Niveau fondamental $0, -$ non dégénéré

Niveaux excités doublement dégénérés ($|n, +\rangle$ et $|n+1, -\rangle$ ont même énergie) si $g=2$, c-à-d si $\omega_c = \omega_L$

Effet des fluctuations du vide (de fréquence ω) sur le diagramme précédent

T-9

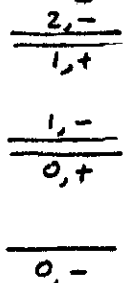
Conclusions : impossibilité d'une image "à la Welton" pour comprendre le signe de $g-2$

T-10

$$\omega_c \rightarrow \omega_c \left(1 - \frac{E_v^0}{mc^2}\right) \quad \omega_L \rightarrow \omega_L \left(1 - \frac{5}{3} \frac{E_v^0}{mc^2}\right)$$

ω_c et ω_L sont toutes deux diminuées mais ω_L l'est plus que ω_c

↳ Dégénérescence levée entre $|n, +\rangle$ et $|n+1, -\rangle$, $|n+1, -\rangle$ étant au dessus de $|n, +\rangle$



Résultat expérimental

Comme $g-2 > 0$, ω_L est plus grand que ω_c , et la disposition précédente n'est pas la bonne. C'est $|n, +\rangle$ qui est au dessus de $|n+1, -\rangle$ et non l'inverse.

Il est impossible, au moins en ce qui concerne les modes faiblement relativistes ($\hbar\omega \ll mc^2$) de comprendre le signe positif de $g-2$, c-à-d encore le fait que $\omega_L > \omega_c$, en considérant la vibration de la charge et du spin de l'électron sans l'effet des fluctuations du vide.

A ce stade, 2 possibilités

- (i) C'est la réaction de rayonnement qui rétablit la situation.
- (ii) Elle n'y arrive pas et cela veut dire alors que l'origine de l'effet est à rechercher dans l'interaction avec les modes relativistes ($\hbar\omega \gtrsim mc^2$).

Effets spontanés associés à la réaction de rayonnement

Résultats du calcul

$$H_{rr} = \frac{E_v^0}{v} \frac{mc^2}{\hbar\omega} - \frac{E_v^0}{v} \frac{2(\vec{E} \cdot \vec{\pi}_0)^2}{m\hbar\omega}$$

$$= \frac{E_v^0 \hbar\omega}{2mc^2} - \frac{E_v^0 \hbar\omega}{2mc^2} - \frac{E_v^0}{v} \frac{2(\vec{E} \cdot \vec{\pi}_0)(\vec{k} \cdot \vec{\pi}_0)(\vec{E} \cdot \vec{\pi}_0)}{\hbar\omega mc^2}$$

1^{ère} ligne : Termes déjà obtenus au cours V

$$\frac{E_v^0}{v} \frac{mc^2}{\hbar\omega} : \text{self énergie de Coulombs (V Coulombs)}$$

$$\frac{E_v^0}{v} \frac{2(\vec{E} \cdot \vec{\pi}_0)^2}{m\hbar\omega} : \text{terme (11)(00)}$$

2^{ème} ligne : nouveaux termes

$$- \frac{E_v^0}{v} \frac{\hbar\omega}{2mc^2} : \text{correction de self-énergie due aux effets à N particules}$$

$$- \frac{E_v^0}{v} \frac{\hbar\omega}{2mc^2} : \text{terme (22)(00)}$$

$$- \frac{E_v^0}{v} \frac{2(\vec{E} \cdot \vec{\pi}_0)(\vec{k} \cdot \vec{\pi}_0)(\vec{E} \cdot \vec{\pi}_0)}{\hbar\omega mc^2} : \text{terme (11)(11)}$$

T-11

Interprétation physique du terme (22)(00)

X-4

Même interprétation que le terme (11)(00) à part que l'interaction ① de la charge avec \vec{E} est remplacé par l'interaction ② du spin avec \vec{B} .

Terme (11)(00) : la charge est la source d'un champ avec laquelle elle interagit. Elle interagit avec son champ propre : réaction de rayonnement

Terme (22)(00) : le spin est la source d'un champ avec lequel il interagit. Interaction du spin avec son champ propre : réaction de rayonnement du spin.

Le terme apparaît dans le calcul sous la forme

$$- \frac{1}{\hbar\omega} \left[\left(\frac{\hbar}{2E_0 \omega L^3} \right)^{1/2} \right]^2 \left(\frac{e\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot (\vec{k} \times \vec{E}) \right)^2$$

Or, le carré de la projection de $\vec{\sigma}$ sur un axe quelconque vaut 1 ($\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$) c'est la raison pour laquelle le terme (22)(00) ne contient plus $\vec{\sigma}$.

Interprétation physique du terme (11)(11)

T-13

Correction relativiste au terme (11)(00)

L'électron se déplace à la vitesse $\frac{\vec{\pi}_0}{m}$ dans l'onde plane. Dans son référentiel, la fréquence de cette onde est déplacée par effet Doppler et devient

$$\omega \left[1 - \frac{\vec{k} \cdot \vec{\pi}_0}{mc} \right]$$

Quand on remplace ω par cette valeur dans (11)(00) et qu'on développe en puissances de $\frac{v}{c}$, le terme d'ordre 1 redonne (11)(11)

la moyenne angulaire de ce terme est nulle.

Moyenne angulaire de H_{rr}

T-14

$$\langle H_{rr} \rangle_{\text{ang}} = \frac{E_v^0}{v} \frac{mc^2}{\hbar\omega} - \frac{4}{3} \frac{E_v^0}{v} \frac{\vec{\pi}_0^2}{\hbar\omega 2m} - \frac{E_v^0}{v} \frac{\hbar\omega}{mc^2}$$

$$\text{Si l'on pose } \delta m_r = \frac{4}{3} \frac{E_v^0}{v} \frac{1}{\hbar\omega} m$$

le 2^{ème} terme apparaît comme une correction à l'énergie cinétique due à la renormalisation de la masse δm_r associé à la réaction de rayonnement.

Le fait que le facteur $\frac{4}{3}$ n'apparaît pas dans le 1^{er} terme provient du caractère non covariant d'une "couronne de modes"

Le dernier terme corrige le premier (correction en $(\frac{\hbar\omega}{mc^2})^2$). La correction de masse correspondante δm_r est en $1/c^4$ et n'a pas de conséquences dynamiques à cet ordre du calcul (correction à $\vec{\pi}_0^2/2m$ en $1/c^4$).

Conclusion sur les effets

dynamiques associés à la réaction de rayonnement

A l'ordre $1/c^2$ inclus, aucun terme dépendant de $\vec{\sigma}$ n'apparaît dans H_{rr} alors que l'énergie cinétique est modifiée à l'ordre 0 en $1/c$.

2 explications à cette "insensibilité" du spin à la réaction de rayonnement

(i) A la limite faiblement relativiste, un moment magnétique est beaucoup moins couplé à son propre champ qu'une charge

Terme (11)(00) en $\frac{E_v^0}{\hbar\omega} \frac{E_L}{\hbar\omega}$

Terme (22)(00) en $\frac{E_v^0}{\hbar\omega} \frac{\hbar\omega}{mc^2}$

(ii) Alors que $\vec{\sigma}$ apparaît dans le terme ② de H_{ER} , il disparaît dans le terme (22)(00) parce que $\sigma_u^2 = 1$. Les niveaux $1+\rangle$ et $1-\rangle$ du spin sont déplacés de la même quantité. Aucune modification du mouvement du spin n'en résulte.

global des fluctuations du vide et de la réaction de rayonnement.

En regroupant les résultats donnés plus haut pour les corrections radiatives spontanées, on obtient pour l'hamiltonien effectif d'un e dans le vide de rayonnement

$$mc^2 \left(1 + \frac{E_v^0}{\hbar\omega} + \frac{E_v^0}{mc^2} + \dots \right) + \frac{\vec{\Pi}_0^2}{2m} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{E_v^0}{\hbar\omega} - \frac{E_v^0}{mc^2} + \dots \right) - \frac{e\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0 \left(1 - 0 - \frac{5}{3} \frac{E_v^0}{mc^2} + \dots \right)$$

↑ ↑
R.R. F.V.

Cas d'un e dans un champ uniforme \vec{B}_0

$\omega_C \rightarrow \omega_C \left(1 - \frac{4}{3} \frac{E_v^0}{\hbar\omega} - \frac{E_v^0}{mc^2} + \dots \right)$

$\omega_L \rightarrow \omega_L \left(1 - 0 - \frac{5}{3} \frac{E_v^0}{mc^2} + \dots \right)$

↑ ↑
R.R. F.V.

Conclusion pour le signe de $g-2$

Alors que les fluctuations du vide diminuent plus ω_L que ω_C , la réaction de rayonnement ne diminue que ω_C . Or, l'effet de la réaction de rayonnement est en $E_v^0/\hbar\omega$, c-à-d $mc^2/\hbar\omega$ fois plus grand que celui des fluctuations du vide. C'est donc lui qui est largement prépondérant.

Enfin, c'est donc ω_C qui est essentiellement réduit, et on retrouve un diagramme d'énergie en accord avec les observations expérimentales. (état $|n, +\rangle$ au dessus de $|n+1, -\rangle$).

Si $g-2$ est positif, c'est en quelque sorte parce que "2 est réduit plus que g"

On peut donc bien comprendre le signe positif de $g-2$, même en ne faisant appel qu'aux modes faiblement relativistes. Le phénomène physique prépondérant n'est pas la vibration de la charge et du spin, mais le ralentissement du mouvement cyclotron de la charge causé par la réaction de rayonnement.

Intégration sur ω

Il faut multiplier l'effet de la "couronne de modes ω " par la densité de modes $\rho(\omega)d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega$ et intégrer sur ω entre ω_m et ω_M (voir cours V)

Pour un électron dans un champ \vec{B}_0 uniforme, aucune divergence ne se produit à la borne inférieure ω_m qu'on peut faire tendre vers 0 en commettant une erreur négligeable

La fonction à intégrer sur ω peut s'exprimer entièrement en fonction de

$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\hbar c} = \frac{1}{137}$

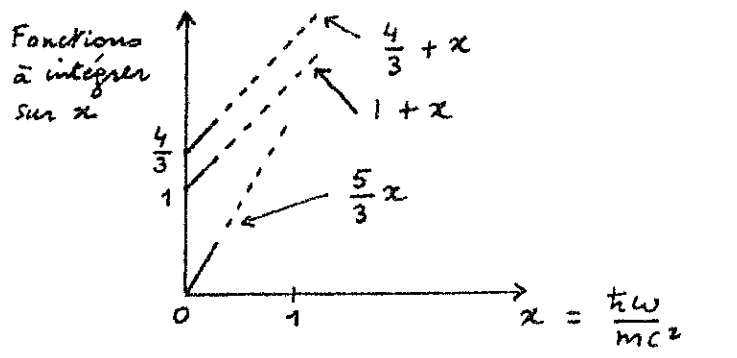
$x = \frac{\hbar\omega}{mc^2} \quad x_M = \frac{\hbar\omega_M}{mc^2}$

Le calcul n'est bien sûr valable qu'au voisinage de $x=0$

Résultat du calcul pour un electron dans un champ B_0

$$H_{\text{eff}}(\text{spontané}) = mc^2 \left[1 + \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{x_M} (1+x+\dots) dx \right] + \frac{\vec{\pi}_0^2}{2m} \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{x_M} \left(\frac{4}{3} + x+\dots \right) dx \right] - \frac{e\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0 \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{x_M} \left(\frac{5x}{3} + \dots \right) dx \right]$$

Dans les intégrales sur x , les termes constants sont ceux obtenus dans le calcul à l'ordre 0 en $1/c$ du cours V, les termes en x , les corrections relativistes calculées dans les cours IX et X.



Aperçu sur l'effet des modes relativistes ($\hbar\omega \gtrsim mc^2$)

$$H_{\text{eff}}(\text{spontané}) = mc^2 \left[1 + \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{x_M} E(x) dx \right] + \frac{\vec{\pi}_0^2}{2m} \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{x_M} \eta(x) dx \right] - \frac{e\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0 \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{x_M} \zeta(x) dx \right]$$

Un calcul relativiste complet donne de cette année ont consisté à rechercher les développements de $E(x)$, $\eta(x)$, $\zeta(x)$ au voisinage de $x=0$.

Le calcul complet donne l'expression de ces fonctions $\forall x$. Comme les divergences sont toutes logarithmiques, on peut prendre $x_M \gg 1$ (c-à-d $\hbar\omega_M \gg mc^2$), tout en gardant pour les intégrales sur x (multipliées par $\frac{\alpha}{\pi} \ll 1$) des valeurs très petites devant 1.

Résultat du calcul complet

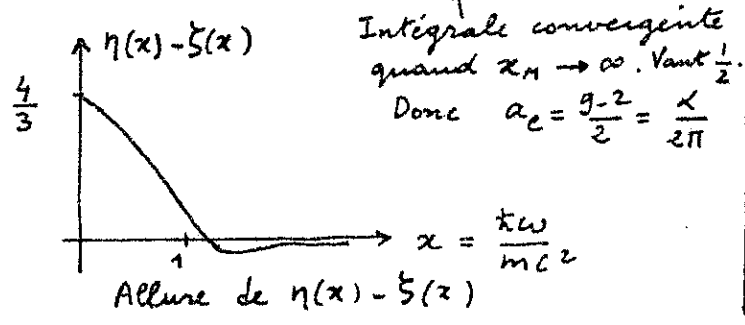
On trouve que $\int_0^{x_M} E(x) dx$ et $\int_0^{x_M} \eta(x) dx$ ont la même dépendance en $\log x_M$. Posons $m_{\text{exp}} = m \left(1 + \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{x_M} E(x) dx \right) = m \left(1 + \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{x_M} \eta(x) dx \right)$

On peut alors écrire

$$H_{\text{eff}}(\text{spontané}) = m_{\text{exp}} c^2 + \frac{\vec{\pi}_0^2}{2m_{\text{exp}}} - \frac{e\hbar}{2m_{\text{exp}}} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}_0 \left[1 + \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{x_M} [\eta(x) - \zeta(x)] dx \right]$$

Quand on réexprime H_{eff} en fonction de m_{exp} , on trouve que

$$g = 2 [1 + a_e] \text{ où l'anomalie } a_e \text{ vaut } a_e = \frac{g-2}{2} = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{x_M} [\eta(x) - \zeta(x)] dx$$



Conclusion finale sur g-2

La prise en compte des modes $\hbar\omega \gtrsim mc^2$ ne change pas la conclusion obtenue plus haut.

La physique de g-2, en particulier son signe, ne nécessite pas de faire appel aux modes relativistes. Ce sont essentiellement les modes $\hbar\omega \leq mc^2$ qui contribuent à g-2 (voir figure T-21)

L'effet essentiel pour g-2 est le ralentissement de la fréquence cyclotron dû à la réaction de rayonnement. Les fluctuations du vide ont un effet beaucoup plus petit et de signe opposé.

Par contre, pour le déplacement de Lamb, l'écart entre les états $2S_{1/2}$ et $2P_{1/2}$ est essentiellement dû aux fluctuations du vide et au moyennage du potentiel coulombien qu'elles font effectuer à l'électron.

Références générales : données à la fin du cours I