Cours du 26/2/80

Introduction

Conclusion des cours précédents

- Le champ rayonné par un atome n'est pas un champ classique
- Autre manifestation (indirecte) de ce fait : échecs de la théorie "néo-classique" de Jaynes, où l'on essaie de décrire l'émission spontanée comme due à l'interaction de l'atome avec un champ classique dont il serait la source
- Approche quantique (cours de la semaine précédente) : exprimer le champ arrivant sur le détecteur en fonction du dipole emetteur $\vec{D}$ (noter qu'on prend $\vec{D}$ et non $\langle \vec{D} \rangle$). On est ainsi ramené au calcul d'une fonction de corrélation de $\vec{D}$ qu'on évalue grace à l'approximation de mémoire courte (image du champ du vide qui fluctue très vite)

Autre tentative "semi-classique"

Pourrait-on comprendre l'émission spontanée de l'atome en faisant intervenir uniquement une réaction de rayonnement purement atomique ?

Pourrait-on se passer du champ du vide ?

Objet des 4 derniers cours

Essayer de répondre à ces questions à partir d'une étude des équations de Heisenberg du système atome source + champs

Pourquoi les équations de Heisenberg ? Elles permettent de faire un parallèle très étroit entre physique classique et physique quantique.

Plan de ce cours

1 - Rappels sur les développements des champs en modes.
Introduction d'une coupure (Transparent T1)

2 - Modele simple d'atome (T2)
(Beaucoup plus général que celui considéré page VII-2)

3 - Autre forme plus commode de l'hamiltonien à l'approximation dipolaire électrique (T3, T4, T5)

4 - Equations de Heisenberg pour le champ
Champ du vide et champ des sources (près et loin de la source) (T6 à T14)

5 - Equation de Heisenberg pour le dipole
Analogie avec les équations classique (T15 et T16)

T 1

Développement du champ en modes

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega L^3}} \left[a_{k\varepsilon}(t)\, \vec{\varepsilon}\, e^{i\vec{k}.\vec{x}} + \text{h.c.} \right]$$

$$\vec{E}_\perp(\vec{x},t) = \underbrace{\sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \underbrace{\sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\varepsilon_0 L^3}}}_{\mathcal{N}_k} \left[i\, a_{k\varepsilon}(t)\, \vec{\varepsilon}\, e^{i\vec{k}.\vec{x}}\right.}_{\vec{E}^{(+)}_\perp(\vec{x},t)} \left. + \text{h.c.} \right]$$

$\omega = ck$

$\vec{\varepsilon} \perp \vec{k} \rightsquigarrow$ Champs "transverses"

Coupure à $k = k_M$

$$\int_0^\infty dk \rightarrow \int_0^{k_M} dk$$

$$k_0 \ll k_M \ll 1/a_0$$

Fréquence optique $\qquad a_0$: rayon de Bohr

Equivalence à un moyennage spatial des champs sur une sphère de rayon $1/k_M$.

T 2

Charge liée en $\vec{O}$

Hamiltonien du système charge + champ

$$H = \frac{1}{2m_0}\left[\vec{p} - e\vec{A}(\vec{r})\right]^2 + V(r) + H_R$$

m_0 : masse $\qquad e$: charge

$\vec{r}$ et $\vec{p}$: position et impulsion

$V(\vec{r})$: potentiel liant la charge en $\vec{O}$

$$H_R = \sum_i \hbar\omega_i \left(a_i^+ a_i + \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\left(\sum_i = \sum_{\substack{\vec{k} \\ k<k_M}} \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}}\right)$$

Approximation dipolaire électrique

$$\frac{1}{2m_0}\left[\vec{p} - e\vec{A}(\vec{r})\right]^2 \rightarrow \frac{1}{2m_0}\left[\vec{p} - e\vec{A}(\vec{0})\right]^2$$

T 3

Transformation unitaire U

$$U = \exp\left[-\frac{ie}{\hbar}\, \vec{r}.\vec{A}(\vec{0})\right]$$

U translate $\vec{p}$

$$U\vec{p}\,U^+ = \vec{p} + e\vec{A}(\vec{0})$$

$$U \frac{1}{2m_0}\left[\vec{p} - e\vec{A}(\vec{0})\right]^2 U^+ = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m_0}$$

grande simplification

U translate aussi a_i et a_i^+

$$-\frac{ie}{\hbar}\,\vec{r}.\vec{A}(\vec{0}) = \sum_i \left(\rho_i^* a_i - \rho_i a_i^+\right)$$

$$\rho_i = \frac{ie}{\hbar}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_i L^3}}\;\vec{\varepsilon}_i.\vec{r}$$

$$\begin{cases} U a_i U^+ = a_i + \rho_i \\ U a_i^+ U^+ = a_i^+ + \rho_i^* \end{cases}$$

(Formule de Glauber)

T 4

Transformation de H_R

$$U \sum_i \hbar\omega_i \left(a_i^+ a_i + \tfrac{1}{2}\right) U^+ =$$

$$\sum_i \hbar\omega_i \left[(a_i^+ + \rho_i^*)(a_i + \rho_i) + \tfrac{1}{2}\right] =$$

$$= \sum_i \hbar\omega_i \left(a_i^+ a_i + \tfrac{1}{2}\right) \quad \leftarrow \quad H_R \text{ (champ)}$$

$$+ \sum_i \hbar\omega_i \left(a_i^+ \rho_i + a_i \rho_i^*\right) \quad \leftarrow \quad W_1 \text{ (champ + particule)}$$

$$+ \sum_i \hbar\omega_i\, \rho_i^* \rho_i \quad \leftarrow \quad A_2 \text{ (particule)}$$

$$U H_R U^+ = H_R + W_1 + A_2$$

$$W_1 = -e\vec{r}.\left[\sum_i \sqrt{\frac{\hbar\omega_i}{2\varepsilon_0 L^3}}\; i\vec{\varepsilon}\, a_i + \text{h.c.}\right]$$

$$= \underbrace{-e\vec{r}}_{\vec{D}}.\vec{E}_\perp(\vec{0}) = -\vec{D}.\vec{E}_\perp(\vec{0})$$

$$A_2 = \sum_i \hbar\omega_i \frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_i L^3}\frac{e^2}{\hbar^2}\left(\vec{\varepsilon}_i.\vec{r}\right)^2$$

$$= \frac{1}{6\varepsilon_0 \pi^2}\vec{D}^2 \int_0^{k_M} k^2\, dk = \frac{k_M^3}{18\varepsilon_0\pi^2}\vec{D}^2$$

T5)

Nouvel hamiltonien H'

$$H' = U H U^{+} =$$

$$\underbrace{\frac{\vec{P}^2}{2m_0} + V(\vec{r}) + \frac{k_M^3}{18\varepsilon_0\pi^2}\vec{D}^2}_{H_A} + H_R - \vec{D}\cdot\vec{E}_\perp(\vec{0})$$

"Self-énergie" atomique — Interaction

Avantages

1 - Terme d'interaction très simple

2 - Elimination des précurseurs instantanés du champ transverse

Références

- Cours 1974-75
- E.A. POWER, T. THIRUNAMACHANDRAN Am. J. Phys. 46, 370 (1978) et references in

T6)

Equations du mouvement des $a_{k\varepsilon}$

Autre manière ("hamiltonienne") d'écrire les équations de Maxwell en présence des sources atomiques.

$$i\hbar\frac{d}{dt}a_{k\varepsilon}(t) = [a_{k\varepsilon}(t), H'] =$$

$$\underbrace{[a_{k\varepsilon}(t), H_R]}_{\hbar\omega\, a_{k\varepsilon}(t)} + \underbrace{[a_{k\varepsilon}(t), -\vec{D}\cdot\vec{E}_\perp(\vec{0},t)]}_{i\mathcal{N}_k\,\vec{\varepsilon}\cdot\vec{D}(t)}$$

$$\frac{d}{dt}a_{k\varepsilon}(t) = -i\omega a_{k\varepsilon}(t) + \frac{\mathcal{N}_k}{\hbar}\varepsilon_j D_j(t)$$

Equation linéaire en $a_{k\varepsilon}$

$$a_{k\varepsilon}(t) = a_{k\varepsilon}(t_0)\, e^{-i\omega(t-t_0)}$$

Contribution du vide

$$+ \frac{\mathcal{N}_k}{\hbar}\int_0^{t-t_0} d\tau\, \varepsilon_j D_j(t-\tau)\, e^{-i\omega\tau}$$

Contribution des sources

Même résultat qu'en électromagnétisme classique

T7)

Calcul du champ $\vec{E}_\perp(\vec{x},t)$

Report de la solution trouvée pour $a_{k\varepsilon}(t)$ dans le développement en mode de $\vec{E}_\perp(\vec{x},t)$

$$E_i(\vec{x},t) = E_{0i}(\vec{x},t) \leftarrow \text{champ du vide}$$

$$+ \underbrace{\int_0^{t-t_0} d\tau\, F_{ij}(\vec{x},\tau)\, D_j(t-\tau)}_{\text{Champ des sources}}$$

Expression du tenseur $F_{ij}(\vec{x},\tau)$

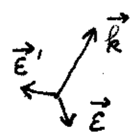
$$F_{ij}(\vec{x},\tau) = \frac{i}{\hbar}\sum_{\substack{\vec{k}\\ k<k_M}}\sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \varepsilon_i\varepsilon_j \mathcal{N}_k^2\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega\tau)} + \text{c.c.}$$

Calcul fait en appendice (pages VII-9 et VII-10)

T8)

Quelques formules utiles pour ce calcul

① Sommation sur les polarisations transverses



$(\vec{\varepsilon}, \vec{\varepsilon}', \frac{\vec{k}}{k})$: Base orthonormée

↳ Relation de fermeture

$$\varepsilon_i\varepsilon_j + \varepsilon'_i\varepsilon'_j + \frac{k_i k_j}{k^2} = \delta_{ij}$$

$$\hookrightarrow \sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \varepsilon_i\varepsilon_j = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}$$

② $$\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \left(\delta_{ij} + \frac{1}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

③ $$\sum_{\substack{\vec{k}\\ k<k_M}} = \frac{L^3}{(2\pi)^3}\int_0^{k_M} k^2 dk \int d\Omega$$

T 9

Exemple : calcul de $F_{ij}(\vec{0},\tau)$

$$F_{ij}(\vec{0},\tau) = \frac{i}{\hbar}\sum_{\vec{k}\,\vec{\varepsilon}} \varepsilon_i\varepsilon_j \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 L^3}\, e^{-i\omega\tau} + c.c.$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0 L^3}\sum_{\vec{k}\,\vec{\varepsilon}} \varepsilon_i\varepsilon_j\, \omega \sin\omega\tau$$

$$\sum_{\vec{\varepsilon}\perp\vec{k}} \varepsilon_i\varepsilon_j = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}$$

$$\int d\Omega\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) = 4\pi\,\frac{2}{3}\,\delta_{ij} = \frac{8\pi}{3}\,\delta_{ij}$$

$$F_{ij}(\vec{0},\tau) = \frac{\delta_{ij}}{\varepsilon_0(2\pi)^3}\,\frac{8\pi c}{3}\int_0^{k_M} dk\, k^3 \sin\omega\tau$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{\delta_{ij}}{\varepsilon_0 c^3}\,\frac{1}{(2\pi)^2}\underbrace{\int_{-ck_M}^{+ck_M} d\omega\, \omega^3 \sin\omega\tau}_{\frac{d^3}{d\tau^3}\underbrace{\int_{-ck_M}^{+ck_M} d\omega\, \cos\omega\tau}_{2\pi\,\delta(\tau)}}$$

$$= \frac{1}{3\pi\varepsilon_0 c^3}\,\dddot{\delta}(\tau)$$

T 10

Résultat du calcul de $F_{ij}(\vec{x},\tau)$

Pour $x \gg 1/k_M$

$$4\pi\varepsilon_0 F_{ij}(\vec{x},\tau) =$$

$$\frac{1}{r}\left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{x^2}\right)\left[-\frac{1}{c^2}\ddot{\delta}\left(\tau - \frac{x}{c}\right) + \frac{1}{c^2}\ddot{\delta}\left(\tau + \frac{x}{c}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{r^2}\left(\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{x^2}\right)\left[-\frac{1}{c}\dot{\delta}\left(\tau - \frac{x}{c}\right) - \frac{1}{c}\dot{\delta}\left(\tau + \frac{x}{c}\right)\right]$$

$$- \frac{1}{r^3}\left(\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{x^2}\right)\left[\delta\left(\tau - \frac{x}{c}\right) - \delta\left(\tau + \frac{x}{c}\right)\right]$$

Pour $x \ll 1/k_M$ $\quad F_{ij}(\vec{x},\tau) \simeq F_{ij}(\vec{0},\tau)$

$$F_{ij}(\vec{0},\tau) = \frac{1}{3\pi\varepsilon_0 c^3}\,\delta_{ij}\,\dddot{\delta}(\tau)$$

Les fonctions "δ" ont une largeur finie, due à la coupure à k_M

$$\delta(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-ck_M}^{+ck_M} e^{i\omega\tau}\, d\omega$$

Largeur $\sim 1/ck_M$

T 11

Champ rayonné par le dipole au loin $\quad (x \gg 1/k_M)$

$$E_i(\vec{x},\tau) - E_{0i}(\vec{x},\tau) =$$

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\,\frac{1}{x}\left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{x^2}\right)\ddot{D}_j\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\,\frac{1}{x^2}\left(\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{x^2}\right)\dot{D}_j\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{x^3}\left(\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{x^2}\right)D_j\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Effets de retard

Dépendance angulaire

Dépendance de la distance

Cas d'un dipole harmonique $\omega_0 = ck_0$

$k_0 x \gg 1 \qquad E \sim 1/x$

$k_0 x \ll 1 \qquad E \sim 1/x^3$

T 12

Champ rayonné par le dipole à son propre emplacement $\quad (x \ll 1/k_M)$

$$\delta E_i(\vec{x},\tau) = E_i(\vec{x},\tau) - E_{0i}(\vec{x},\tau) =$$

$$\frac{1}{3\pi\varepsilon_0 c^3}\int_0^{t-t_0} d\tau\, \dddot{\delta}(\tau)\, D_i(t-\tau)$$

Intégrations par parties successives

$$\int_0^{t-t_0} d\tau\, \dddot{\delta}(\tau)\, D_i(t-\tau) = \underbrace{\Big[\ddot{\delta}(\tau)\, D_i(t-\tau)\Big]_0^{t-t_0}}_{= -\ddot{\delta}(0)\, D_i(t)} + \int_0^{t-t_0} d\tau\, \ddot{\delta}(\tau)\, \dot{D}_i(t-\tau)$$

$$\int_0^{t-t_0} d\tau\, \ddot{\delta}(\tau)\, \dot{D}_i(t-\tau) = \underbrace{\Big[\dot{\delta}(\tau)\, \dot{D}_i(t-\tau)\Big]_0^{t-t_0}}_{= 0 \quad (\dot{\delta}\ \text{impaire})} + \int_0^{t-t_0} \dot{\delta}(\tau)\, \ddot{D}_i(t-\tau)$$

$$\int_0^{t-t_0} \dot{\delta}(\tau)\, \ddot{D}_i(t-\tau) = \underbrace{\Big[\delta(\tau)\, \ddot{D}_i(t-\tau)\Big]_0^{t-t_0}}_{= -\delta(0)\, \ddot{D}_i(t)} + \underbrace{\int_0^{t-t_0} \delta(\tau)\, \dddot{D}_i(t-\tau)}_{= \frac{1}{2}\, \dddot{D}_i(t)}$$

T 13

En regroupant tout,

$$\int_0^t d\tau \; \dddot{\delta}(\tau)\, D_i(t-\tau) = - \ddot{\delta}(0)\, D_i(t) - \delta(0)\, \ddot{D}_i(t) + \frac{1}{2}\, \dddot{D}_i(t)$$

De $\delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-ck_M}^{+ck_M} e^{i\omega\tau}\, d\omega$,

on tire

$$\delta(0) = \frac{c k_M}{\pi} \qquad \ddot{\delta}(0) = - \frac{c^3 k_M^3}{3\pi}$$

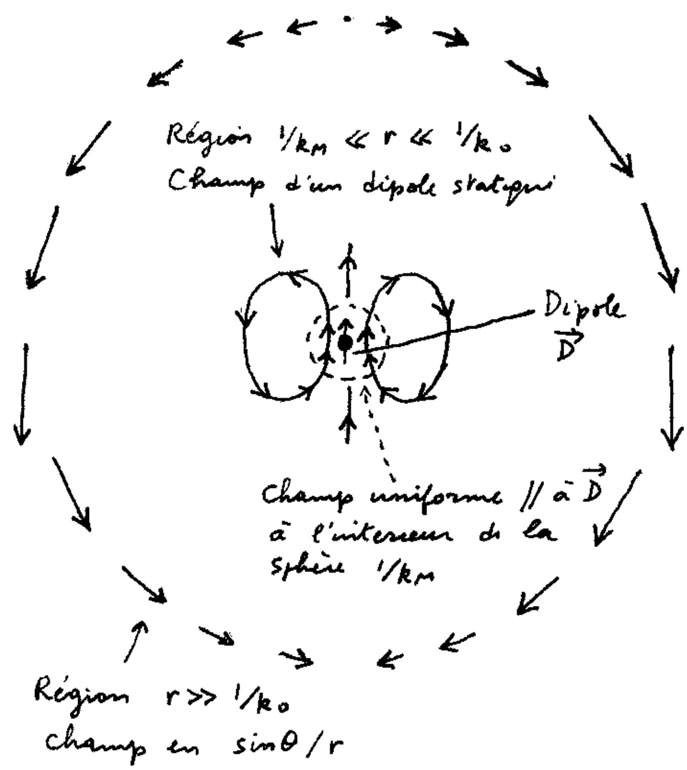
ce qui donne finalement

$$\delta \vec{E}(\vec{0},t) = \vec{E}(\vec{0},t) - E_0(\vec{0},t) =$$

$$\frac{e^2 k_M^3}{9\pi^2\varepsilon_0}\, \vec{r}(t) - \frac{e k_M}{3\pi^2\varepsilon_0 c^2}\, \ddot{\vec{r}}(t) + \frac{e}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\, \dddot{\vec{r}}(t)$$

T 14

Allure de la répartition spatiale du champ du dipole



T 15

Equation du mouvement de la charge

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\left[\vec{r}, H'\right] = \frac{\partial H'}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m_0}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m_0 \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{i\hbar}\left[\vec{p}, H'\right]$$

$$\frac{1}{i\hbar}\left[\vec{p}, V(\vec{r})\right] = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

$$\frac{1}{i\hbar}\left[\vec{p}, \vec{D}^2\right] = \frac{e^2}{i\hbar}\left[\vec{p}, \vec{r}^{\,2}\right] = -2e^2\, \vec{r}$$

$$\hookrightarrow \quad \frac{1}{i\hbar}\left[\vec{p}, \frac{k_M^3}{18\varepsilon_0\pi^2}\vec{D}^2\right] = -\frac{e^2 k_M^3}{9\varepsilon_0\pi^2}\, \vec{r}$$

$$\frac{1}{i\hbar}\left[\vec{p}, \vec{D}\cdot\vec{E}(\vec{0})\right] = -\frac{e}{i\hbar}\, \vec{E}(\vec{0})\, \underbrace{\left[\vec{p}, \vec{r}\right]}_{-i\hbar}$$

$$= e\,\vec{E}(\vec{0})$$

T-16

En regroupant tout

$$m_0 \ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) - \frac{e^2 k_M^3}{9\varepsilon_0\pi^2}\, \vec{r} + e\,\vec{E}(\vec{0})$$

Or, d'après le calcul précédent (T 13)

$e\,\vec{E}(\vec{0}) = e\,\vec{E}_0(\vec{0})$ ← Champ du vide

$$+ \underbrace{\frac{e^2 k_M^3}{9\varepsilon_0\pi^2}\, \vec{r} - \frac{e^2 k_M}{3\pi^2\varepsilon_0 c^2}\, \ddot{\vec{r}} + \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\, \dddot{\vec{r}}}_{\text{champ de la source à son emplacement}}$$

Finalement

$m_0 \ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$ ← Force liante

$+ e\,\vec{E}_0(\vec{0},t)$ ← Force due au champs du vide

$+ \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2}{3c^2}\, \dddot{\vec{r}}(t)$ ← Freinage du à la réaction de rayonnement

$- \frac{e^2 k_M}{3\pi^2\varepsilon_0 c^2}\, \ddot{\vec{r}}$ ← Inertie due à la réaction de rayonnement

Masse "expérimentale" m

$$m = m_0 + \frac{e^2 k_M}{3\pi^2\varepsilon_0 c^2}$$