

Buts de ce chapitre

- Analyser la structure du champ électrique existant dans l'espace en présence d'un dipôle atomique émetteur.
Montrer, par intégration des équations du mouvement du système dipôle + champ, que le champ E est la somme d'un terme indépendant des sources, et évoluant librement, (champ du vide), et d'un terme dépendant du dipôle émetteur (champ des sources).
- Calculer le champ des sources, non seulement loin du dipôle émetteur, mais également à l'emplacement de ce dipôle, de manière à pouvoir, dans un chapitre ultérieur, étudier l'effet de l'interaction du dipôle avec son propre champ (réaction de rayonnement).
- Calculer les commutateurs entre le champ du vide et une grandeur atomique quelconque (ces commutateurs seront utilisés, dans un chapitre ultérieur, lors de la discussion des effets respectifs des fluctuations du vide et de la réaction de rayonnement dans le processus d'émission spontanée).

① Notations - Hypothèses

Champ électrique $E(\vec{r}, t)$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, \vec{E}} i N_R \left[a_{kE}(t) \vec{E} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - a_{kE}^+(t) \vec{E} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right] \quad (\text{VII-1})$$

$$N_R = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2 \epsilon_0 L^3}} \quad \vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t) \quad (\text{VII-2})$$

Développement en ondes planes progressives (dans un cube de côté L avec conditions aux limites périodiques).

N_R : coefficient de normalisation

\vec{k} : vecteur d'onde $\vec{E} \perp \vec{k}$: polarisation $\omega = ck$: pulsation

Hamiltonien d'interaction dipolaire électrique

- Système atomique, globalement neutre, de dimensions de l'ordre de a_0 (orbite de Bohr), placé à l'origine $\vec{0}$ des coordonnées, et possédant un moment dipolaire électrique $\vec{D}(t)$
- On montre (voir par exemple cours 1974-75) qu'on peut, par une transformation unitaire appropriée, transformer l'hamiltonien d'interaction habituel $(-\frac{e}{m} \vec{A} \vec{p} + \frac{e^2}{2m} \vec{A}^2)$ en

$$V = -\vec{D}(t) \cdot \vec{E}(0, t) = - \sum_{i=x,y,z} D_i(t) E_i(\vec{0}, t) \quad (\text{VII-3})$$

- L'approximation dipolaire électrique n'est valable que si la longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ du rayonnement est grande devant a_0 . Si l'on reporte le développement (VII-1) de \vec{E} dans (VII-3), l'approximation n'est certainement plus valable pour les modes $k \gtrsim 2\pi/a_0$.

- Pour remédier à cette difficulté, nous introduisons à partir de maintenant une coupure dans la sommation sur k

$$\int_0^\infty dk \rightarrow \int_0^{k_M} dk \quad \text{avec} \quad k_M \ll \frac{2\pi}{a_0} \quad (VII-4)$$

Comme les longueurs d'onde optiques $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ sont très grandes devant a_0 , on peut choisir k_M tel que

$$k_0 \ll k_M \ll 2\pi/a_0 \quad (VII-5)$$

et garder ainsi un nombre suffisant de modes pour décrire correctement l'interaction du dipôle émetteur avec le champ tout en restant dans le cadre de l'approximation dipolaire électrique

- L'interaction (que l'on néglige ici) avec les modes de fréquence élevée ($k \gg k_M$) ne produit essentiellement que des déplacements de niveaux d'énergie atomiques (qui divergent d'ailleurs). En fait, ces divergences peuvent être éliminées par une redéfinition des paramètres de l'électron (renormalisation). Nous n'aborderons pas ici ces problèmes (qui nécessiteraient de toute façon un traitement relativiste de l'électron) et nous contenterons de l'artifice de la coupure à k_M .

Système atomique

- lorsque nous aurons besoin de préciser davantage le système atomique (§§ 3 et 4), nous supposons que :

(i) le système n'a qu'un degré de liberté (le long de Oz) :

$$D_i(t) = S_{iz} D(t) = d S_{iz} A(t) \quad (VII-6)$$

où d est un nombre réel ayant les dimensions d'un moment dipolaire électrique et $A(t)$ un opérateur atomique sans dimension

(ii) le dipôle atomique n'a qu'une fréquence propre ω_0

$$A(t) = A_+(t) + A_-(t) \quad A_\pm(t) \sim e^{\pm i\omega_0 t} \quad (VII-7)$$

- En fait, dans le chapitre suivant, nous prendrons pour système atomique

(i) soit un oscillateur harmonique (vibrant le long de Oz), auquel cas

$$A_+(t) = b^+(t) \quad A_-(t) = b(t) \quad (VII-8)$$

l'hamiltonien atomique H_A s'écrit alors :

$$H_A = \hbar \omega_0 (b^+ b + \frac{1}{2}) \quad (VII-9)$$

(ii) soit un système à 2 niveaux $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ auquel cas

$$A_+ = S_+ = |e\rangle\langle g| \quad A_- = S_- = |g\rangle\langle e| \quad (VII-10)$$

$$H_A = \hbar \omega_0 S_3 \quad \text{avec} \quad S_3 = \frac{1}{2} (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) \quad (VII-11)$$

Approximation du champ tournant ("r.w.a.")

Revenant, quand on l'effectue, à négliger les processus "anti-résonnants" où le système atomique grimpe en énergie en émettant un photon ($A_+ E^{(-)}$) ou descend en énergie en absorbant un photon ($A_- E^{(+)}$). Mathématiquement,

une telle approximation revient à effectuer le remplacement

$$V = -DE = -d(A_+ + A_-)(E^{(+)} + E^{(-)}) \rightarrow V = -d(A_+ E^{(+)} + A_- E^{(-)}) \quad (\text{VII-12})$$

Equation d'évolution de a_{kE} et a_{kE}^+

En partant de l'hamiltonien total

$$H = H_A + \sum_{kE} \hbar\omega (a_{kE}^+ a_{kE} + \frac{1}{2}) - \sum_j D_j(t) E_j(\vec{0}, t) \quad (\text{VII-13})$$

dans lequel on remplace E_i par son développement (VII-1), et en écrivant l'équation d'évolution (équation de Hamilton-Jacobi) pour a_{kE} , on obtient :

$$\frac{d}{dt} a_{kE} = -i\omega a_{kE} + \frac{Nk}{\hbar} \sum_j \epsilon_j D_j(t) \quad (\text{VII-14})$$

qui s'intègre immédiatement entre l'instant initial t_0 et l'instant t

$$a_{kE}(t) = a_{kE}(t_0) e^{-i\omega(t-t_0)} + \frac{Nk}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \sum_j \epsilon_j D_j(t') e^{-i\omega(t-t')} \quad (\text{VII-15})$$

Remarque : les équations (VII-14) et (VII-15) n'ont en elles mêmes rien de quantique ; elles ont la même forme en théorie classique (les a_{kE} et $a_{kE}^+ = a_{kE}^*$ étant alors les coefficients du développement du champ sur les modes). Tant que l'on utilise (VII-15), sans faire appel à aucune commutateur, on obtient donc des résultats qui n'ont rien de nouveau par rapport aux résultats classiques.

② Champ rayonné par le dipôle atomique (suffisamment loin)

a) Région de l'espace considérée

Dans le § 2, nous étudions le champ rayonné par le dipôle à une distance suffisamment grande de lui :

$$r \gg \frac{1}{k_M} \quad (\text{VII-16})$$

Par contre, compte tenu de (VII-5), nous ne faisons aucune hypothèse sur la grandeur de r par rapport à la longueur d'onde λ_0 de la transition atomique. r peut être $> \lambda_0$ ou $< \lambda_0$.

Dans le § 3 suivant, nous étudierons le champ créé à l'emplacement du dipôle : $r \ll \frac{1}{k_M}$

b) Expressions du champ $E_i(\vec{r}, t)$ en fonction du dipôle $D_j(t')$

Reprenons (VII-15) (et l'expression hermitique conjuguée pour a_{kE}^+) dans le développement (VII-1). On obtient (après le changement de variables $\tau = t - t'$) :

$$E_i(\vec{r}, t) = E_{0i}(\vec{r}, t) + \int_0^{t-t_0} d\tau F_{ij}(\vec{r}, \tau) D_j(t-\tau) \quad (\text{VII-17})$$

où :

$E_{0i}(\vec{r}, t)$ est le "champ libre" ou encore le "champ du vide" obtenu en remplaçant dans (VII-1) $a_{kE}(t)$ et $a_{kE}^+(t)$ par les solutions libres.

$$a_{kE}(t) = a_{kE}(t_0) e^{-i\omega(t-t_0)} \quad a_{kE}^+(t) = a_{kE}^+(t_0) e^{i\omega(t-t_0)} \quad (\text{VII-18}) \quad (\text{VII-4})$$

et le tenseur F_{ij} (convention de sommation sur les indices répétés dans VII-17) s'écrit :

$$F_{ij}(\vec{r}, t) = \frac{i}{\hbar} \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{E} \perp \vec{k}} E_i E_j N_k^2 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \text{c.c.} \quad (\text{VII-19})$$

le dernier terme de (VII-17) est le champ rayonné par le dipôle ou encore le "champ des sources"

Le calcul de la transformée de Fourier spatio-temporelle qui figure dans (VII-19) ne présente aucune difficulté de principe et est donné en appendice. On obtient

$$4\pi\epsilon_0 F_{ij}(\vec{r}, t) = \frac{1}{r} (\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2}) \left[-\frac{1}{c^2} \delta''(\tau - \frac{r}{c}) + \frac{1}{c^2} \delta''(\tau + \frac{r}{c}) \right] \\ + \frac{1}{r^2} (\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{r^2}) \left[-\frac{1}{c} \delta'(\tau - \frac{r}{c}) - \frac{1}{c} \delta'(\tau + \frac{r}{c}) \right] \\ - \frac{1}{r^3} (\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{r^2}) \left[\delta(\tau - \frac{r}{c}) - \delta(\tau + \frac{r}{c}) \right] \quad (\text{VII-20})$$

où x_i la i -ième composante cartésienne du vecteur \vec{r} .

En reportant (VII-20) dans (VII-17), on obtient finalement

$$E_i(\vec{r}, t) = E_{0i}(\vec{r}, t) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{r} (\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2}) \ddot{D}_j(t - \frac{r}{c}) \\ - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{r^2} (\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{r^2}) \dot{D}_j(t - \frac{r}{c}) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{r^2}) D_j(t - \frac{r}{c}) \quad (\text{VII-21})$$

c) Discussion physique

- L'expression (VII-21) a la même structure que celle de l'expression classique donnant le rayonnement d'un dipôle. Cela n'a rien d'étonnant étant donné que l'équation (VII-15) n'a rien de spécifiquement quantique (voir remarque à la fin du § 2). On peut considérer en fait que le calcul précédent n'est autre qu'un calcul du rayonnement classique d'un dipôle basé sur la formulation hamiltonienne de l'électrodynamique (plutôt que sur les équations de Maxwell).
- Les facteurs sans dimensions $(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2})$ et $(\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{r^2})$ donnent la répartition angulaire du champ rayonné, qui est la somme de 3 termes variant en $1/r$, $1/r^2$, $1/r^3$.
- Si le dipôle a un mouvement quasi-harmonique, de fréquence ω_0 , alors $\ddot{D}_j \sim \omega_0^2 D_j$, $\dot{D}_j \sim \omega_0 D_j$, et par suite le champ rayonné est proportionnel au dipôle émetteur (pris au instant t/c avant). On voit également que, si $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$ est la longueur d'onde associée à ω_0 , le terme en $1/r$ prédomine pour $r \gg \lambda_0$ (c'est le rayonnement à très grande distance d'un dipôle), alors que pour $r \ll \lambda_0$ (mais $r \gg 2\pi/km$), c'est le terme en $1/r^3$ qui prédomine. L'effet de retard mis à part, ce terme en $1/r^3$ a d'ailleurs la même structure que celui donnant le champ électrostatique d'un dipôle.

③ Champ créé par le dipôle à son propre emplacement

a) Région de l'espace considérée.

Le calcul de $F_{ij}(\vec{r}, t)$ donné en appendice montre que, dès que $r \ll 1/k_m$, $F_{ij}(\vec{r}, t)$ diffère très peu de sa valeur en $\vec{r} = \vec{0}$.

Ce résultat se comprend bien physiquement. On peut montrer en effet que le fait d'introduire une coupure en k_m est équivalent à moyenner en chaque point \vec{r} le champ sur une sphère centrée en \vec{r} et de rayon $\sim 1/k_m$. Il est par suite normal que le champ ainsi moyenné conserve à peu près la même valeur en 2 points distants de moins de $1/k_m$.

b) Calcul de $\vec{E}^{(+)}(\vec{0}, t)$

Le calcul de $F_{ij}(\vec{0}, t)$ fait en appendice montre que $F_{ij}(\vec{0}, t)$ est proportionnel à $S'''(t)$. Comme l'intégrale sur t' de VII-17 va de 0 à $+\infty$ (on suppose $t-t_0 \gg 1/ck_m$), et non de $-\infty$ à $+\infty$, on n'obtient pas un résultat simple dans le cas général pour $E_i(\vec{0}, t)$ ne faisant intervenir, comme en VII-21, que des dérivés de D_j .

Nous allons donc, à partir de maintenant, particulariser un peu plus le problème, en supposant que $D(t)$ n'a qu'une fréquence propre (voir VII-6 et VII-7), de manière à avoir des expressions relativement simples (la généralisation des calculs qui suivent à des situations plus complexes, où D a plusieurs fréquences propres, ne pose cependant aucun problème). De plus, nous allons calculer séparément $\vec{E}^{(+)}(\vec{0}, t)$, et $\vec{E}^{(-)}(\vec{0}, t)$ qui est son adjoint, car nous en aurons besoin dans le chapitre suivant. Rappelons que $\vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t)$ est la partie du développement (VII-1) qui ne contient que les $a_{kE}(t)$.

On obtient ainsi, en reportant (VII-15) dans le 1^{er} terme du 2^{em} membre de (VII-1), en utilisant VII-6 et VII-7 pour $D_j(t')$, et en multipliant les 2 membres de l'équation par d

$$d.E_i^{(+)}(\vec{0}, t) = d.E_{0i}^{(+)}(\vec{0}, t) + d \int_0^{t-t_0} d\tau \sum_{\vec{k} \in E} \underbrace{E_i E_j \delta_{ij}}_{E_i E_j} \frac{i}{\hbar} N_k^2 e^{-i\omega\tau} [A_+(t-\tau) + A_-(t-\tau)] \quad (VII-22)$$

La somme sur \vec{k} de $N_k^2 e^{-i\omega\tau}$ fait apparaître une fonction de τ très étroite (de largeur $1/ck_m$), de sorte qu'il est justifié de poser

$$A_+(t-\tau) = A_+(t) e^{-i\omega_0\tau} \quad A_-(t-\tau) = A_-(t) e^{i\omega_0\tau} \quad (VII-23)$$

(On ne tient compte que de l'évolution harmonique de A_+ et A_- dans l'intervalle de temps très court $t-\tau, \tau$). En remplaçant $\tau-t_0$ par $+\infty$, on voit alors apparaître les fonctions de ω

$$\int_0^{\infty} d\tau e^{-i(\omega \pm \omega_0)\tau} = \pi \delta(\omega \pm \omega_0) - i\mathcal{P} \frac{1}{\omega \pm \omega_0} \quad (VII-24)$$

de sorte que

$$d.E_i^{(+)}(\vec{0}, t) - d.E_{0i}^{(+)}(\vec{0}, t) = \sum_{\vec{k} \in E} E_i E_j \frac{i}{\hbar} N_k^2 d^2 \left\{ A_+(t) \left[\pi \delta(\omega + \omega_0) - i\mathcal{P} \frac{1}{\omega + \omega_0} \right] + A_-(t) \left[\pi \delta(\omega - \omega_0) - i\mathcal{P} \frac{1}{\omega - \omega_0} \right] \right\} \quad (VII-25)$$

La seule quantité qui dépend des angles de \vec{k} dans (VII-25) est $E_i E_3$, dont la moyenne angulaire s'annule si $i \neq 3$. On peut donc remplacer $E_i E_3$ par $E_3^2 \delta_{i3}$ et obtenir finalement

$$\begin{aligned} E_i^{(+)}(\vec{0}, t) - E_{0i}^{(+)}(\vec{0}, t) &= \frac{i\hbar}{d} \delta_{i3} \left[\left(\frac{\gamma}{2} + i\delta\right) S_-(t) + i\bar{\delta} S_+(t) \right] \\ E_i^{(-)}(\vec{0}, t) - E_{0i}^{(-)}(\vec{0}, t) &= -\frac{i\hbar}{d} \delta_{i3} \left[\left(\frac{\gamma}{2} - i\delta\right) S_+(t) - i\bar{\delta} S_-(t) \right] \end{aligned} \quad (VII-26)$$

où les quantités $\gamma, \delta, \bar{\delta}$ sont définies par

$$\gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k} \in E} d^2 E_3^2 \mathcal{N}_k^2 \delta(\hbar\omega - \hbar\omega_0) \quad (VII-27)$$

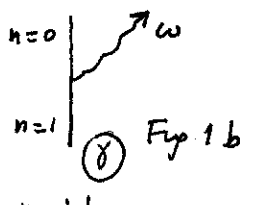
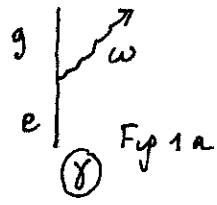
$$\delta = \frac{1}{\hbar} \mathcal{P} \sum_{\vec{k} \in E} \frac{d^2 E_3^2 \mathcal{N}_k^2}{\hbar\omega_0 - \hbar\omega} \quad (VII-28)$$

$$\bar{\delta} = \frac{1}{\hbar} \mathcal{P} \sum_{\vec{k} \in E} \frac{d^2 E_3^2 \mathcal{N}_k^2}{-\hbar\omega_0 - \hbar\omega} \quad (VII-29)$$

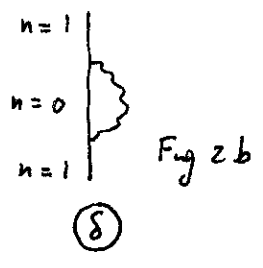
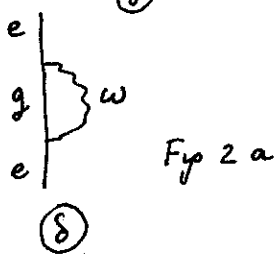
c) Discussion physique

- Interprétation de $\gamma, \delta, \bar{\delta}$

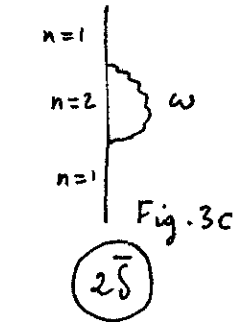
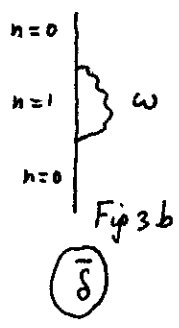
γ s'interprète comme la probabilité d'émission d'un photon par unité de temps à partir de l'état e pour le système à 2 niveaux (Fig 1a) à partir de l'état $n=1$ pour l'oscillateur harmonique (Fig 1b). On reconnaît en effet en (VII-27) la formule la règle d'or de Fermi puisque $d^2 E_3^2 \mathcal{N}_k^2$ est le carré de l'élément de matrice de V entre l'état atomique supérieur + 0 photon et l'état atomique inférieur + 1 photon



δ est le déplacement radiatif de e (ou de $n=1$) quand on fait l'approximation r.w.2. (Figs 2a et 2b). On reconnaît en effet en (VII-28) un déplacement d'énergie au 2^{ème} ordre



$\bar{\delta}$ est le déplacement radiatif de g (ou de $n=0$) quand on ne fait pas r.w.2. (Figs 3a, 3b). Notons également que $n=1$ a un déplacement radiatif supplémentaire $2\bar{\delta}$ quand on ne fait pas r.w.2. (Fig 3c), du à une transition virtuelle vers $n=2$.



(Le facteur 2 dans $2\bar{\delta}$ vient du carré de l'élément de matrice entre $n=1$ et $n=2$, qui est en $(\sqrt{2})^2 = 2$)

- On voit sur (VII-26) que le champ créé par le dipôle à son propre emplacement est parallèle à ce dipôle (facteur δ_{ij}), qu'il comprend une partie en quadrature avec le dipôle, proportionnelle à $\dot{\gamma}$ (c'est cette partie qui est susceptible d'effectuer du travail, donc d'amortir le mouvement du dipôle) et une partie en phase ou en opposition de phase, proportionnelle à δ et $\dot{\delta}$.

Notons également que ce sont les processus antirésonnants à l'origine de $\dot{\delta}$, qui introduisent dans $E^{(+)}$ une composante variant non en $e^{-i\omega t}$ mais en $e^{+i\omega t}$.

Notons enfin que γ est indépendant de k_M , alors que δ et $\dot{\delta}$ croissent avec k_M (une renormalisation des paramètres de l'électron serait nécessaire pour obtenir des déplacements radiatifs indépendants de k_M).

④ Relations de commutation entre le champ du vide \vec{E}_0 et une grandeur atomique quelconque G_A

a) Principe du calcul

- A l'instant initial t_0 , les grandeurs atomiques $G_A(t_0)$ et les grandeurs de champs $a_{kE}(t_0)$ (et $a_{kE}^+(t_0)$) commutent :

$$[G_A(t_0), a_{kE}(t_0)] = 0 \quad (\text{VII-30})$$

- L'évolution hamiltonienne entre t_0 et t conserve les commutateurs :

$$[G_A(t), a_{kE}(t)] = 0 \quad (\text{VII-31})$$

Par contre comme $a_{kE}(t)$ est différent de $a_{kE}(t_0)$ (voir VII-15), $G_A(t)$ ne commute plus en général avec $a_{kE}(t_0)$, et par suite avec le champ du vide $\vec{E}_0(\vec{r}_i, t_i)$ qui est une superposition linéaire des $a_{kE}(t_0)e^{-i\omega(t_i-t_0)}$ [et $a_{kE}^+(t_0)e^{i\omega(t_i-t_0)}$]

- En fait, en reportant (VII-15) dans (VII-31), on obtient aisément

$$[G_A(t), a_{kE}(t_0)] = -\frac{N_k}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \epsilon_j [G_A(t), D_j(t')] e^{-i\omega(t_0-t')} \quad (\text{VII-32})$$

ce qui permet ensuite par superposition de calculer n'importe quel commutateur $[G_A(t), E_{0i}(\vec{r}_i, t_i)]$.

b) Résultats du calcul pour les commutateurs faisant intervenir le champ du vide en un point \vec{r}_i suffisamment loin du dipôle ($r_i \gg 1/k_M$)

$$\begin{aligned} [G_A(t), E_{0i}(\vec{r}_i, t_i)] &= [G_A(t), \sum_{\vec{k}E} iN_k \epsilon_i a_{kE}(t_0) e^{-i\omega(t_i-t_0)} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_i} + \text{c.c.}] \\ &= - \int_{t_0}^t dt' [G_A(t), D_j(t')] \left\{ \sum_{\vec{k}E} \frac{i\epsilon_i \epsilon_j N_k^2}{\hbar} e^{-i\omega(t_i-t')} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_i} + \text{c.c.} \right\} \quad (\text{VII-33}) \end{aligned}$$

En posant $t_i - t' = \tau$, et en utilisant (VII-19), on obtient alors

$$[G_A(t), E_{0i}(\vec{r}_i, t_i)] = - \int_{t_i-t}^{t_i-t_0} d\tau F_{ij}(\vec{r}_i, \tau) [G_A(t), D_j(t_i-\tau)] \quad (\text{VII-34})$$

On voit alors que si $t_1 - t > r_1/c$, l'intervalle d'intégration sur τ ne contient ni $\tau = r_1/c$ ni $\tau = -r_1/c$, c-à-d aucun des centres des jonctions S, S', S'' figurant dans l'expression (VII-20) de F_{ij} . On a donc

$$\boxed{[G_A(t), E_{0i}(\vec{r}_1, t_1)] = 0 \quad \text{si } t_1 - t > r_1/c} \quad (\text{VII-35})$$

Le résultat est très satisfaisant physiquement

c) Commutateurs faisant intervenir le champ du vide $\vec{E}_0(\vec{0}, t_1)$ à l'emplacement du dipôle.

Comme dans le § 3 précédent, nous séparons $E_0^{(+)}$ et $E_0^{(-)}$ et utilisons (VII-6) et (VII-7), ce qui donne par exemple

$$\begin{aligned} [G_A(t), E_{0i}^{(+)}(\vec{0}, t_1)] &= -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' [G_A(t), D(t')] \sum_{\vec{k} \in \mathbb{E}} \epsilon_i \epsilon_j N_k^2 e^{-i\omega(t-t')} \\ &= -\frac{id}{\hbar} \delta_{i3} \int_{t_1-t}^{t_1-t_0} d\tau [G_A(t), A_+(t_1-\tau) + A_-(t_1-\tau)] \sum_{\vec{k} \in \mathbb{E}} \epsilon_3^2 N_k^2 e^{-i\omega\tau} \\ &= -\frac{id}{\hbar} \delta_{i3} [G_A(t), A_+(t_1)] \int_{t_1-t}^{t_1-t_0} d\tau \sum_{\vec{k} \in \mathbb{E}} \epsilon_3^2 N_k^2 e^{-i(\omega+\omega_0)\tau} \\ &\quad - \frac{id}{\hbar} \delta_{i3} [G_A(t), A_-(t_1)] \int_{t_1-t}^{t_1-t_0} d\tau \sum_{\vec{k} \in \mathbb{E}} \epsilon_3^2 N_k^2 e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} \end{aligned} \quad (\text{VII-36})$$

Comme dans le § 3 on a utilisé le fait que $f(\tau) = \sum_{\vec{k} \in \mathbb{E}} N_k^2 \epsilon_3^2 e^{-i\omega\tau}$ est une fonction très étroite en τ (de largeur $1/k_m c$) pour remplacer $A_{\pm}(t_1-\tau)$ par $A_{\pm}(t_1) e^{\mp i\omega_0 \tau}$.

Cette même propriété de la fonction $f(\tau)$ montre d'ailleurs que si $t_1 - t \gg 1/k_m c$, l'intervalle d'intégration sur τ ne contient pas la zone où $f(\tau)$ n'est pas nulle, de sorte que

$$\boxed{[G_A(t), E_{0i}^{(+)}(\vec{0}, t_1)] = 0 \quad \text{si } t_1 - t \gg 1/k_m c} \quad (\text{VII-37})$$

Par contre, si $t - t_1 \gg 1/k_m c$ (et $t_1 - t_0 \gg 1/k_m c$), on peut remplacer les bornes d'intégration par $-\infty$ et $+\infty$, ce qui fait apparaître $\delta(\omega + \omega_0)$ et $\delta(\omega - \omega_0)$ et donne par suite compte tenu de (VII-27)

$$[G_A(t), E_{0i}^{(+)}(\vec{0}, t_1)] = -\frac{i\hbar}{d} \gamma \delta_{i3} [G_A(t), A_-(t_1)] \quad \text{si } t - t_1 \gg 1/k_m c \quad (\text{VII-38})$$

Enfin si $t_1 = t$, les bornes d'intégration dans (VII-36) deviennent 0 et $+\infty$, ce qui fait apparaître $\delta(\omega \pm \omega_0)$ et $\mathcal{P} \frac{1}{\omega \pm \omega_0}$ et donne, compte tenu de (VII-28) et (VII-29)

$$\begin{aligned} [G_A(t), E_{0i}^{(+)}(\vec{0}, t)] &= -\frac{i\hbar}{d} (i\delta) \delta_{i3} [G_A(t), A_+(t)] \\ &\quad - \frac{i\hbar}{d} \left(\frac{\gamma}{2} - i\delta\right) \delta_{i3} [G_A(t), A_-(t)] \end{aligned} \quad (\text{VII-39})$$

- Des calculs tout à fait analogues donnent

$$\boxed{[G_A(t), E_{0i}^{(-)}(\vec{0}, t_1)] = 0 \quad \text{si} \quad t_1 - t \gg 1/k_M c} \quad (\text{VII-40})$$

$$[G_A(t), E_{0i}^{(-)}(\vec{0}, t_1)] = \frac{i\hbar}{d} \gamma \delta_{i3} [G_A(t), A_+(t_1)] \quad \text{si} \quad t_1 - t \gg 1/k_M c \quad (\text{VII-41})$$

$$[G_A(t), E_{0i}^{(-)}(\vec{0}, t)] = \frac{i\hbar}{d} \left(\frac{\gamma}{2} + i\delta \right) \delta_{i3} [G_A(t), A_+(t)] + \frac{i\hbar}{d} (-i\delta) \delta_{i3} [G_A(t), A_-(t)] \quad (\text{VII-42})$$

Appendice : Calcul de $F_{ij}(\vec{r}, \tau)$

- Sommation sur les polarisations.

Soient \vec{E} et \vec{E}' 2 vecteurs unitaires $\perp \vec{k}$ et \perp entre eux. En les complétant avec \vec{k}/k , on obtient une base orthonormale satisfaisant la relation de fermeture

$$E_i E_j + E'_i E'_j + \frac{k_i k_j}{k^2} = \delta_{ij} \quad (\text{A-1})$$

ce qui donne

$$\sum_{\vec{E} \perp \vec{k}} E_i E_j = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \quad (\text{A-2})$$

- En utilisant

$$\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = \left(\delta_{ij} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \right) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (\text{A-3})$$

$$\text{et} \quad \sum_{\vec{k}} = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int_0^{k_M} dk k^2 \int d\Omega \quad (\text{A-4})$$

on obtient, après intégration angulaire

$$F_{ij}(\vec{r}, \tau) = \frac{i}{\hbar} \frac{L^3}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^{k_M} dk k^2 \frac{\hbar c k}{2\epsilon_0 L^3} \left(\delta_{ij} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \right) \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} e^{-i\omega\tau} + c.c. \quad (\text{A-5})$$

Ajouter le complexe conjugué de l'expression écrite en (A-5) revient simplement à changer les bornes d'intégration

$$\int_0^{k_M} \rightarrow \int_{-k_M}^{+k_M}$$

- Cas $r \gg 1/k_M$

On ne peut pas faire de développement limité de $\frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr}$. Un calcul de dérivations élémentaires donne

$$\left(\delta_{ij} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \right) \frac{e^{\pm ikr}}{r} = \frac{1}{r} \left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2} \right) e^{\pm ikr} \pm \frac{i}{kr^2} \left(\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{r^2} \right) e^{\pm ikr} - \frac{1}{k^2 r^3} \left(\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{r^2} \right) e^{\pm ikr} \quad (\text{A-6})$$

ce qui reporté dans (A-5) donne finalement

$$F_{ij}(\vec{r}, \tau) = \frac{c}{4\pi\epsilon_0} \times \left\{ \begin{aligned} & - \frac{1}{r} (\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2}) \frac{1}{2\pi} \int_{-k_M}^{+k_M} dk (-k^2) [e^{ik(r-\tau)} - e^{-ik(r+\tau)}] \\ & + \frac{1}{r^2} (\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{r^2}) \frac{1}{2\pi} \int_{-k_M}^{+k_M} dk (ik) [e^{ik(r-\tau)} + e^{-ik(r+\tau)}] \\ & - \frac{1}{r^3} (\delta_{ij} - \frac{3x_i x_j}{r^2}) \frac{1}{2\pi} \int_{-k_M}^{+k_M} dk [e^{ik(r-\tau)} - e^{-ik(r+\tau)}] \end{aligned} \right\} \quad (A-7)$$

En utilisant $\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$, $\delta'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (ik) e^{ikx} dk$,
on obtient alors (VII-20)

- Cas $r \ll 1/k_M$. On peut alors faire un développement limité de

$$\frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} = 2 \left(1 - \frac{k^2 r^2}{6} + \dots \right) \quad (A-8)$$

ce qui donne

$$\left(\delta_{ij} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} = 2 \left(\delta_{ij} - \frac{2\delta_{ij}}{6} + o(kr) \right) \\ = \frac{4}{3} \delta_{ij} \quad (A-9)$$

On vérifie aisément qu'on obtient le même résultat qu'en faisant d'emblée $\vec{r} = \vec{0}$ dans (VII-19)

En reportant (A-9) dans (A-5), on obtient

$$F_{ij}(\vec{0}, \tau) = \frac{2}{3} \frac{\delta_{ij}}{\epsilon_0 c^3} \frac{1}{(2\pi)^2} \underbrace{\int_{-w_M}^{+w_M} dw \omega^3 \sin \omega \tau}_{\frac{d^3}{d\tau^3} \underbrace{\int_{-w_M}^{w_M} dw \cos \omega \tau}_{2\pi \delta(\tau)}} \quad (A-10)$$

c.à-d finalement

$$F_{ij}(\vec{0}, \tau) = \frac{1}{3\pi \epsilon_0 c^3} \delta_{ij} \delta'''(\tau) \quad (A-11)$$