

Signaux de photodetection

Théorie "sans photons" et "avec photons"

Buts de ce chapitre

- Calculer les divers types de signaux qui peuvent être observés à la sortie d'un photomultiplicateur lorsque ce dernier est exposé à un rayonnement libre incident. Le rayonnement sera traité soit classiquement (théorie "sans photons"), soit quantiquement (théorie "avec photons")
- Montrer que ces signaux renseignent sur les fonctions de corrélation du rayonnement (classique ou quantique). En profiter pour souligner, sur quelques exemples, la richesse et la puissance des méthodes de corrélation d'intensité et de comptage de photoélectrons par rapport aux méthodes spectroscopiques interférentielles habituelles.
- Essayer de dégager les analogies et différences, entre les fonctions de corrélation classiques et quantiques, de manière à pouvoir ensuite, dans le chapitre suivant, discuter de la recherche d'effets typiquement quantiques.

A - Etude du processus de base : photoionisation d'un atome

① Ionisation d'un atome par une onde monochromatique classique : l'effet photoélectrique "sans photons"

a) Notations

Atome : traité quantiquement

H_A : hamiltonien

Niveaux : voir figure

ex : moment dipolaire

Rayonnement : onde classique
sinusoïdale

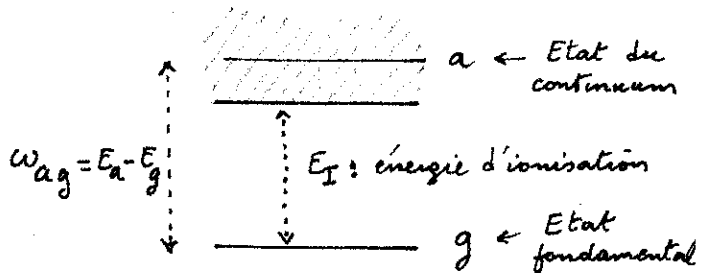


Fig 1

Hamiltonien d'interaction (approximation dipolaire électrique)

$$V(t) = -ex \mathcal{E} \sin \omega t \quad (II-1)$$

Problème A $t=0$, l'atome est dans l'état fondamental. Il est soumis pendant un temps t au rayonnement incident. Quelle est la probabilité de le trouver au bout de ce temps dans un groupe d'états du continuum ?

$$P_{ion}(t) = \sum_a R_a P_{g \rightarrow a}(t) \quad (II-2)$$

R_a décrit l'efficacité de collection du photoélectron en fonction de son énergie E_a . Si $R_a = \delta(E_a - E)$, on ne collecte que les électrons d'énergie cinétique E bien définie (comme dans un spectromètre β ou dans une expérience "ESCA"). Si $R_a = 1$, collection parfaite (détecteur à large bande).

Représentation d'interaction

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{iH_A t} |\psi(t)\rangle$$

$$i \frac{d}{dt} |\tilde{\psi}(t)\rangle = \tilde{V}(t) |\tilde{\psi}(t)\rangle$$

$$\text{avec } \tilde{V}(t) = e^{iH_A t} V(t) e^{-iH_A t} \quad (\text{II-3})$$

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \tilde{U}(t,0) |\tilde{\psi}(0)\rangle$$

$$\tilde{U}(t,0) = -i \int_0^t dt' \tilde{V}(t') - \int_{t'}^t dt'' \int_0^{t'} dt' \tilde{V}(t'') \tilde{V}(t') + \dots \quad (\text{II-4})$$

Amplitude de transition $g \rightarrow a$ (à l'ordre le plus bas en V)

$$\langle a | \tilde{U}(t,0) | g \rangle = \frac{e^{\mathcal{E}}}{2i} x_{ag} \left[\frac{1 - e^{i(\omega_{ag} - \omega)t}}{\omega_{ag} - \omega} - \frac{1 - e^{i(\omega_{ag} + \omega)t}}{\omega_{ag} + \omega} \right] \quad (\text{II-5})$$

Comme ω_{ag} et ω sont > 0 , le dénominateur du 2^e terme du crochet de II-5 ne peut jamais s'annuler (terme "anti-résonnant") à la différence du 1^{er} (terme "résonnant"). Pour $t \gg \frac{1}{\omega}$, la contribution du 2^e terme est négligeable (2 fonctions de diffraction séparées par une distance 2ω grande devant leur largeur $1/t$).

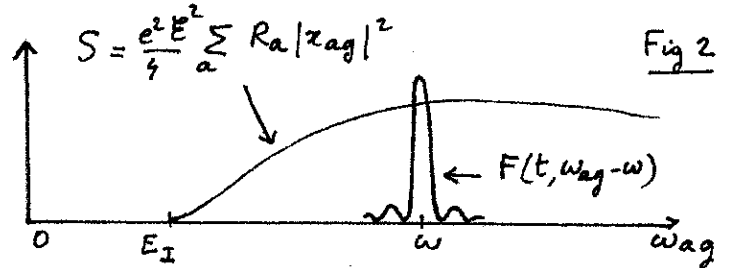
Probabilité de transition $g \rightarrow a$

$$P_{g \rightarrow a}(t) = \frac{e^2 \mathcal{E}^2}{4} |x_{ag}|^2 \left[\frac{\sin[(\omega_{ag} - \omega)t/2]}{(\omega_{ag} - \omega)/2} \right]^2 \quad (\text{II-6})$$

Fonction de diffraction $F(t, \omega_{ag} - \omega)$, centrée en $\omega_{ag} = \omega$ et de largeur $1/t$, se comportant comme $2\pi t \delta(\omega_{ag} - \omega)$ vis à vis des fonctions variant lentement sur un intervalle $1/t$.

Sommation sur les états finaux

Si R_a varie peu avec E_a (détection à large bande), la courbe S varie peu avec ω_{ag} . Sa "largeur" Δ est l'inverse du temps de réponse du détecteur. Si $t \gg \frac{1}{\Delta}$, on peut assimiler



F à $2\pi t \delta(\omega_{ag} - \omega)$, ce qui donne en reportant (II, 6) dans (II, 2)

$$P_{ion}(t) = w t \quad (\text{II-7})$$

avec

$$w = \frac{\mathcal{E}^2}{4} s \quad s = 2\pi e^2 \sum_a R_a |x_{ag}|^2 \delta(\omega_{ag} - \omega) \quad (\text{II-8})$$

c) Conclusion : on retrouve toutes les caractéristiques de l'effet photoélectrique

- Pour $t \gg \frac{1}{\omega}, \frac{1}{\Delta}$, l'irradiation de l'atome produit une ionisation de l'atome avec une probabilité par unité de temps w proportionnelle à l'intensité \mathcal{E}^2
- L'ionisation ne se produit que si $w > E_I$ (voir fig. 2)
- Les états du continuum atteints sont tels que $\omega_{ag} = \omega$ à $\frac{1}{t}$ près (voir toujours fig. 2). On retrouve la fameuse relation d'Einstein entre énergie cinétique E_a du photoélectron, travail d'extraction E_I et fréquence ω
 $\omega_{ag} = \omega \rightarrow E_a - E_g = \omega \rightarrow E_a = \omega + E_g = \omega - E_I$

② Généralisation à une onde classique quelconque
(non monochromatique et pouvant fluctuer)

a) Composantes de fréquences > 0 et < 0 du champ

- Développement du champ $E(r, t)$ en "modes" (par exemple, ondes ^{progressives} planes)

$$E(r, t) = \sum_k N_k [\alpha_k e^{i(kr - \omega t)} + \alpha_k^* e^{-i(kr - \omega t)}] \quad (\text{II-9})$$

N_k : coef. de normalisation (sans importance ici). On oublie aussi pour simplifier le caractère vectoriel de E et les vecteurs polarisation

α_k : coefficient du développement du champ sur le "mode k "
($\omega = c|k|$)

- Par définition

$$E^{(+)}(r, t) = \sum_k N_k \alpha_k e^{i(kr - \omega t)} \quad E^{(-)}(r, t) = [E^{(+)}(r, t)]^* \quad (\text{II-10})$$

$E^{(+)}$: composante de fréquences > 0 du champ (dépendance en $e^{-i\omega t}$)

- On appellera également "intensité" $I(r, t)$ du champ en r, t

$$I(r, t) = E^{(-)}(r, t) E^{(+)}(r, t) = |E^{(+)}(r, t)|^2 \quad (\text{II-11})$$

b) Champs aléatoires

- $E(r, t)$ non connue avec certitude : fonction aléatoire de t
 $\{\alpha_k\}$: coefficients de Fourier, aléatoires. Distribution de pbte $\mathcal{P}(\{\alpha\})$
(Voir cours 1977-78 chapitre IV)
- Processus aléatoires stationnaires (invariants / translation dans le temps)
Moyennes à 1 temps t : indépendantes de t
Moyennes à 2 temps t, t' : ne dépendent que de $t - t'$
- Processus aléatoires gaussiens et stationnaires
Nous utiliserons la relation suivante (notation i pour r_i, t_i)

$$\overline{E^{(-)}(1) E^{(-)}(2) E^{(+)}(3) E^{(+)}(4)} = \overline{E^{(-)}(1) E^{(+)}(3)} \overline{E^{(-)}(2) E^{(+)}(4)} + \overline{E^{(-)}(1) E^{(+)}(4)} \overline{E^{(-)}(2) E^{(+)}(3)} \quad (\text{II-12})$$

c) Ce qui change dans le calcul précédent

- Il faut faire le calcul jusqu'au bout avec une "réalisation" possible de $E(r, t)$, puis moyennes à la fin (c-à-d au niveau de $P_g \rightarrow a$ et non de $\tilde{U}_{g \rightarrow a}$), sur les diverses réalisations possibles de $E(r, t)$
- On remplace dans (II-1) $E \sin \omega t$ par $E(r, t)$. On obtient

$$\begin{aligned} \langle a | \tilde{U}(t, 0) | g \rangle &= -i \int_0^t dt' \langle a | \tilde{V}(t') | g \rangle \\ &= -ie \alpha_{ag} \int_0^t dt' e^{i\omega_{ag} t'} E^{(+)}(r, t') \end{aligned} \quad (\text{II-13})$$

L'approximation qui consiste à ne garder que $E^{(+)}(r, t')$ dans le second membre de (II-13) (c-à-d à négliger $E^{(-)}$ dans $E = E^{(+)} + E^{(-)}$) est équivalente à celle qui consiste, dans l'équation (II-5) du § A 1, à négliger le 2^{ème} terme du crochet devant le 1^{er} : en effet, seul $E^{(+)}$, qui varie en $e^{-i\omega t'}$, pourra donner avec $e^{i\omega_{ag} t'}$ ($\omega_{ag} > 0$) des termes qui vont avoir un effet cumulatif dans l'intégrale sur t'

- On élève au carré le module de (II-13) et, seulement après, on prend la moyenne sur les réalisations de \mathcal{E} , ce qui donne

$$P_{g \rightarrow a}(t) = e^2 |\chi_{ag}|^2 \int_0^t dt' \int_0^t dt'' e^{i\omega_{ag}(t'-t'')} \overline{\mathcal{E}^{(-)}(r, t'')} \mathcal{E}^{(+)}(r, t') \quad (\text{II-14})$$

On voit apparaître ainsi la fonction de corrélation classique

$$\mathcal{G}^{(1)}(rt'', rt') = \overline{\mathcal{E}^{(-)}(r, t'')} \mathcal{E}^{(+)}(r, t') \quad (\text{II-15})$$

- Sommation sur les états finaux

(i) Détection à bande étroite. On ne collecte que les photoélectrons ayant une énergie bien définie Ω au dessus de g : $R_a = \delta(\Omega - \omega_{ag})$ le signal est alors proportionnel à

$$\int_0^t dt' \int_0^t dt'' e^{i\Omega(t'-t'')} \mathcal{G}^{(1)}(rt'', rt') \quad (\text{II-16})$$

Si le processus est stationnaire, c-à-d si $\mathcal{G}^{(1)}(rt'', rt') = \mathcal{G}^{(1)}(r, \tau)$ avec $\tau = t' - t''$, et si le temps d'observation t est long devant le temps de corrélation τ_c du champ (temps caractéristique de $\mathcal{G}^{(1)}(\tau)$), on montre aisément que (II-16) est égal à

$$t \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Omega\tau} \mathcal{G}^{(1)}(r, \tau) \quad (\text{II-17})$$

Le taux de photoionisation par unité de temps, avec une détection à bande étroite, est proportionnel à la T.F. de la fonction de corrélation $\mathcal{G}^{(1)}$ du champ, prise à la fréquence Ω de détection, c-à-d encore à la puissance spectrale $P(\Omega)$ du champ

(ii) Détection à bande large: R_a dépend peu de E_a

- Multiplions (II-14) par R_a et sommions sur a . On obtient

$$P_{\text{ion}}(t) = \sum_a R_a P_{g \rightarrow a}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega s(\omega) e^{i\omega(t'-t'')} \mathcal{G}^{(1)}(rt'', rt') \quad (\text{II-18})$$

où l'on a introduit la sensibilité spectrale $s(\omega)$ du détecteur définie par

$$s(\omega) = 2\pi e^2 \sum_a |\chi_{ag}|^2 R_a \delta(\omega - \omega_{ag}) \quad (\text{II-19})$$

$s(\omega)$ (qui est proportionnel à l'intégrale du produit des 2 courbes de la fig. 2) varie très lentement avec ω : échelle caractéristique Δ . Si Δ est grand devant l'inverse du temps de corrélation du champ incident, c-à-d grand devant la largeur spectrale du rayonnement étendue, on peut négliger la dépendance en ω de $s(\omega)$, et remplacer dans (II-18) $s(\omega)$ par une constante S [valeur de $s(\omega)$ pour la fréquence moyenne du champ]. L'intégrale sur ω de (II-18) donne alors $2\pi S \delta(t'-t'')$, et il vient

$$P_{\text{ion}}(t) = S \int_0^t dt' \mathcal{G}^{(1)}(rt', rt') \quad (\text{II-20})$$

- On obtient alors pour le taux de comptage $w_1(t)$ (plus précisément $w_1(t) dt$ est la probabilité de détecter un photoélectron entre t et $t+dt$)

$$w_1(t) = \frac{dP(t)}{dt} = S \mathcal{G}^{(1)}(rt, rt) = S \overline{\mathcal{E}^{(-)}(r, t) \mathcal{E}^{(+)}(r, t)} = S \overline{I(r, t)}$$

le taux de comptage est proportionnel à l'intensité du champ (II-2)

③ Calcul quantique : l'effet photoélectrique "avec photons" II-5

a) Opérateurs champ - Hamiltonien du système global

- En théorie quantique, le champ électrique est représenté par un opérateur indépendant du temps en représentation de Schrödinger

$$E(r) = \sum_k N_k (a_k e^{ikr} + a_k^+ e^{-ikr}) \quad (\text{II-22})$$

a_k^+ et a_k : opérateurs création et annihilation d'un photon du mode k

- Le système global atome détecteur + champ est décrit par un hamiltonien indépendant du temps

$$H = H_A + H_R + V \quad (\text{II-23})$$

où $H_R = \sum_k \omega (a_k^+ a_k + \frac{1}{2})$ est l'hamiltonien du rayonnement et $V = -ex E(r)$ est l'interaction atome - champ (r : position du centre de gravité de l'atome)

- En représentation d'interaction, on se débarrasse de H_A et H_R mais V est remplacé par $\tilde{V}(t) = -e\tilde{x}(t) E(r,t)$ où

$$E(r,t) = e^{iH_R t} E(r) e^{-iH_R t} = \sum_k N_k [a_k e^{i(kr-\omega t)} + a_k^+ e^{-i(kr-\omega t)}] \quad (\text{II-24})$$

On notera la grande ressemblance entre (II-9) et (II-24). Ne pas oublier cependant que a_k et a_k^+ sont des nombres dans (II-9) alors que a_k et a_k^+ sont des opérateurs. On posera ici également

$$E^{(+)}(r,t) = \sum_k N_k a_k e^{i(kr-\omega t)} \quad E^{(-)}(r,t) = [E^{(+)}(r,t)]^\dagger \quad (\text{II-25})$$

Différence physique plus claire entre $E^{(+)}$ et $E^{(-)}$. $E^{(+)}$ est la composante de E qui détruit 1 photon (alors que $E^{(-)}$ en crée)

b) Éléments nouveaux par rapport aux calculs du § A2

- Étant donné la ressemblance entre (II-24) et (II-9), les 2 calculs se ressemblent beaucoup aux 2 points suivants près :

(i) $E^{(+)}$ est un opérateur alors que $\mathcal{E}^{(+)}$ est un nombre

(ii) Il faut ajouter les nombres quantiques du champ

$|i\rangle$ état initial du champ, $|f\rangle$ état final du champ

- Ainsi, il faut remplacer l'amplitude $\langle a | \tilde{U}(t,0) | g \rangle$ calculée en (II-13) par $\langle a f | \tilde{U}(t,0) | g i \rangle$. On obtient alors une expression identique à (II-13), moyennant le remplacement

$$\mathcal{E}^{(+)}(r,t') \longrightarrow \langle f | E^{(+)}(r,t') | i \rangle \quad (\text{II-26})$$

- Quand on calcule la probabilité, on a de même

$$\mathcal{E}^{(-)}(r,t'') \mathcal{E}^{(+)}(r,t') \longrightarrow \langle i | E^{(-)}(r,t'') | f \rangle \langle f | E^{(+)}(r,t') | i \rangle \quad (\text{II-27})$$

quel est alors l'équivalent dans le calcul quantique de la moyenne sur les réalisations possibles du champ ?

- Considérons d'abord l'état final $|f\rangle$ du champ. Comme on observe seulement l'état final de l'atome (on collecte

le photoelectron), on ne mesure pas $|f\rangle$. Il faut donc sommer sur tous les états $|f\rangle$ possibles, ce qui donne.

$$\sum_f \langle i | E^{(-)}(r, t'') | f \rangle \langle f | E^{(+)}(r, t') | i \rangle = \langle i | E^{(-)}(r, t'') E^{(+)}(r, t') | i \rangle \quad (\text{II-28})$$

Alors que les 2 éléments de matrice de (II-27) peuvent être écrits dans n'importe quel ordre (ce sont des nombres), la sommation sur f fait apparaître l'élément de matrice d'un produit de 2 opérateurs rangés dans un ordre bien défini, l'ordre normal, où les opérateurs d'annihilation sont à droite des opérateurs de créations.

- Reste enfin le problème de l'état initial $|i\rangle$. L'état initial du rayonnement n'est en général pas connu avec certitude. C'est un mélange statistique d'états $|i\rangle$ avec des poids π_i , décrit par l'opérateur densité
$$\rho_R = \sum_i \pi_i |i\rangle \langle i| \quad (\text{II-29})$$

Moyenner sur i revient alors à pondérer (II-28) par π_i et à sommer sur i , ce qui fait apparaître la fonction de corrélation quantique

$$G^{(1)}(r, t'', r, t') = \text{Tr}_R \left(\rho_R E^{(-)}(r, t'') E^{(+)}(r, t') \right) = \langle E^{(-)}(r, t'') E^{(+)}(r, t') \rangle \quad (\text{II-30})$$

- Les sommations sur l'état final de l'électron sont les mêmes qu'en A 2

c) Conclusion

Moyennant la correspondance

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{F. de corrélation classique} \\ G^{(1)}(r, t'', r, t') = \frac{E^{(-)}(r, t'') E^{(+)}(r, t')}{\dots} \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{l} \text{F. de corrélation quantique} \\ G^{(1)}(r, t'', r, t') = \langle E^{(-)}(r, t'') E^{(+)}(r, t') \rangle \end{array}}$$

les résultats des 2 calculs sont la même forme (II-31)

- Donc un PM à bande large a un temps de comptage proportionnel à $\langle E^{(-)}(r, t) E^{(+)}(r, t) \rangle$

- Un PM avec bande étroite (pour la collection du photoelectron) mesure la T.F. de la fonction de corrélation $\langle E^{(-)}(r, t) E^{(+)}(r, t+\tau) \rangle$

B - Corrélation entre 2 photoionisations

① Position du problème

- On considère 2 atomes 1 et 2 situés aux points r_1 et r_2 et exposés à un rayonnement incident. On néglige toute interaction directe ou indirecte entre ces 2 atomes.

- Soit $w_2(r_1, t_1, r_2, t_2) dt_1 dt_2$ la probabilité pour que l'atome 1 soit ionisé entre t_1 et $t_1 + dt_1$ et l'atome 2 entre t_2 et $t_2 + dt_2$.

Peut-on relier $w_2(r_1, t_1, r_2, t_2)$ aux fonctions de corrélation du champ ?

La mesure de w_2 fournit elle des informations intéressantes, comparées à celle des taux de comptage à un temps $w_1(r, t)$ étudié au § A précédent (informations nouvelles ou plus faciles à obtenir ...)?

② Principales étapes du calcul

Nous nous contenterons de souligner les différences par rapport aux calculs du § A précédent. On considèrera d'emblée le cas quantique en indiquant chaque fois le résultat semi-classique correspondant

Hamiltonien

$$H = H_{A1} + H_{A2} + H_R + \underbrace{V_1}_{-e\alpha_1 E(r_1)} + \underbrace{V_2}_{-e\alpha_2 E(r_2)} \quad (\text{II-32})$$

Amplitude

On cherche l'amplitude $\langle a_1, a_2 f | \tilde{U}(0, t) | g_1, g_2 i \rangle$
 (Entre 0 et t chaque atome est ionisé et le champ passe de i à f).

Comme il y a nécessairement 2 interactions avec le champ, il faut prendre le terme d'ordre 2 dans $\tilde{U}(0, t)$ (voir II-4) :

$$- \langle a_1, a_2 f | \int_{t'}^t dt'' \int_0^{t'} dt' \tilde{V}(t'') \tilde{V}(t') | g_1, g_2 i \rangle \quad (\text{II-33})$$

On ne s'intéresse pas aux processus où le champ interagit 2 fois avec le même atome. Comme $\tilde{V} = \tilde{V}_1 + \tilde{V}_2$, on peut dans (II-33) remplacer $\tilde{V}(t'') \tilde{V}(t')$ par $\tilde{V}_2(t'') \tilde{V}_1(t') + \tilde{V}_1(t'') \tilde{V}_2(t')$, ce qui donne pour (II-33) :

$$- e^2 \int_{t'}^t dt'' \int_0^{t'} dt' (x_1)_{a_1 g_1} (x_2)_{a_2 g_2} e^{i\omega_{a_1 g_1} t''} e^{i\omega_{a_2 g_2} t''} \langle f | E^{(+)}(r_2, t'') E^{(+)}(r_1, t') | i \rangle + \text{Termes analogues } 1 \rightleftharpoons 2 \quad (\text{II-34})$$

On a négligé les termes en $E^{(-)}$ qui donnent une contribution anti-résonnante négligeable.

Comme $E^{(+)}$ ne contient que des a^\dagger qui commutent entre eux, les deux $E^{(+)}$ du dernier terme commutent entre eux. En les changeant d'ordre dans la 1^{ère} ligne de (II-34) et en intervertissant t' et t'' dans cette 1^{ère} ligne, on peut regrouper ensuite les 2 lignes en s'affranchissant de toute restriction sur les bornes d'intégration, ce qui donne pour (II-34)

$$- e^2 \int_0^t dt'' \int_0^t dt' (x_1)_{a_1 g_1} (x_2)_{a_2 g_2} e^{i\omega_{a_1 g_1} t''} e^{i\omega_{a_2 g_2} t''} \langle f | E^{(+)}(r_2, t'') E^{(+)}(r_1, t') | i \rangle \quad (\text{II-35})$$

Dans le calcul semi-classique, le dernier terme est remplacé par $E^{(+)}(r_2, t'') E^{(+)}(r_1, t')$

Probabilité

$$P_{i, g_1 g_2} \rightarrow f_{a_1 a_2}(t) = e^4 \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \int_0^t dt''' \int_0^t dt'''' | (x_1)_{a_1 g_1} |^2 | (x_2)_{a_2 g_2} |^2 e^{i\omega_{a_1 g_1} (t' - t''''')} e^{i\omega_{a_2 g_2} (t'' - t''''')} \langle i | E^{(-)}(r_1, t''''') E^{(-)}(r_2, t''''') | f \rangle \langle f | E^{(+)}(r_2, t'') E^{(+)}(r_1, t') | i \rangle \quad (\text{II-36})$$

- Sommation sur les états jumeaux du champ que l'on n'observe pas et moyenne sur les états initiaux. Le dernier terme de (II-36) devient (grâce à la relation de fermeture sur f) la fonction de corrélation d'ordre 2

$$G^{(2)}(r_1 t''', r_2 t''', r_2 t'', r_1 t') = \langle E^{(-)}(r_1 t''') E^{(-)}(r_2 t''') E^{(+)}(r_2 t'') E^{(+)}(r_1 t') \rangle \quad (\text{II-37})$$

On notera là encore l'ordre normal des opérateurs (opérateurs d'annihilation à droite des opérateurs de création)

Le calcul semi-classique ferait apparaître

$$G^{(2)}(r_1 t''', r_2 t''', r_2 t'', r_1 t') = \overline{E^{(-)}(r_1 t''') E^{(-)}(r_2 t''') E^{(+)}(r_2 t'') E^{(+)}(r_1 t')} \quad (\text{II-38})$$

- Sommation sur a_1 et a_2 (états jumeaux des atomes)

Comme plus haut, $\sum_{a_1} R_{a_1} \rightarrow S \delta(t' - t''')$
 $\sum_{a_2} R_{a_2} \rightarrow S \delta(t'' - t''')$

de sorte que la probabilité d'avoir les 2 atomes ionisés à la fin de l'intervalle $(0-t)$ est égale à

$$S^2 \int_0^t dt' \int_0^t dt'' G^{(2)}(r_1 t', r_2 t'', r_2 t'', r_1 t') \quad (\text{II-39})$$

- Imaginons finalement qu'un obturateur masque le champ pour l'atome 1 à partir de t_1 et pour un autre pour l'atome 2 à partir de t_2 (avec t_1 et t_2 inférieurs à t). Le calcul précédent demeure valable à condition de remplacer V_1 et V_2 par $V_1 \theta(t_1 - t)$ et $V_2 \theta(t_2 - t)$ où θ est la fonction d'Heaviside.

Pour obtenir la probabilité d'avoir l'atome 1 ionisé entre 0 et t_1 et l'atome 2 ionisé entre 0 et t_2 , il suffit alors de remplacer (II-39) par

$$S^2 \int_0^{t_1} dt' \int_0^{t_2} dt'' G^{(2)}(r_1 t', r_2 t'', r_2 t'', r_1 t') \quad (\text{II-40})$$

Finalement, en dérivant (II-40) par rapport à t_1 et t_2 , on obtient pour le taux $w_2(r_1 t_1, r_2 t_2)$ défini plus haut

$$\boxed{w_2(r_1 t_1, r_2 t_2) = S^2 G^{(2)}(r_1 t_1, r_2 t_2, r_2 t_2, r_1 t_1) = S^2 \langle E^{(-)}(r_1 t_1) E^{(-)}(r_2 t_2) E^{(+)}(r_2 t_2) E^{(+)}(r_1 t_1) \rangle} \quad (\text{II-41})$$

pour un champ quantique et

$$\boxed{w_2(r_1 t_1, r_2 t_2) = S^2 \overline{G^{(2)}(r_1 t_1, r_2 t_2, r_2 t_2, r_1 t_1)} = S^2 \overline{E^{(-)}(r_1 t_1) E^{(-)}(r_2 t_2) E^{(+)}(r_2 t_2) E^{(+)}(r_1 t_1)} = \overline{I(r_2 t_2) I(r_1 t_1)}} \quad (\text{II-42})$$

pour un champ classique

Les $E^{(+)}$ et les $E^{(-)}$, qui sont des nombres, peuvent être écrits dans n'importe quel ordre, ce qui permet de faire apparaître la fonction de corrélation de l'intervalle dans (II-42). Les $E^{(+)}$ et $E^{(-)}$ sont par contre des opérateurs qui ne commutent pas et l'ordre normal ne peut être changé dans (II-41)

Généralisation aisée à l'étude des corrélations entre N atomes.

C. Analogies et différences entre fonctions de corrélation classiques et quantiques

① Fonctions de corrélation classiques et distribution de probabilité $P(\{\alpha\})$

- Soit $\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots\}$ une réalisation possible des coefficients du développement (II-9) du champ sur les modes $1, 2, \dots, k, \dots$, et soit $P(\{\alpha\})$ la probabilité d'une telle réalisation. Plus précisément $P(\alpha_1, \alpha_2, \dots) d^2\alpha_1 d^2\alpha_2 \dots = P(\{\alpha\}) d^2\{\alpha\}$ est la probabilité d'avoir le coefficient du mode 1 entre α_1 et $\alpha_1 + d\alpha_1, \dots$

$$P(\{\alpha\}) \text{ réel, } \geq 0 \quad \int d^2\{\alpha\} P(\{\alpha\}) = 1 \quad \text{(II-43)}$$

- Nous noterons $E(r, t, \{\alpha\})$ le champ en r, t correspondant à la réalisation $\{\alpha\}$. $E(r, t, \{\alpha\})$ est donné par (II-9)

Pour calculer la valeur moyenne du produit d'un certain nombre de $E^{(+)}$ et $E^{(-)}$, on prend le produit de ces grandeurs évaluées pour la réalisation $\{\alpha\}$, on pondère par $P(\{\alpha\})$, et on intègre sur $\{\alpha\}$. Ainsi

$$G^{(1)}(r_2, t_2, r_1, t_1) = \int d^2\{\alpha\} E^{(-)}(r_2, t_2, \{\alpha\}) E^{(+)}(r_1, t_1, \{\alpha\}) P(\{\alpha\}) \quad \text{(II-44)}$$

$$G^{(2)}(r_1, t_1, r_2, t_2, r_2, t_2, r_1, t_1) = \int d^2\{\alpha\} E^{(-)}(r_1, t_1, \{\alpha\}) E^{(-)}(r_2, t_2, \{\alpha\}) E^{(+)}(r_2, t_2, \{\alpha\}) E^{(+)}(r_1, t_1, \{\alpha\}) P(\{\alpha\})$$

② Représentation $P(\{\alpha\})$ de l'opérateur densité du champ quantique

- Soit $|\alpha_k\rangle$ un état propre de a_k de valeur propre α_k (états cohérents du mode k)

$$a_k |\alpha_k\rangle = \alpha_k |\alpha_k\rangle \quad \langle \alpha_k | a_k^\dagger = \alpha_k^* \langle \alpha_k | \quad \text{(II-45)}$$

- Supposons que l'état du champ soit un produit d'états cohérents de chaque mode

$$|\{\alpha\}\rangle = |\alpha_1\rangle |\alpha_2\rangle \dots |\alpha_k\rangle \dots \quad \text{(II-46)}$$

On déduit alors de (II-25), (II-45) et (II-10) que

$$E^{(+)}(r, t) |\{\alpha\}\rangle = E^{(+)}(r, t, \{\alpha\}) |\{\alpha\}\rangle \quad \text{(II-47)}$$

L'état $|\{\alpha\}\rangle$ est état propre de $E^{(+)}(r, t)$ avec pour valeur propre la valeur en r, t du champ classique $E^{(+)}$ associé à $\{\alpha\}$. En utilisant (II-47) et l'équation adjointe, on en déduit que la valeur moyenne dans l'état $|\{\alpha\}\rangle$ d'un produit normal de $E^{(-)}$ et $E^{(+)}$ n'est autre que le produit des champs classiques correspondants associés à $\{\alpha\}$. Ainsi, par exemple

$$\langle \{\alpha\} | E^{(-)}(r_2, t_2) E^{(+)}(r_1, t_1) | \{\alpha\} \rangle = E^{(-)}(r_2, t_2, \{\alpha\}) E^{(+)}(r_1, t_1, \{\alpha\}) \quad \text{(II-48)}$$

- Dans un grand nombre de cas, l'opérateur densité ρ du champ peut être écrit comme une somme de projecteurs $|\{\alpha\}\rangle \langle \{\alpha\}|$:

$$\rho = \int d^2\{\alpha\} P(\{\alpha\}) |\{\alpha\}\rangle \langle \{\alpha\}| \quad \text{(II-49)}$$

Le fait que $\rho = \rho^\dagger$ et que $\text{Tr} \rho = 1$ entraîne

$$P(\{\alpha\}) \text{ réel} \quad \int d^2\alpha P(\{\alpha\}) = 1 \quad \text{(II-50)}$$

Il faut noter cependant que $P(\{\alpha\})$ n'est pas nécessairement positif. $P(\{\alpha\})$ peut prendre des valeurs < 0 , ce qui montre que $P(\{\alpha\})$ est une densité de quasi-probabilité et non de probabilité.

Si $P(\{\alpha\})$ était une vraie densité de probabilité, cela voudrait dire que l'on peut mesurer simultanément la phase et l'amplitude d'un champ quantique (voir cours 1974-75 chapitre IV)

Enfin, pour certains états du champ quantique $P(\{\alpha\})$ n'existe pas (ou est trop singulière pour être utilisable).

③ Expression des fonctions de corrélation quantiques en fonction de $P(\{\alpha\})$ (quand $P(\{\alpha\})$ existe)

- Si $P(\{\alpha\})$ existe, on peut écrire, compte tenu de (II-49) et (II-48)

$$G^{(1)}(r_2, t_2, r_1, t_1) = \text{Tr}(\rho E^{(-)}(r_2, t_2) E^{(+)}(r_1, t_1)) = \int d^2\alpha E^{(-)}(r_2, t_2, \{\alpha\}) E^{(+)}(r_1, t_1, \{\alpha\}) P(\{\alpha\}) \quad (\text{II-51})$$

$$G^{(2)}(r_1, t_1, r_2, t_2, r_2, t_2, r_1, t_1) = \text{Tr}(\rho E^{(-)}(r_1, t_1) E^{(-)}(r_2, t_2) E^{(+)}(r_2, t_2) E^{(+)}(r_1, t_1)) \\ = \int d^2\alpha E^{(-)}(r_1, t_1, \{\alpha\}) E^{(-)}(r_2, t_2, \{\alpha\}) E^{(+)}(r_2, t_2, \{\alpha\}) E^{(+)}(r_1, t_1, \{\alpha\}) P(\{\alpha\})$$

- L'analogie entre les expressions (II-44) et (II-51) est frappante. Elle permet d'aboutir aux conclusions suivantes

(i) Si la représentation $P(\{\alpha\})$ existe, que $P(\{\alpha\})$ est positive et suffisamment régulière, les fonctions de corrélation quantiques peuvent être simulées par des fonctions de corrélation classiques. Il n'existe alors pas de différence entre les prédictions des 2 théories.

(ii) Si $P(\{\alpha\})$ est nettement différente d'une vraie densité de probabilité, par exemple si $P(\{\alpha\})$ prend des valeurs négatives, les 2 théories peuvent conduire à des prédictions nettement différentes.

Par exemple, c'est le caractère positif d'une vraie densité de probabilité qui entraîne que la moyenne du carré d'une grandeur est supérieure ou égale au carré de la moyenne. Une telle propriété n'est plus forcément vraie pour des "moyennes" calculées avec une densité de vraisemblance qui prend des valeurs négatives. Nous interpréterons plus loin de cette manière le fait que des champs quantiques puissent donner naissance à des "dégroupements" de photoélectrons contrairement aux champs classiques qui conduisent toujours à des "groupements".