Cours du 11/3/80

Plan

① On ne peut oublier le caractère opératoriel du champ du vide
(T1 à T5)

② Les relations de commutation atomiques ne se conservent que si le champ du vide est traité quantiquement
(T6 à T8)

③ Séparation des effets du champ du vide et du champ des sources
(T9 à T15)

④ Comparaison avec l'approche équation pilote
(T16 à T19)

⑤ Fonctions de corrélation et équations de Heisenberg.
(T20 à T26)

T1

Tentation possible après les calculs du cours précédent

① Ne tenir compte que du champ des sources, exprimé en fonction des opérateurs atomiques

② Remplacer le champ libre $E_0^{(\pm)}$
- par 0 dans le cas où il n'y a aucun rayonnement incident
- par un champ classique si un tel rayonnement existe

↳ Théorie purement atomique ne quantifiant pas le champ

Objet du présent cours

Montrer en quoi une telle attitude est erronée

T2

Equations de Heisenberg pour l'atome à 2 niveaux · Ordre antinormal

Calculs pour S_+

$$\frac{d}{dt} S_+(t) = i\omega_0 S_+(t) + \frac{2id}{\hbar}\left[E_z^{(+)}(\vec{0},t)\, S_z(t) + S_z(t)\, E_z^{(-)}(\vec{0},t)\right]$$

On remplace $E_z^{(\pm)}(\vec{0},t)$ par les expressions données plus haut

$$\frac{d}{dt} S_+(t) = i\omega_0 S_+(t)$$
$$+ \frac{2id}{\hbar}\left[E_{0z}^{(+)}(\vec{0},t)\, S_z(t) + S_z(t)\, E_{0z}^{(-)}(\vec{0},t)\right]$$
$$+ \frac{2id}{\hbar}\left(\frac{i\hbar}{d}\right)\left[\left(\frac{\gamma}{2}+i\delta\right)\underbrace{S_-(t)S_z(t)}_{\cancel{\frac{1}{2}S_-(t)}} + i\bar{\delta}\,\underbrace{S_+(t)\,S_z(t)}_{-\frac{1}{2}S_+(t)}\right]$$
$$+ \frac{2id}{\hbar}\left(\frac{-i\hbar}{d}\right)\left[\left(\frac{\gamma}{2}-i\delta\right)\underbrace{S_z(t)S_+(t)}_{\frac{1}{2}S_+(t)} - i\bar{\delta}\,\underbrace{S_z(t)\,S_-(t)}_{\cancel{-\frac{1}{2}S_-(t)}}\right]$$

T3

En regroupant tout (avec $\delta\omega_0 = \delta - \bar{\delta}$)

$$\frac{d}{dt} S_+(t) = i(\omega_0 - \delta\omega_0) S_+ + \frac{\gamma}{2} S_+ + \frac{2id}{\hbar}\left[E_{0z}^{(+)}(\vec{0},t)\, S_z(t) + S_z(t)\, E_{0z}^{(-)}(\vec{0},t)\right]$$

Pas de rayonnement incident

Si l'on cède à la tentation précédente, on remplace $E_{0z}^{(\pm)}(\vec{0},t)$ par 0, ce qui donne pour les valeurs moyennes

$$\frac{d}{dt}\langle S_+(t)\rangle_R = i(\omega_0 - \delta\omega_0)\langle S_+(t)\rangle_R + \frac{\gamma}{2}\langle S_+(t)\rangle_R$$

Résultat absurde

1 - Le dipole moyen diverge spontanément au lieu de s'amortir

2 - Le déplacement trouvé a le mauvais signe

T4

Manière correcte de faire le calcul

Avant de prendre la moyenne, faire passer $E_{0z}^{(+)}$ à droite de S_z et $E_{0z}^{(-)}$ à gauche de S_z en utilisant les commutateurs $[E_{0z}^{(\pm)}(\vec{0},t), S_z(t)]$. On obtient ainsi

$$\frac{d}{dt}\langle S_+(t)\rangle_R = \left[i(\omega_0 - \delta\omega_0) + \frac{\gamma}{2}\right]\langle S_+(t)\rangle_R + \frac{2id}{\hbar}\left\{\left\langle\left[E_{0z}^{(+)}(\vec{0},t), S_z(t)\right]\right\rangle_R + \left\langle\left[S_z(t), E_{0z}^{(-)}(\vec{0},t)\right]\right\rangle_R\right\}$$

On trouve alors que la contribution de la 2ème ligne est égale à

$$2i\,\delta\omega_0\,\langle S_+(t)\rangle_R - \gamma\,\langle S_+(t)\rangle_R$$

et rétablit le bon résultat

$$\frac{d}{dt}\langle S_+(t)\rangle_R = \left[i(\omega_0 + \delta\omega_0) - \frac{\gamma}{2}\right]\langle S_+(t)\rangle_R$$

T5

Conclusion

On ne peut éventuellement "oublier" l'aspect opératoriel de $E_0^{(\pm)}$ qu'à la fin du calcul, après avoir rétabli l'ordre normal.

Or, pour arriver à cet ordre normal, que rien n'impose a priori au début, il faut utiliser les commutateurs de $E_0^{(\pm)}$ avec les autres opérateurs qui l'empêchent d'être en position normale, donc faire appel explicitement au caractère opératoriel de $E_0^{(\pm)}$

Il ne serait donc pas très cohérent de prétendre que E_0 est un champ classique après l'avoir traité comme un opérateur.

T6

Autre objection plus grave

Les relations de commutation atomique ne se conservent au cours du temps que si le champ du vide obéit de son coté aux relations de commutation quantique

Cohérence interne de la théorie (Bohr - Rosenfeld)

Quand 2 systèmes interagissent mutuellement, traiter l'un quantiquement et l'autre classiquement conduit à des incohérences.

T7

Vérification de ce point sur l'oscillateur harmonique

$$\frac{d}{dt} b(t) = -\left[i\tilde{\omega}_0 + \frac{\gamma}{2}\right] b(t) + \frac{id}{\hbar} E_{0z}(\vec{0},t)$$

avec $\tilde{\omega}_0 = \omega_0 + \delta\omega_0$

$$b(t) = b(t_0)\, e^{-\left[i\tilde{\omega}_0 + \frac{\gamma}{2}\right](t-t_0)}$$
$$+ \int_{t_0}^{t} dt'\, e^{-\left[i\tilde{\omega}_0 + \frac{\gamma}{2}\right](t-t')} \frac{id}{\hbar} E_{0z}(\vec{0},t')$$

Pas de rayonnement incident

Si l'on posait $E_{0z} = 0$, la 2ème ligne serait nulle et l'on aurait

$$[b(t), b^+(t)] = \underbrace{[b(t_0), b^+(t_0)]}_{=1} e^{-\gamma(t-t_0)}$$
$$= e^{-\gamma(t-t_0)}$$

Résultat visiblement absurde

T8

Manière correcte de faire le calcul

$$[b(t), b^+(t)] = e^{-\gamma(t-t_0)}$$
$$+ \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t} dt''\, e^{-(i\tilde{\omega}_0 + \frac{\gamma}{2})(t-t')}\, e^{(i\tilde{\omega}_0 - \frac{\gamma}{2})(t-t'')}$$
$$\frac{d^2}{\hbar^2} [E_{0z}(\vec{0},t'), E_{0z}(\vec{0},t'')]$$

A partir du développement de E_{0z} en modes et des commutateurs $[a_{k\varepsilon}(t_0), a^+_{k'\varepsilon'}(t_0)] = \delta_{kk'}\delta_{\varepsilon\varepsilon'}$, on calcule

$$[E_{0z}(\vec{0},t'), E_{0z}(\vec{0},t'')] = \frac{i\hbar}{3\pi\varepsilon_0 c^3}\, \dddot{\delta}(t'-t'')$$

ce qui permet de montrer ensuite que la double intégrale en t' et t'' vaut $1 - e^{-\gamma(t-t_0)}$, et donne finalement :

$$[b(t), b^+(t)] = 1 = [b(t_0), b^+(t_0)]$$

T9

Séparation des effets du champ du vide et du champ des sources

Récapitulation des résultats précédents

Quel que soit l'ordre adopté dans le terme d'interaction, $-D(t)\, E_z(\vec{0},t)$, entre l'opérateur "atomique" $D(t)$ et l'opérateur "champ total" $E_z(\vec{0},t)$ qui commutent, le résultat final du calcul est le même pour les valeurs moyennes $\langle S_z(t)\rangle_R$, $\langle S_z(t)\rangle_R$

Par contre, quand on pose

$$E(\vec{0},t) = E_0(\vec{0},t) + E_S(\vec{0},t)$$

la contribution du terme en E_0 (et par suite, celle du terme en E_S) dépendent de l'ordre, leur somme restant la même.

T10

Conclusion généralement tirée

La séparation entre effets des fluctuations du vide et effets de la réaction de rayonnement est ambiguë. Ces 2 phénomènes sont indissociables

" The 2 interpretations are merely 2 sides of the same quantum mechanical coin with each ... being an oversimplification motivated by the ordering scheme adopted " (Senitzky)

Notre point de vue

Une séparation claire et non ambiguë des 2 effets existe.

Les différents ordres possibles sont bien équivalents mathématiquement, mais seul, l'ordre symétrique a un sens physique clair.

T-11

Justification de ce point de vue

$G_A(t)$: observable atomique ayant un sens physique, donc hermitique
$$G_A(t) = G_A^+(t)$$

La vitesse de variation $\frac{d}{dt} G_A(t)$ est aussi hermitique

$\left(\frac{d}{dt} G_A(t)\right)_{FV}$: Contribution à $\frac{d}{dt} G_A(t)$ des termes en $\vec{E}_0$

$\left(\frac{d}{dt} G_A(t)\right)_{RR}$: Contribution à $\frac{d}{dt} G_A(t)$ des termes en $\vec{E}_S$

1 - On impose aux vitesses de variation $\left(\frac{d}{dt} G_A(t)\right)_{FV}$ et $\left(\frac{d}{dt} G_A(t)\right)_{RR}$ d'avoir chacune un sens physique, donc d'être séparément hermitiques

2 - Les opérateurs de champ apparaissant dans $\left(\frac{d}{dt} G_A(t)\right)_{FV}$ doivent aussi avoir un sens physique, donc être hermitiques

T-12

Ecriture la plus générale de $V = -DE$

$$V = -\lambda D E^{(+)} - \mu E^{(+)} D - \nu D E^{(-)} - \xi E^{(-)} D$$
$$\lambda + \mu + \nu + \xi = 1$$

$$\frac{d}{dt} G_A = \frac{1}{i\hbar}[G_A, H_A] + \frac{1}{i\hbar}[G_A, V]$$

Posons $\quad F_A = \frac{1}{i\hbar}[G_A, D]$

$$\left.\begin{array}{l} G_A = G_A^+ \\ D = D^+ \end{array}\right\} \longrightarrow F_A = F_A^+$$

F_A est une observable atomique hermitique

Dans V, on remplace E par $E_0 + E_S$

$\left(\frac{d}{dt} G_A\right)_{FV}$ est la partie de $\frac{1}{i\hbar}[G_A, V]$ où $E_0^{(+)}$ et $E_0^{(-)}$ interviennent.

T-13

$$\left(\frac{d}{dt} G_A\right)_{FV} =$$
$$-\lambda F_A E_0^{(+)} - \mu E_0^{(+)} F_A - \nu F_A E_0^{(-)} - \xi E_0^{(-)} F_A$$

Condition 1 $\quad$ Hermiticité de $\left(\frac{dG_A}{dt}\right)_{FV}$
$$\lambda = \xi \qquad \mu = \nu$$
$$\hookrightarrow \left(\frac{d}{dt} G_A\right)_{FV} = -F_A\left(\lambda E_0^{(+)} + \nu E_0^{(-)}\right) + h.c.$$

Condition 2 $\quad$ Hermiticité des opérateurs de champ apparaissant dans $\left(\frac{d}{dt} G_A\right)_{FF}$

$\hookrightarrow$ $\lambda E_0^{(+)} + \nu E_0^{(-)}$ doit être hermitique
$$\lambda = \nu$$

Conclusion
$$\lambda = \mu = \nu = \xi = \frac{1}{4}$$

Ordre complètement symétrique

T-14

Résultats du calcul

(Ordre complètement symétrique)

Pour $\langle S_+\rangle_R$

$$\left(\left\langle \frac{dS_+}{dt}\right\rangle_R\right)_{FV} = -\frac{\gamma}{2}\langle S_+\rangle_R + i\,\delta\omega_0 \langle S_+\rangle_R$$
$$\left(\left\langle \frac{dS_+}{dt}\right\rangle_R\right)_{RR} = 0$$

Le déplacement et l'élargissement radiatifs de la transition atomique sont entièrement dûs aux fluctuations du vide

Pour $\langle P_e\rangle_R$ et $\langle P_g\rangle_R$

$$\left(\frac{d}{dt}\langle P_e\rangle_R\right)_{FV} = -\frac{\gamma}{2}\langle P_e\rangle_R + \frac{\gamma}{2}\langle P_g\rangle_R$$
$$\left(\frac{d}{dt}\langle P_g\rangle_R\right)_{FV} = -\frac{\gamma}{2}\langle P_g\rangle_R + \frac{\gamma}{2}\langle P_e\rangle_R$$
$$\left(\frac{d}{dt}\langle P_e\rangle_R\right)_{RR} = -\frac{\gamma}{2}\langle P_e\rangle_R - \frac{\gamma}{2}\langle P_g\rangle_R = -\frac{\gamma}{2}$$
$$\left(\frac{d}{dt}\langle P_g\rangle_R\right)_{RR} = +\frac{\gamma}{2}\langle P_e\rangle_R + \frac{\gamma}{2}\langle P_g\rangle_R = +\frac{\gamma}{2}$$

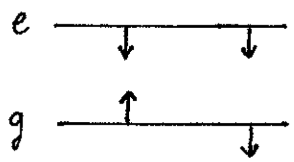
T-15

Interprétation physique

Effet des fluctuations du vide

Equivalent à celui d'une perturbation fluctuante.

Induit des transitions dans les 2 sens avec un taux $\gamma/2$



Effet de la réaction de rayonnement

Double le taux de départ de e
Annule le taux de départ de g

Compensation pour g de l'effet des fluctuations du dipole et de l'effet des fluctuations du champ (Fain)

T-16

Confirmation de ce point de vue par une autre méthode

Equation pilote de la matrice densité atomique

Le rayonnement n'intervient dans cette équation que par l'intermédiaire de

$$\xi(\tau) = \langle 0 | E_0(\vec{0},t)\, E_0(\vec{0},t+\tau) | 0 \rangle$$

Moyenne à 2 temps relative au champ du vide au point $\vec{0}$ où se trouve l'atome

$\xi(\tau)$ n'est pas réel. Ce sont ses parties réelle et imaginaire qui ont un sens physique

$$\xi(\tau) = \kappa(\tau) + i\, \chi(\tau)$$

T-17

Signification de $\kappa(\tau)$

$$\kappa(\tau) = \frac{1}{2} \langle 0 | \left\{ E_0(\vec{0},t)\, E_0(\vec{0},t+\tau) + E_0(\vec{0},t+\tau)\, E_0(\vec{0},t) \right\} | 0 \rangle$$

Fonction de corrélation symétrique caractérisant les fluctuations du champ du vide

Signification de $\chi(\tau)$

$$\chi(\tau) = \frac{1}{2i} \langle 0 | \left[E_0(\vec{0},t),\, E_0(\vec{0},t+\tau) \right] | 0 \rangle$$

Susceptibilité du "réservoir" constitué par le rayonnement.

Caractérise la manière dont le rayonnement "répond" à une perturbation atomique (dipole placé en O)

Théorie de la réponse linéaire

T-18

Résultats de la comparaison

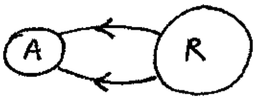
1. Les termes de l'équation pilote faisant intervenir $\kappa(\tau)$ coïncident avec les termes associés à $\left(\frac{dG_A}{dt}\right)_{FV}$ obtenus à partir des équations de Heisenberg
2. Les termes de l'équation pilote faisant intervenir $\chi(\tau)$ coïncident avec les termes associés à $\left(\frac{dG_A}{dt}\right)_{RR}$

Résultat général qui demeure valable même si l'état initial du champ n'est pas le vide, mais contient des photons.

T-19

Interprétation physique

① Termes en $\kappa(\tau)$



Les fluctuations de R (fluctuations du vide) polarisent l'atome et interagissent avec le dipole qu'elles ont induit.

② Termes en $\chi(\tau)$

Les fluctuations de A polarisent R

A interagit avec son image dans R (A interagit avec le champs dont il est la source).

T-20

Fonctions de corrélation et équations de Heisenberg

$$\langle S_+(t) S_-(t') \rangle_R = \langle \psi_R(t_0) | S_+(t) S_-(t') | \psi_R(t_0) \rangle$$

Rappel

$$\frac{d}{dt} S_+(t) = \left[i(\omega_0 + \delta\omega_0) - \frac{\gamma}{2} \right] S_+(t) + \frac{2id}{\hbar} \left[S_z(t) E^{(+)}_{0z}(\vec{0},t) + E^{(-)}_{0z}(\vec{0},t) S_z(t) \right]$$

Multiplication à droite par $S_-(t')$

$$\frac{d}{dt} S_+(t) S_-(t') = \left[i(\omega_0 + \delta\omega_0) - \frac{\gamma}{2} \right] S_+(t) S_-(t') + \frac{2id}{\hbar} \left[S_z(t) E^{(+)}_{0z}(\vec{0},t) S_-(t') + E^{(-)}_{0z}(\vec{0},t) S_z(t) S_-(t') \right]$$

Pour faire passer $E^{(+)}_{0z}(\vec{0},t)$ à droite, et rétablir l'ordre normal, il faut connaître $[E^{(+)}_{0z}(\vec{0},t), S_-(t')]$

Commutateur du champ libre en $\vec{0}$ à l'instant t avec une observable atomique G_A à un autre instant t'

T-21

Résultats du calcul de $[E^{(+)}_{0i}(\vec{0},t), G_A(t')]$

On repart de

$$a_{k\varepsilon}(t') = a_{k\varepsilon}(t_0) e^{-i\omega(t'-t_0)} + \frac{\mathcal{N}_k}{\hbar} \int_{t_0}^{t'} dt'' \, \varepsilon_j \, D_j(t'') \, e^{-i\omega(t'-t'')}$$

A l'instant initial

$$[a_{k\varepsilon}(t_0), G_A(t_0)] = 0$$

Donc, par évolution hamiltonienne

$$[a_{k\varepsilon}(t'), G_A(t')] = 0$$

On en déduit

$$[a_{k\varepsilon}(t_0), G_A(t')] = -\frac{\mathcal{N}_k}{\hbar} \int_{t_0}^{t'} dt'' \, \varepsilon_j \left[D_j(t''), G_A(t') \right] e^{-i\omega(t_0-t'')}$$

T-22

Comme

$$E^{(+)}_{0i}(\vec{0},t) = i \sum_{k\varepsilon} \mathcal{N}_k \, \varepsilon_i \, a_{k\varepsilon}(t_0) \, e^{-i\omega(t-t_0)}$$

et qu'on connait $[a_{k\varepsilon}(t_0), G_A(t')]$

on en déduit $[E^{(+)}_{0i}(\vec{0},t), G_A(t')]$

On trouve

$$[E^{(+)}_{0i}(\vec{0},t), G_A(t')] = -\int_{t-t'}^{t-t_0} d\tau \left[D_j(t-\tau), G_A(t') \right] F^{(+)}_{ij}(\tau)$$

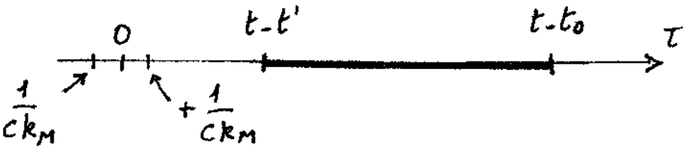
$$F^{(+)}_{ij}(\tau) = \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{i}{\hbar} \sum_{\substack{\vec{k} \\ k<k_M}} \mathcal{N}_k^2 \, e^{-i\omega\tau}$$

Fonction étroite, centrée en $\tau = 0$, de largeur $1/ck_M$

T-23

Résultat simple quand $t-t' \gg \frac{1}{ck_M}$

L'intervalle d'intégration $[t-t', t-t_0]$ sur τ ne contient pas la région $\left[-\frac{1}{ck_M}, +\frac{1}{ck_M}\right]$ où $F_{ij}^{(+)}(\tau)$ est non nulle



Donc, si $t-t' \gg \frac{1}{ck_M}$, $E_{0i}^{(+)}(\vec{0},t)$ commute avec $G_A(t')$

- Voir page (VII-8) le calcul du commutateur quand $t-t' \ll -\frac{1}{ck_M}$
- Enfin, on a déjà calculé le commutateur $[E_{0i}^{(+)}(\vec{0},t), G_A(t)]$ quand $t'=t$

T-24

Retour à l'équation $\frac{d}{dt} S_+(t) S_-(t')$

Si $t>t'$ $(t-t' \gg 1/ck_M)$, $E_{0z}^{(+)}(\vec{0},t)$ commute avec $S_-(t')$ et peut être mis à droite.

Réobtention de l'ordre normal

Conséquence

Moyenne dans le vide

Pour $t>t'$

$$\frac{d}{dt}\langle S_+(t) S_-(t')\rangle_R = \left[i(\omega_0+\delta\omega_0)-\frac{\gamma}{2}\right]\langle S_+(t) S_-(t')\rangle_R$$

à comparer avec

$$\frac{d}{dt}\langle S_+(t)\rangle_R = \left[i(\omega_0+\delta\omega_0)-\frac{\gamma}{2}\right]\langle S_+(t)\rangle_R$$

T-25

Moyenne dans un état cohérent

Il faut rajouter à la 1ère équation

$$\frac{2id}{\hbar}\langle S_z(t) S_-(t')\rangle_R\ \mathcal{E}_{0z}(\vec{0},t)$$

et à la 2ème équation

$$\frac{2id}{\hbar}\langle S_z(t)\rangle_R\ \mathcal{E}_{0z}(\vec{0},t)$$

Conclusion

Nouvelle démonstration très simple du "théorème de régression quantique"

Les moyennes à 2 temps t, t' obéissent vis à vis du temps le plus grand aux mêmes équations d'évolution que les moyennes à un temps.

T-26

Récapitulation : Bilan de l'approche équations de Heisenberg pour les atomes à 2 niveaux.

1 - Etablissement des "équations de Bloch optiques" décrivant l'amortissement et de déplacement radiatifs

2 - Justification du fait qu'on peut traiter classiquement un rayonnement libre incident s'il est dans un état cohérent.

3 - Démonstration du théorème de régression quantique qui permet de calculer les fonctions de corrélation à partir des équations de Bloch optiques.