

A. Résumé du cours 1978-79

① Ideés physiques

Le cours de l'année antérieure avait porté sur l'étude des fonctions de corrélation d'un système quantique à partir des équations de Langevin-Mori. Ces équations, établies de manière générale grâce à la technique des opérateurs de projection introduite par Zwanzig, décrivent comment les observables intéressantes du système évoluent sous l'effet d'une force de friction retardée, qui est responsable de l'amortissement du système, et d'une force de Langevin fluctuante, qui introduit des fluctuations dans le comportement de ce système. Une telle approche avait été ensuite appliquée à l'étude des fonctions de corrélation et fonctions de mémoire d'un système en équilibre thermodynamique.

En *optique* quantique, les systèmes étudiés sont, le plus souvent, hors d'équilibre. Par exemple, dans un oscillateur atomique, comme un maser ou un laser, un mécanisme de pompage approprié permet de réaliser des inversions de population entre deux niveaux d'énergie, ce qui peut entraîner, dans certaines conditions, des auto-oscillations entretenues, c'est-à-dire la transformation, en régime permanent, de l'énergie de pompage incohérente en un rayonnement cohérent ayant des propriétés tout à fait remarquables. Il a donc semblé intéressant de prolonger le cours de l'année antérieure en étudiant, au moyen des équations de Langevin-Mori, les fonctions de corrélation d'un système hors d'équilibre de manière, par exemple, à pouvoir comprendre le fonctionnement d'un laser et les propriétés statistiques du rayonnement qu'il émet.

1) On commence par montrer que, dans le cas très général d'un « petit » système S, hors d'équilibre et couplé à un « grand » réservoir R, on peut associer à toute réduction de l'équation de Schrödinger en équation pilote pour S, une réduction des équations de Heisenberg en équations de Langevin-Mori, les opérateurs de projection utilisés dans les deux réductions étant adjoints l'un de l'autre. Il est possible alors d'utiliser les résultats obtenus antérieurement lors de l'étude de l'équation pilote de S pour trouver le projecteur P qu'il faut appliquer aux équations de Heisenberg pour les trans-

former en équations de Langevin-Mori. L'action de P sur une observable quelconque revient à prendre la « moyenne sur le réservoir » de cette observable. On établit ainsi, de manière très générale, la structure des équations de Langevin-Mori des observables de S. On montre que la moyenne sur le réservoir des forces de Langevin est nulle et que l'évolution des moyennes à un temps déduite de ces équations coïncide avec celle donnée par l'équation pilote.

On aborde ensuite, dans le cadre d'un traitement perturbatif des interactions entre S et R, l'étude des fonctions de corrélation $\langle F_\alpha(t) F_\beta(t') \rangle_R$ des forces de Langevin F_α et F_β agissant sur deux observables A_α et A_β de S. On montre qu'il existe deux échelles de temps bien distinctes dans le problème, le temps de corrélation τ_c qui caractérise les fluctuations des observables de R couplées à S et qui est très court, le temps de relaxation T_R qui décrit l'amortissement des observables de S et son retour à l'équilibre, et qui est beaucoup plus long. L'expression de $\langle F_\alpha(t) F_\beta(t') \rangle_R$ révèle que les fonctions de corrélation des forces de Langevin dépendent à la fois de $t-t'$ et de t . Elles s'écrivent :

$$\langle F_\alpha(t) F_\beta(t') \rangle_R = 2 D_{\alpha\beta}(t) f_{\alpha\beta}(t-t')$$

où $f_{\alpha\beta}(t-t')$ a pour temps caractéristique τ_c et où $D_{\alpha\beta}(t)$ est un coefficient de diffusion (en fait, un opérateur de S) ayant pour temps caractéristique T_R . On retrouve donc bien que les forces de Langevin fluctuent très rapidement (temps τ_c). Mais elles ne sont plus stationnaires pour un système hors d'équilibre puisque les coefficients de diffusion $D_{\alpha\beta}$ dépendent de l'écart à l'équilibre et varient donc lors du retour du système à l'équilibre (temps T_R).

2) Le résultat précédent concernant la structure de $\langle F_\alpha(t) F_\beta(t') \rangle_R$ est en fait valable dans des situations plus générales que celles relevant d'un traitement perturbatif des interactions entre S et R, pourvu toutefois qu'il existe deux échelles de temps bien distinctes τ_c et T_R . On peut, par exemple, considérer l'effet de collisions fortes subies par les atomes actifs d'un milieu laser contre des perturbateurs, le temps τ_c d'une collision étant beaucoup plus court que le temps T_R entre deux collisions subies par le même atome.

Il paraît donc important d'établir l'expression des fonctions de corrélation $\langle F_\alpha(t) F_\beta(t') \rangle_R$ directement à partir des équations de Langevin-Mori, sans passer par des développements perturbatifs.

On commence par montrer que, si $\Delta A_\alpha(t)$ et $\Delta A_\beta(t)$ désignent les accroissements de A_α et A_β au cours d'un intervalle de temps Δt long devant τ_c mais court devant T_R , on a $\langle \Delta A_\alpha(t) \Delta A_\beta(t) \rangle_R = 2 D_{\alpha\beta}(t) \Delta t$ ce qui permet bien d'interpréter physiquement $D_{\alpha\beta}(t)$ comme un coefficient de diffusion. En calculant de deux manières différentes $\langle \Delta A_\alpha(t) \Delta A_\beta(t) \rangle_R$, on obtient des

2-1

équations reliant $D_{\alpha\beta}(t)$ aux taux de relaxation des observables de S et aux valeurs moyennes de ces observables, équations appelées « relations d'Einstein généralisées » et qui traduisent pour un système hors d'équilibre le lien étroit existant entre fluctuations et dissipation. On montre également que les fonctions de corrélation $\langle A_\alpha(t) A_\beta(t') \rangle_R$ des observables de S, convenablement « lissées » sur un intervalle Δt long devant τ_c et court devant T_R , obéissent, pour $t \geq t'$, aux mêmes équations d'évolution (vis-à-vis de t) que les moyennes à un temps $\langle A_\alpha(t) \rangle$. Il s'agit là du « théorème de régression quantique » qui permet de calculer simplement la dynamique des fluctuations de S.

Tous ces résultats généraux sont illustrés sur de nombreux exemples concrets. Les coefficients de diffusion $D_{\alpha\beta}$ sont calculés explicitement pour un système à deux niveaux « fermé » (spin 1/2 obéissant à des équations de Bloch ou émission spontanée sur la raie de résonance optique) pour un système à deux niveaux « ouvert » (alimenté par des processus de pompage et soumis à une relaxation), pour un mode propre d'une cavité électromagnétique avec des pertes dans la paroi. On présente également un modèle d'oscillateur harmonique amorti, entièrement soluble, à propos duquel le problème des moments d'ordre supérieur à deux des forces de Langevin est abordé ainsi que celui de leur caractère gaussien éventuel.

3) Dans la troisième partie du cours, le formalisme précédent est appliqué à l'étude des fluctuations dans les masers et les lasers.

Dans le modèle choisi, le système S est formé par un mode propre d'une cavité électromagnétique dans laquelle se trouvent des atomes actifs, le réservoir R est l'ensemble des autres systèmes responsables du pompage, de l'amortissement et des fluctuations de S : processus de pompage et de relaxation pour les atomes actifs, pertes dans les parois et rayonnement du corps noir pour le mode propre de la cavité. Les équations de Langevin-Mori des observables de S sont écrites, compte tenu du couplage atomes actifs-mode de la cavité et les divers coefficients de diffusion calculés en fonction des taux de relaxation et de pompage introduits dans le modèle de manière phénoménologique.

Une discussion qualitative des équations ainsi obtenues (traitant les diverses observables comme des nombres et non comme des opérateurs) permet tout d'abord de dégager les paramètres physiques importants (taux d'émission spontanée des atomes actifs dans le mode, inversion critique au delà de laquelle les gains sont supérieurs aux pertes), les approximations intéressantes (élimination adiabatique des variables atomiques qui varient beaucoup plus vite que celles du mode de la cavité au voisinage de l'inversion critique et qui suivent donc instantanément les variations lentes du champ laser,

en lui étant en quelque sorte « asservies »). L'allure générale des phénomènes lorsqu'on traverse l'inversion critique est discutée : ralentissement critique quand on s'approche du seuil, puis apparition d'un champ dans la cavité quand on dépasse le seuil, avec stabilisation de l'amplitude et diffusion de la phase. L'analogie avec une transition de phase du deuxième ordre est soulignée.

On reprend ensuite le problème de manière plus quantitative et on établit, après élimination adiabatique des variables atomiques, l'équation de Langevin à laquelle obéissent les opérateurs a et a^+ du mode laser. On étudie à partir de cette équation trois grandeurs physiques intéressantes : le nombre moyen de photons en régime stationnaire, qui est proportionnel à la puissance de sortie du laser ; la fonction de corrélation du champ électromagnétique, dont la transformée de Fourier donne la répartition spectrale du rayonnement émis ; la fonction de corrélation de l'intensité. Deux approximations différentes sont utilisées : l'approximation linéaire au-dessous du seuil, qui revient à négliger les effets de saturation atomique, ce qui est tout à fait justifié compte tenu de la faible intensité lumineuse ; l'approximation quasi-linéaire au-dessus du seuil, qui revient à linéariser les équations au voisinage du point de fonctionnement. Au voisinage immédiat du seuil, aucune des deux approximations précédentes n'est justifiée, compte tenu de l'importance des fluctuations. Il faut alors passer par l'intermédiaire de l'équation de Fokker-Planck à laquelle satisfait la distribution de quasi-probabilité $P(\alpha)$ du mode laser, établir cette équation à partir de l'équation de Langevin et la résoudre. Il est possible, ainsi, d'obtenir la courbe complète donnant en fonction de l'inversion atomique, la puissance de sortie du laser, de déterminer l'influence des divers processus physiques (émission spontanée, rayonnement du corps noir) sur la largeur spectrale du rayonnement émis, de comprendre le ralentissement puis l'accélération des fluctuations d'intensité.

Le cours se termine enfin par une revue des expériences (dont certaines, très récentes, viennent seulement d'être publiées) qui ont permis de tester les modèles théoriques précédents : mesure de l'intensité laser en fonction de l'inversion atomique, étude de la structure fine des fonctions de corrélation du champ laser et de l'intensité mettant en évidence, au voisinage du seuil, l'existence de plusieurs modes de relaxation avec des constantes de temps et des poids en accord avec les prédictions de l'équation de Fokker-Planck, évolution de la statistique du rayonnement quand on traverse le seuil. La transition laser est certainement l'une des transitions du deuxième ordre qui ont été étudiées le plus en détail, tant sur le plan théorique qu'expérimental.

② Rappel de quelques formules

- "Petit" système S et "grand" réservoir R

$\{A_\alpha\}$: ensemble orthonormé complet d'opérateurs de S
(par exemple, pour un système à 2 niveaux a, b :
 $|a\rangle\langle a|$, $|b\rangle\langle b|$, $|a\rangle\langle b|$, $|b\rangle\langle a|$)

ω_α : fréquence d'évolution libre de A_α (en l'absence de couplage S-R)

A $t=0$, opérateur densité factorisé

$$\sigma(0) = \sigma_R(0) \sigma_S(0) \quad (\text{I-1})$$

- Equations de Langevin - Mori des A_α

$$\dot{A}_\alpha(t) = \underbrace{i\omega_\alpha A_\alpha(t)}_{\text{Evolution libre}} - \underbrace{\int_0^t d\tau \sum_\beta \gamma_{\beta\alpha}(\tau) A_\beta(\tau)}_{\text{Friction retardée}} + \underbrace{F_\alpha(t)}_{\text{Force de Langevin}} \quad (\text{I-2})$$

$$\langle F_\alpha(t) \rangle_R = \text{Tr}_R(\sigma_R(0) F_\alpha(t)) = 0 \quad (\text{I-3})$$

Résultats exacts (sans approximations)

- Hypothèse supplémentaire (existence de 2 échelles de temps)

Hypothèse supposée réalisée à partir de maintenant

τ_c : temps de corrélation des observables de R couplés à S

T_R : temps de relaxation des observables de S ($T_R^{-1} \sim \Gamma \sim \int_0^\infty \gamma(\tau) d\tau$)

$$\boxed{T_R \gg \tau_c} \quad (\text{I-4})$$

- Moyenne "à gros grains" ("coarse-grained average")

On s'intéresse au comportement de S sur une échelle de temps Δt longue devant τ_c mais courte devant T_R

$$\tau_c \ll \Delta t \ll T_R \quad (\text{I-5})$$

Accroissement de A_α

$$\Delta A_\alpha(t) = A_\alpha(t + \Delta t) - A_\alpha(t) \quad (\text{I-6})$$

Vitesse de variation "lissée"

$$\frac{\Delta A_\alpha(t)}{\Delta t} = \frac{A_\alpha(t + \Delta t) - A_\alpha(t)}{\Delta t} \quad (\text{I-7})$$

- Equation d'évolution "lissée" des A_α

$$\boxed{\frac{\Delta A_\alpha}{\Delta t} = i\omega_\alpha A_\alpha(t) - \sum_\beta \Gamma_{\beta\alpha} A_\beta(t) + F_\alpha(t)} \quad (\text{I-8})$$

$$\Gamma_{\beta\alpha} = \int_0^\infty \gamma_{\beta\alpha}(\tau) d\tau \quad \langle F_\alpha(t) \rangle_R = 0 \quad (\text{I-9})$$

l'équation intégrodifférentielle (I-2) devient une équation différentielle

Fonctions de corrélation des forces de Langevin $F_\alpha(t)$

I-4

$$\langle F_\alpha(t) F_\beta(t') \rangle_R = 2 D_{\alpha\beta}(t) g(t-t') \quad (I-10)$$

$D_{\alpha\beta}(t)$: opérateur de S variant à l'échelle de T_R

$g(t-t')$: "Fonction $\delta(t-t')$ " de largeur Δt

(fonction paire de $t-t'$, de largeur Δt , d'intégrale égale à 1)

Interprétation physique de $D_{\alpha\beta}(t)$

$$\langle \Delta A_\alpha(t) \Delta A_\beta(t) \rangle_R = 2 D_{\alpha\beta}(t) \Delta t \quad (I-11)$$

$D_{\alpha\beta}$ apparaît comme un coefficient de diffusion

Caractère quantique : $D_{\alpha\beta} \neq D_{\beta\alpha}$

Relations d'Einstein généralisées

Regroupons les 2 premiers termes des 2^{ème} membres de I-8 en appelant V_α leur somme

$$\frac{\Delta A_\alpha}{\Delta t} = V_\alpha(t) + F_\alpha(t) \quad (I-12)$$

et soit $A_{\alpha\beta}$ l'opérateur produit de A_α par A_β

$$A_{\alpha\beta}(t) = A_\alpha(t) A_\beta(t) \quad (I-13)$$

qui obéit à une équation analogue à (I-12)

$$\frac{\Delta A_{\alpha\beta}}{\Delta t} = V_{\alpha\beta}(t) + F_{\alpha\beta}(t) \quad (I-14)$$

Alors

$$2 D_{\alpha\beta}(t) = \langle V_{\alpha\beta}(t) \rangle_R - \langle A_\alpha(t) V_\beta(t) \rangle_R - \langle V_\alpha(t) A_\beta(t) \rangle_R \quad (I-15)$$

Théorème de régression quantique

γ étant fixé et α variant, considérons l'ensemble des fonctions de corrélation $\langle A_\alpha(t) A_\gamma(t') \rangle_R$

leur vitesse de variation (linéaire) par rapport à t obéit, pour $t \geq t'$, aux mêmes équations d'évolution complètes que les moyennes à un temps $\langle A_\alpha(t) \rangle_R$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \langle A_\alpha(t) A_\gamma(t') \rangle_R}{\Delta t} &= \frac{\langle A_\alpha(t+\Delta t) A_\gamma(t') \rangle_R - \langle A_\alpha(t) A_\gamma(t') \rangle_R}{\Delta t} \\ &= i\omega_\alpha \langle A_\alpha(t) A_\gamma(t') \rangle_R - \sum_\beta \Gamma_{\beta\alpha} \langle A_\beta(t) A_\gamma(t') \rangle_R \end{aligned}$$

Equation analogue à

(I-16)

$$\frac{\Delta \langle A_\alpha(t) \rangle_R}{\Delta t} = i\omega_\alpha \langle A_\alpha(t) \rangle_R - \sum_\beta \Gamma_{\beta\alpha} \langle A_\beta(t) \rangle_R \quad (I-17)$$

① Ideé générale

- Dans les processus de détection et d'émission de rayonnement par des atomes, essayer de dégager les aspects qui nécessitent réellement une quantification du rayonnement.

- Au cours des dernières années, plusieurs physiciens ont essayé de construire des théories semi-classiques des interactions matière-rayonnement où la matière est traitée quantiquement et le rayonnement classiquement.

Succès de ces approches pour expliquer un nombre important de phénomènes : effet photoélectrique, effet Hanbury-Brown et Twiss, théorie semi-clasque du laser, optique non-linéaire...

Objet de ce cours : essayer, en analysant des tests expérimentaux récents, de répondre à la question suivante : pourrait-on se passer du concept de photon, au moins dans le domaine optique ?

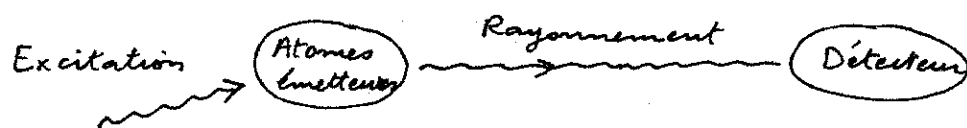
② Schéma général d'une expérience portant sur le rayonnement

Fig. 1

③ Problèmes posés par la détection

a) Que peut-on mesurer avec un photodétecteur ?

- Plusieurs types de signaux peuvent être mesurés avec un PM.

Courant photoélectrique moyen $\langle I(t) \rangle$

Courant photoélectrique moyen après avoir mis devant le PM un filtre sélectif en fréquence (Fabry-Perot...), ce qui donne accès à la répartition spectrale $S(\omega)$ du rayonnement

Corrélations d'intensité $\langle I(t) I(t') \rangle$

- A la limite des faibles flux lumineux et avec une électronique rapide, la sortie du PM apparaît sous forme d'un train d'impulsions (Fig. 2). Chaque impulsion vient d'un photoélectron éjecté de la cathode et multiplié dans la chaîne de dynodes.

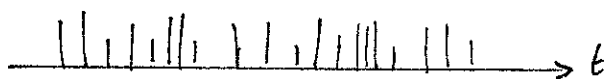


Fig. 2

On peut alors compter le nombre d'impulsions dans un intervalle T fixé et déterminer la probabilité $P(m, T)$ de compter m impulsions.

On peut mesurer les corrélations entre nombres m_1 et m_2 d'impulsions comptés dans 2 intervalles différents T_1, T_2 .

On peut mesurer la distribution des intervalles τ entre 2 impulsions successives, etc...

- Ces techniques de comptage deviennent de plus en plus utilisées pour les raisons suivantes.

Propriétés dans l'électronique rapide.

Propriétés dans le traitement de l'information contenue dans le train d'impulsions.

Possibilité de mesurer par ces techniques des temps de corrélation longs (la largeur spectrale correspondante serait trop faible pour être accessible à une mesure de largeur de raie).

Pour plus de détails sur ces problèmes voir

" Photon correlations and light beating Spectroscopy "

edited by H.Z. Cummins and E.R. Pike Plenum Press 1973

b) Comment remonter des signaux mesurés aux propriétés du rayonnement ?

C'est surtout ce problème que nous étudierons.

Le but poursuivi est de relier les signaux de détection expérimentaux à des fonctions de corrélation, de complexité croissante, du rayonnement tombant sur le PM.

Le calcul sera fait, d'abord avec des rayonnements classiques, puis des rayonnements quantiques.

Se pose alors le problème suivant.

c) Existe-t-il des effets spécifiques d'un rayonnement quantique ?

Plus précisément, peut-on réaliser des expériences où les signaux de détection observés sont impossibles à comprendre si le rayonnement incident est traité classiquement ?

Des tests expérimentaux très récents seront décrits qui permettent de répondre positivement à une telle question.

Pourquoi a-t-il fallu attendre si longtemps pour faire de telles expériences ? Expériences difficiles car les effets quantiques se manifestent clairement quand le rayonnement étudié provient d'un très petit nombre d'atomes. Nécessité d'avoir des détecteurs très sensibles ou une excitation optique très efficace des atomes émetteurs (excitation laser).

Avec les tests expérimentaux mentionnés plus haut, le débat semblerait à première vue clos et la nécessité d'un traitement quantique démontrée. En fait, la situation est plus complexe.

d) Arguments des partisans des théories semi-classiques.

Tout rayonnement provient d'une source.

Les effets quantiques révélés par les expériences mentionnées plus haut ne font que refléter la nature quantique des atomes émetteurs.

Le champ rayonné par un dipôle atomique est proportionnel à ce dipôle. C'est donc un opérateur, mais un opérateur atomique.

En termes plus mathématiques, on peut espérer formuler une théorie n'utilisant que l'espace de Hilbert de l'atome,

évitant ainsi de quantifier le champ et d'introduire l'espace de Fock correspondant, avec toutes les difficultés conceptuelles liées aux fluctuations du vide.

Le débat se trouve ainsi reporté sur le mécanisme du processus d'émission.

④ Problèmes posés par l'émission

Le problème fondamental est le suivant : peut-on comprendre l'émission de rayonnement par un atome sans faire appel à la quantification du champ électromagnétique.

a) Arguments des partisans des théories semi-classique.

- 2 mécanismes distincts sont souvent évoqués pour décrire l'émission spontanée de rayonnement par un atome :

- (i) l'interaction de l'électron avec son propre champ (réaction de rayonnement)
- (ii) l'interaction de l'électron avec les fluctuations du vide (l'émission spontanée apparaît comme une émission "induite par les fluctuations du vide").

- Les équations de Heisenberg couplées de l'atome et du rayonnement peuvent être transformées de plusieurs manières différentes, équivalentes algébriquement. Avec l'une de ces manières, l'émission semble due uniquement à la réaction de rayonnement.

On peut donc ignorer les fluctuations du vide et adopter un point de vue unique sur tout champ à une source.

b) Réponse à ces arguments

- Nous essaierons de montrer que la séparation entre effets des fluctuations du vide et effets de la réaction de rayonnement n'est pas ambiguë.

Ces 2 effets interviennent simultanément.

Les formes mathématiques mentionnées plus haut sont bien équivalentes algébriquement mais elles n'ont pas toutes un contenu physique clair.

- L'équation du mouvement des observables atomiques couplées au rayonnement quantique est analogue à une équation de Langevin - Mori.

Ignorer les fluctuations du vide revient à ignorer la force de Langevin correspondante.

Nous analyserons les conséquences d'une telle attitude :

- (i) Non-conservation des relations de commutation atomiques.
- (ii) Prédiction différente pour les fonctions de corrélation atomiques. Contradiction avec l'expérience.