

aux équations de Langevin quantiques du laser

But de ce §

Montrer comment on peut déduire de l'équation de Langevin réduite du mode laser obtenue au chapitre précédent (§ C) une équation de Fokker-Planck.

La résolution de cette équation permet de préciser ce qui se passe au voisinage immédiat du seuil et de raccorder les uns avec autres les divers résultats fournis par les approximations (linéaire, parabolique, quasi-linéaire) introduites au chapitre précédent.

A - Rappels sur les densités de quasi-probabilité associées à un oscillateur harmonique.

La fonction $P(\alpha, \alpha^*, t)$ dont l'équation de Fokker-Planck décrit l'évolution ne peut être une vraie densité de probabilité car a et a^+ ne commutent pas entre eux (il est impossible de mesurer simultanément la phase et l'amplitude du champ). C'est une densité de quasi-probabilité dont nous rappelons ci-dessous les propriétés essentielles.

① Etats cohérents $\{|\alpha\rangle\}$ de l'oscillateur harmonique

Nous nous contentons ici de donner les formules essentielles pour la suite (voir références à la fin du cours)

- Définition

$$\begin{aligned} a|\alpha\rangle &= \alpha|\alpha\rangle \\ \langle\alpha|a^+ &= \alpha^*\langle\alpha| \end{aligned} \quad (IX-1)$$

- Développement sur les états $\{|n\rangle\}$

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}\alpha^*\alpha} e^{\alpha a^+} |0\rangle \end{aligned} \quad (IX-2)$$

Loi de Poisson pour la probabilité de trouver n photons dans l'état $|\alpha\rangle$

- Produit scalaire et relation de fermeture

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2} \quad \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = 1 \quad (IX-3)$$

② Densité de quasi-probabilité $P(\alpha)$ adaptée aux produits normaux d'opérateurs

a) Définition

L'opérateur densité ρ admet une représentation $P(\alpha)$ [plus précisément $P(\alpha, \alpha^*)$], s'il est possible de le mettre sous la forme d'une superposition linéaire des projecteurs $|\alpha\rangle\langle\alpha|$

$$\rho = \int d^2\alpha P(\alpha) |\alpha\rangle\langle\alpha| \quad (IX-4)$$

(b) Propriétés de $P(\alpha)$

(i) $\rho = \rho^+ \implies P(\alpha)$ réel (IX-5)

(ii) $\text{Tr} \rho = 1 \implies \int d^2\alpha P(\alpha) \text{Tr}(|\alpha\rangle\langle\alpha|) = \int d^2\alpha P(\alpha) \langle\alpha|\alpha\rangle = 1$
 $\int d^2\alpha P(\alpha) = 1$ (1X-6)

(iii) Valeur moyenne d'un produit normal $(a^\dagger)^l a^m$
 $\langle (a^\dagger)^l a^m \rangle = \text{Tr} \rho a^{\dagger l} a^m = \int d^2\alpha P(\alpha) \text{Tr}(a^{\dagger l} a^m |\alpha\rangle\langle\alpha|)$
 $= \int d^2\alpha P(\alpha) \langle\alpha| a^{\dagger l} a^m |\alpha\rangle = \int d^2\alpha \alpha^{*l} \alpha^m P(\alpha)$
 $\langle (a^\dagger)^l a^m \rangle = \int d^2\alpha P(\alpha) \alpha^{*l} \alpha^m$ (1X-7)

(c) Pourquoi $P(\alpha)$ est-elle appelée une densité de quasi-probabilité ?

Les expressions (1X-5, 6, 7) font que $P(\alpha)$ ressemble beaucoup à une densité de probabilité de α et α^* . En fait, il est possible de trouver des états du champ pour lesquels $P(\alpha)$ prend des valeurs négatives dans le plan complexe de α , ce qui montre que $P(\alpha)$ n'est pas une vraie densité de probabilité. Enfin, les opérateurs antinormaux $a^m a^{\dagger l}$ ne donnent pas de formule simple comme (1X-7) avec $P(\alpha)$. Il leur correspond une autre densité de quasi-probabilité (voir § 3 suivant).

(d) Exemples de fonctions $P(\alpha)$

(i) Champ dans un état cohérent $|\alpha_0\rangle$ $P(\alpha) = \delta(\alpha - \alpha_0)$ (1X-8)

(ii) Champ à l'équilibre thermodynamique caractérisé par $n_0 = (e^{\hbar\omega/kT} - 1)^{-1}$ $P(\alpha) = \frac{1}{\pi n_0} e^{-\frac{|\alpha|^2}{n_0}}$ (1X-9)

③ Densité de quasi-probabilité $\mathcal{P}(\alpha)$ adaptée aux produits antinormaux

a) Définition $\mathcal{P}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle\alpha|\rho|\alpha\rangle$ (1X-9-bis)

b) Propriétés
 (i) $\rho = \rho^\dagger \implies \mathcal{P}(\alpha)$ réel (1X-10)

(ii) $\text{Tr} \rho = 1 \implies \int d^2\alpha \mathcal{P}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \langle\alpha|\rho|\alpha\rangle = \text{Tr}(\rho \int d^2\alpha \frac{|\alpha\rangle\langle\alpha|}{\pi}) = 1$
 (On a utilisé 1X-3) $\int d^2\alpha \mathcal{P}(\alpha) = 1$ (1X-11)

(iii) Valeur moyenne d'un produit antinormal d'opérateurs $a^m (a^\dagger)^l$
 $\langle a^m a^{\dagger l} \rangle = \text{Tr}(\rho a^m a^{\dagger l}) = \text{Tr}(a^{\dagger l} \rho a^m)$
 $= \text{Tr}(a^{\dagger l} \rho a^m \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|) = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \text{Tr}(a^{\dagger l} \rho a^m |\alpha\rangle\langle\alpha|)$
 $= \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \langle\alpha| a^{\dagger l} \rho a^m |\alpha\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \alpha^{*l} \alpha^m \langle\alpha|\rho|\alpha\rangle$
 $\langle a^m a^{\dagger l} \rangle = \int d^2\alpha \mathcal{P}(\alpha) \alpha^m \alpha^{*l}$ (1X-12)

Suivant le type de produits d'opérateurs auxquels on s'intéresse, on peut donc introduire une densité de quasi-probabilité conduisant à des formules très simples pour les moyennes de ces produits d'opérateurs.

B. Etablissement de l'équation de Fokker-Planck pour $P(\alpha)$

① Principe du calcul

- On considère à l'instant t l'opérateur

$$M^{(n)}(\alpha^+, \alpha) = e^{\lambda \alpha^+} e^{\mu \alpha} \quad (IX-13)$$

où λ et μ sont des nombres complexes et α et α^+ les opérateurs de création ^(et d'annihilation) de l'oscillateur harmonique associé au mode laser (α^+ et α sont des opérateurs de S commutant avec les opérateurs des réservoirs R)

$M^{(n)}(\alpha^+, \alpha)$ est un opérateur, rangé sous forme normale, très général, à partir duquel on peut par exemple exprimer tout produit de puissances de α^+ et α rangé sous forme normale

$$(\alpha^+)^l \alpha^m = \left. \frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} \frac{\partial^m}{\partial \mu^m} M^{(n)}(\alpha^+, \alpha) \right|_{\lambda=\mu=0} \quad (IX-14)$$

- Adoptant tout d'abord le point de vue de Heisenberg, on calcule à partir des équations de Langevin de α et α^+ , l'accroissement de $M^{(n)}(\alpha^+, \alpha)$ entre t et $t+\Delta t$ (avec $T_R \gg \Delta t \gg T_C$). On détermine ainsi la vitesse de variation (linéaire) $\frac{d}{dt} \langle M^{(n)}(\alpha^+, \alpha) \rangle$.

- Adoptant ensuite le point de vue de Schrödinger, et utilisant le fait que la valeur moyenne de l'opérateur normal $M^{(n)}(\alpha^+, \alpha)$ peut s'exprimer en fonction de la densité de probabilité $P(\alpha, t)$, on obtient une 2^{ème} expression pour $\frac{d}{dt} \langle M^{(n)}(\alpha^+, \alpha) \rangle$ faisant intervenir $\frac{\partial}{\partial t} P(\alpha, t)$.

- Identifiant les 2 expressions ainsi obtenues, on en déduit une équation pour $\frac{\partial}{\partial t} P(\alpha, t)$.

② Correspondance entre grandeurs quantiques et classiques

- À l'opérateur quantique $M^{(n)}(\alpha^+, \alpha)$ on peut associer une grandeur classique (représentée par une lettre ronde)

$$M^{(n)}(\alpha^*, \alpha) = e^{\lambda \alpha^*} e^{\mu \alpha} \quad (IX-14)$$

obtenue en remplaçant dans $M^{(n)}(\alpha^+, \alpha)$, α^+ par α^* , α par α .

D'après la propriété IX-7 de $P(\alpha)$ on peut écrire :

$$\langle M^{(n)}(\alpha^+, \alpha) \rangle = \int d^2\alpha P(\alpha) M^{(n)}(\alpha^*, \alpha) \quad (IX-15)$$

- Réciproquement à toute expression classique $G(\alpha^*, \alpha)$, on peut associer un opérateur normal $G^{(n)}(\alpha^+, \alpha)$ obtenu par "l'opération \mathcal{N} " qui consiste, (i) à ranger dans $G(\alpha^*, \alpha)$ les α^* à gauche des α , (ii) à remplacer α^* par α^+ , α par α .

$$G^{(n)}(\alpha^+, \alpha) = \mathcal{N} G(\alpha^*, \alpha) \quad (IX-16)$$

Exemples

$$M^{(n)}(\alpha^+, \alpha) = \mathcal{N} M^{(n)}(\alpha^*, \alpha) \quad (IX-17)$$

$$\lambda e^{\lambda \alpha^+} G^{(n)}(\alpha^+, \alpha) e^{\mu \alpha} = \mathcal{N} (G(\alpha^*, \alpha) \lambda e^{\lambda \alpha^*} e^{\mu \alpha}) = \mathcal{N} \left[G(\alpha^*, \alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha^*} M^{(n)}(\alpha^*, \alpha) \right] \quad (IX-19)$$

$$\lambda \mu e^{\lambda a^+} G^{(n)}(a^+, a) e^{\mu a} = \mathcal{N} [g(\alpha^*, \alpha) \lambda \mu e^{\lambda \alpha^*} e^{\mu \alpha}]$$

$$= \mathcal{N} [g(\alpha^*, \alpha) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} M^{(n)}(\alpha^*, \alpha)] \quad (1X-19)$$

Les 2 derniers exemples montrent comment on peut éliminer les coefficients λ et μ au profit de dérivations de $M^{(n)}(\alpha^*, \alpha)$ par rapport à α^* et α .

③ Utilisation des équations de Langevin.

a) Calcul de $\Delta M^{(n)}$

- Si Δa^+ et Δa sont les accroissements de a^+ et a pendant l'intervalle de temps Δt , on a :

$$\Delta M = e^{\lambda(a^+ + \Delta a^+)} e^{\mu(a + \Delta a)} - e^{\lambda a^+} e^{\mu a} \quad (1X-20)$$

- Considérons tout d'abord le cas où $[a^+, \Delta a^+] = [a, \Delta a] = 0$.

C'est notamment le cas pour le modèle simple d'oscillateur harmonique amorti étudié plus haut [page 4-7]. Δa^+ s'écrit en effet en fonction de a^+ et des forces de Langevin qui ne dépendent que d'opérateurs du réservoir commutant avec a^+ . On a dans ce cas

$$\Delta M = e^{\lambda a^+} [e^{\lambda \Delta a^+} e^{\mu \Delta a} - 1] e^{\mu a}$$

$$= e^{\lambda a^+} [\lambda \Delta a^+ + \mu \Delta a + \frac{\lambda^2}{2} (\Delta a^+)^2 + \frac{\mu^2}{2} (\Delta a)^2 + \lambda \mu \Delta a^+ \Delta a + \dots] e^{\mu a} \quad (1X-21)$$

- Si $[a^+, \Delta a^+]$ et $[a, \Delta a]$ ne sont pas nuls, il faut partir de la formule de Baker-Hausdorff [voir Weiss et Maradudin J. Math. Phys. 3, 771 (1962)] :

$$e^x e^y = e^{\mathfrak{z}} \quad (1X-22)$$

où \mathfrak{z} est une somme de polynômes de degrés croissant en x et y

$$\mathfrak{z} = x + y + \frac{1}{2} [x, y] + \frac{1}{12} [[x, y], y] + \frac{1}{12} [[y, x], x] + \dots \quad (1X-23)$$

En écrivant $e^{-x} e^{x+y} = e^{\mathfrak{z}'}$ puis $e^{-y} e^{\mathfrak{z}'} = e^{\mathfrak{z}''}$, puis en calculant \mathfrak{z}' et \mathfrak{z}'' au moyen de (1X-22) et (1X-23), on démontre aisément que

$$e^{x+y} = e^x e^y e^{-\frac{1}{2} [x, y]} + \text{termes d'ordre 3} \dots \quad (1X-24)$$

de sorte qu'à l'ordre 2 inclus en λ , on a

$$e^{\lambda(a^+ + \Delta a^+)} = e^{\lambda a^+} e^{\lambda \Delta a^+} e^{-\frac{1}{2} \lambda^2 [a^+, \Delta a^+]} + \dots$$

$$= e^{\lambda a^+} [1 + \lambda \Delta a^+ + \frac{\lambda^2}{2} (\Delta a^+)^2 + \dots] [1 - \frac{\lambda^2}{2} [a^+, \Delta a^+] + \dots] \quad (1X-25)$$

et de même, en prenant l'adjoint de (1X-25) et en remplaçant λ par μ

$$e^{\mu(a + \Delta a)} = [1 - \frac{\mu^2}{2} [\Delta a, a] + \dots] [1 + \mu \Delta a + \frac{\mu^2}{2} (\Delta a)^2 + \dots] e^{\mu a} \quad (1X-26)$$

- On en déduit finalement que

$$\Delta M = e^{\lambda a^+} [\lambda \Delta a^+ + \mu \Delta a + \frac{\lambda^2}{2} (\Delta a^+)^2 + \frac{\mu^2}{2} (\Delta a)^2 + \lambda \mu \Delta a^+ \Delta a + \dots$$

$$- \frac{\lambda^2}{2} [a^+, \Delta a^+] - \frac{\mu^2}{2} [\Delta a, a] + \dots] e^{\mu a} \quad (1X-27)$$

Notons que dans la 1^{ère} ligne $\Delta a^+ \Delta a$ apparaît et non $\Delta a \Delta a^+$.

Le fait d'arrêter le développement à l'ordre 2 inclus en λ et μ est, pour la 1^{ère} ligne, justifié par le caractère gaussien des forces, pour la 2^{ème} ligne par la petiteur des termes associés aux commutateurs (voir plus loin)

b) Vitesse de variation de $\langle M^{(n)} \rangle$

- Divisons les 2 membres de (IX-27) par Δt et prenons la moyenne sur les réservoirs. Des termes en Δa^+ et Δa donnent naissance aux vitesses d'entraînement V_{a^+} et V_a apparaissant dans les équations de Langevin

$$\frac{d}{dt} a^+ = V_{a^+} + F_{a^+} \quad \frac{d}{dt} a = V_a + F_a \quad (\text{IX-28})$$

Les termes en $(\Delta a^+)^2$, $(\Delta a)^2$, $(\Delta a^+ \Delta a)$ avec coefficients de diffusion $D_{a^+ a^+}$, $D_{a a}$, $D_{a^+ a}$ (on ne met pas de \wedge sur F_a , F_{a^+} et les coefficients de diffusion pour simplifier les notations). On obtient ainsi l'équation suivante pour la vitesse de variation (linéaire) de $\langle M^{(n)} \rangle_R$

$$\frac{d}{dt} \langle M^{(n)} \rangle_R = \langle e^{\lambda a^+} \left[\lambda V_{a^+} + \mu V_a + \lambda^2 D_{a^+ a^+} + \mu^2 D_{a a} + 2\lambda\mu D_{a^+ a} + \dots - \frac{\lambda^2}{2} [a^+, V_{a^+}] - \frac{\mu^2}{2} [V_a, a] + \dots \right] e^{\mu a} \rangle_R \quad (\text{IX-29})$$

- Si l'on revient à l'expression de V_a tirée de l'équation de Langevin (VII-8) du mode laser, on voit que

$$[V_a, a] = -\frac{w^2}{\Gamma} S_0 [a^+ a a, a] = \frac{w^2}{\Gamma} S_0 a^2 \quad (\text{IX-30})$$

$[V_a, a]$ est donc de l'ordre de $w S_0 \left(\frac{w a^+ a}{\Gamma}\right)$, c-à-d $\frac{w a^+ a}{\Gamma}$ fois plus petit que $D_{a^+ a}$ qui est de l'ordre de $w S_0$. Comme on fait un calcul à l'ordre le plus bas en $w a^+ a / \Gamma$, on peut donc négliger la contribution de $[V_a, a]$, de même que celle de $[a^+, V_{a^+}]$ (Des termes d'ordre de grandeur comparable ont été négligés dans le calcul de $D_{a^+ a}$). Comme, d'après le tableau VII-13, $D_{a^+ a^+}$ et $D_{a a}$ sont nuls, on obtient à l'ordre le plus bas en $w a^+ a / \Gamma$

$$\frac{d}{dt} \langle M^{(n)} \rangle_R = \langle e^{\lambda a^+} \left(\lambda V_{a^+} + \mu V_a + 2\lambda\mu D_{a^+ a} \right) e^{\mu a} \rangle_R \quad (\text{IX-31})$$

Il apparaît clairement sur (IX-29) et (IX-31) que seul $D_{a^+ a}$ apparaît dans la vitesse de variation de $\langle M^{(n)} \rangle_R$ (et non $D_{a^+ a^+}$)

- Enfin, on peut utiliser les équations (IX-18) et (IX-19) pour faire disparaître les coefficients λ et μ apparaissant au 2^{ème} membre de (IX-31). En appelant \mathcal{V}_{α^*} , \mathcal{V}_α , $\mathcal{D}_{\alpha^* \alpha}$ les grandeurs clempques correspondant à V_{a^+} , V_a , $D_{a^+ a}$ (qui sont tous des opérateurs rangés sous forme normale - voir VII-8), on obtient :

$$\frac{d}{dt} \langle \mathcal{N} M^{(n)}(\alpha^*, \alpha) \rangle = \langle \mathcal{N} \left\{ \mathcal{V}_{\alpha^*} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} M^{(n)}(\alpha^*, \alpha) + \mathcal{V}_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} M^{(n)}(\alpha^*, \alpha) + 2 \mathcal{D}_{\alpha^* \alpha} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} M^{(n)}(\alpha^*, \alpha) \right\} \rangle \quad (\text{IX-32})$$

④ Point de vue de Schrödinger.

- Dans le point de vue de Schrödinger, c'est $P(\alpha)$ et non $M^{(n)}(\alpha^*, \alpha)$ qui dépend de t dans (IX-15). On en déduit que

$$\frac{d}{dt} \langle \mathcal{N} M^{(n)}(\alpha^*, \alpha) \rangle = \int d^2 \alpha \frac{\partial P(\alpha, t)}{\partial t} M^{(n)}(\alpha^*, \alpha) \quad (\text{IX-33})$$

- Comme d'autre part l'opérateur figurant au 2^{ème} membre de (IX-32) est sous forme normale, on peut écrire ce 2^{ème} membre sous la forme

$$\int d^2\alpha P(\alpha, t) \left[v_{\alpha^*} \frac{\partial}{\partial \alpha^*} m^{(n)} + v_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} m^{(n)} + 2 \mathcal{D}_{\alpha^* \alpha} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} m^{(n)} \right] \quad (IX-34)$$

c-à-d encore, en effectuant une intégration par parties simple ou double et en utilisant le fait que $P(\alpha, t)$ s'annule pour $|\alpha| \rightarrow \infty$

$$\int d^2\alpha m^{(n)}(\alpha^* \alpha) \left[-\frac{\partial}{\partial \alpha^*} (v_{\alpha^*} P(\alpha, t)) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (v_{\alpha} P(\alpha, t)) + 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} (\mathcal{D}_{\alpha^* \alpha} P(\alpha, t)) \right] \quad (IX-35)$$

- En identifiant (IX-33) et (IX-35) et en utilisant le fait que dans $m^{(n)}(\alpha^* \alpha)$, λ et μ sont conjugués, on obtient finalement l'équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\alpha, \alpha^*, t) = -\frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left[v_{\alpha^*}(\alpha, \alpha^*) P(\alpha, \alpha^*, t) \right] - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[v_{\alpha}(\alpha, \alpha^*) P(\alpha, \alpha^*, t) \right] + 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \left[\mathcal{D}_{\alpha^* \alpha} P(\alpha, \alpha^*, t) \right] \quad (IX-36)$$

⑤ Diverses formes de l'équation de Fokker-Planck

a) Variables b et τ (voir VII-30)

Soient β et β^* les nombres correspondant à b et b^* . En utilisant les valeurs de v_{β^*} , v_{β} , $\mathcal{D}_{\beta^* \beta}$ tirés de (VII-31) et (VII-32) on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \tau} P(\beta, \beta^*, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \beta} [(p - |\beta|^2) \beta P] - \frac{\partial}{\partial \beta^*} [(p - |\beta|^2) \beta^* P] + 4 \frac{\partial^2 P}{\partial \beta \partial \beta^*}} \quad (IX-37)$$

b) Variables x et y

Si l'on pose $\beta = x - iy$ $\beta^* = x + iy$ (IX-38)
on obtient à partir de (IX-37)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P(x, y, \tau) = -\frac{\partial}{\partial x} [(p - x^2 - y^2) x P] - \frac{\partial}{\partial y} [(p - x^2 - y^2) y P] + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \quad (IX-39)$$

c) Variables r et φ

Si l'on pose $\beta = r e^{-i\varphi}$ (IX-40)
on obtient à partir de (IX-37)

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = H_r P + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} \quad (IX-41)$$

avec $H_r P \equiv \frac{\partial}{\partial r} \left[(r^3 - pr - \frac{1}{r}) P \right] + \frac{\partial^2}{\partial r^2} P$ (IX-42)

d) Variables $\rho = r^2$ et φ

Enfin, si l'on pose $\rho = r^2$ (IX-43)
on obtient

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \rho} [(2\rho^2 - 2p\rho - 4) P] + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (4\rho P) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} \quad (IX-44)$$

① Distribution de probabilité du champ en régime stationnaire

a) Calcul de la solution stationnaire de l'équation de Fokker-Planck.

- La solution stationnaire correspond à $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$. Partons par exemple de (IX-39). Il vient

$$0 = - \frac{\partial}{\partial x} [A_x P - \frac{\partial P}{\partial x}] - \frac{\partial}{\partial y} [A_y P - \frac{\partial P}{\partial y}] \quad (IX-45)$$

où l'on a posé

$$A_x = (p - x^2 - y^2)x \quad A_y = (p - x^2 - y^2)y \quad (IX-46)$$

- Or il est facile de voir que A_x et A_y sont les gradients d'une fonction de r

$$A_x = - \frac{\partial}{\partial x} V(r) \quad A_y = - \frac{\partial}{\partial y} V(r) \quad (IX-47)$$

où

$$V(r) = - p \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \quad (IX-48)$$

n'est autre que le potentiel effectif (dans les unités b, τ) introduit dans la partie qualitative B du chapitre précédent (somme d'un potentiel parabolique dont la courbure s'annule au seuil et change de signe, et d'un potentiel de degré 4).

- On voit alors que l'on peut annuler simultanément les 2 crochets de (IX-45) si l'on pose

$$P = e^{-V(r)} \quad (IX-49)$$

De plus, $P(r)$ tend bien vers 0 quand $r \rightarrow \infty$ et peut être normée. On peut toujours écrire $- \frac{p}{2} r^2 + \frac{r^4}{4} = \frac{1}{4} (r^2 - p)^2 - \frac{p^2}{4}$ et faire rentrer $e^{-p^2/4}$ dans le facteur de normalisation.

Finalement, la densité P correspondant à l'état stationnaire est indépendante de φ (symétrie de révolution) et peut s'écrire, avec la condition de normalisation $\int_0^\infty dr r P(r) = 1$

$$P(r) = N^{-1} e^{-\frac{1}{4}(r^2 - p)^2} \quad (IX-50)$$

avec

$$N = \int_0^\infty r dr e^{-\frac{1}{4}(r^2 - p)^2} = \int_{-p/2}^\infty e^{-u^2} du \quad (IX-51)$$

b) Allure de $P(r)$

- Si l'on porte en abscisse r^2 , en ordonnées P , on obtient une gaussienne centrée en p , de largeur totale (à $1/e$) égale à 4 (voir figure 1 - Contour tracé des références données à la fin des cours)

- Si l'on porte par contre $P(r)$ en fonction de r , il faut effectuer une transformation sur l'axe des abscisses de la figure 1. On obtient une variation plus douce au voisinage de $r=0$ (Vergence horizontale) et une décroissance plus brutale après le maximum (voir figure 2 qui donne l'allure générale).

Fig 1

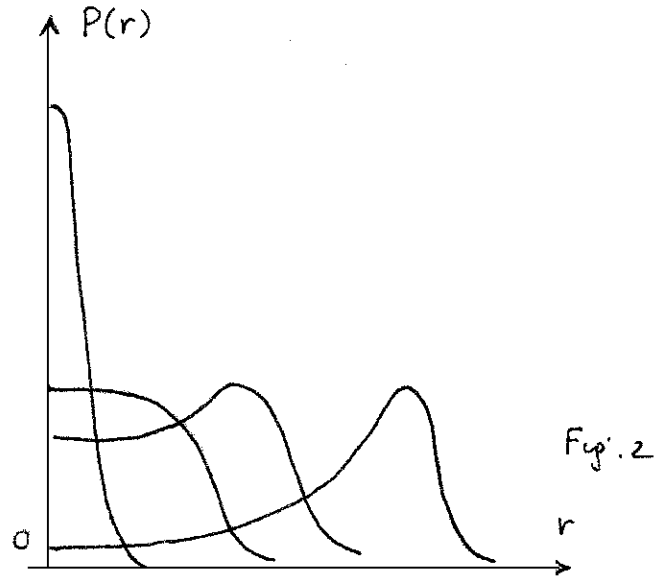
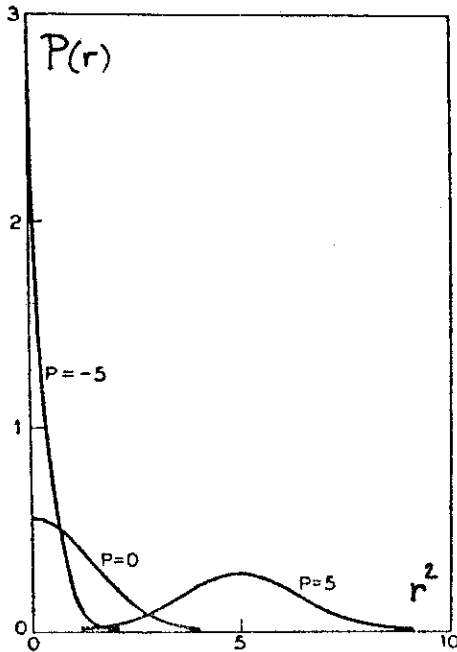


Fig. 2

c) Nombre moyen de photons en régime stationnaire.

Connaissant $P(r)$, on peut calculer

$$\langle b^+ b \rangle = \int_0^{\infty} r^2 P(r) r dr$$

en régime stationnaire, pour chaque valeur du paramètre de pompage. On obtient la courbe en traits pleins de la figure 3 qui raccorde bien les résultats fournis par l'approximation gaussienne et l'approximation quasi-linéaire (voir discussion du § D du chapitre précédent)

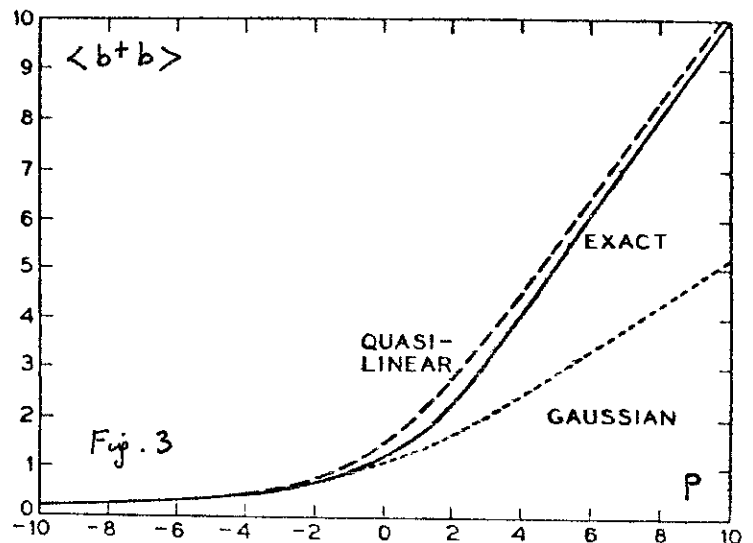


Fig. 3

d) Moments d'ordre supérieur.

Comme $P(r)$ est connue, on peut calculer :

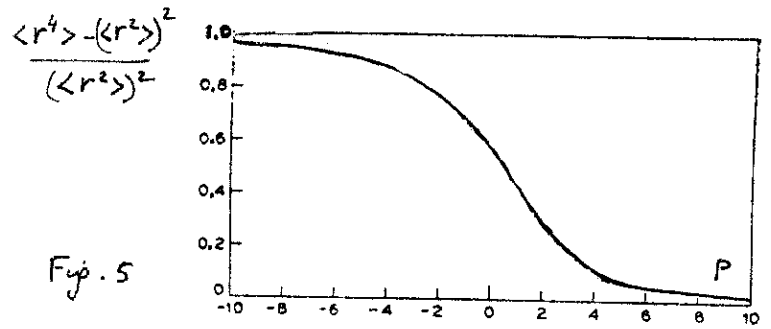
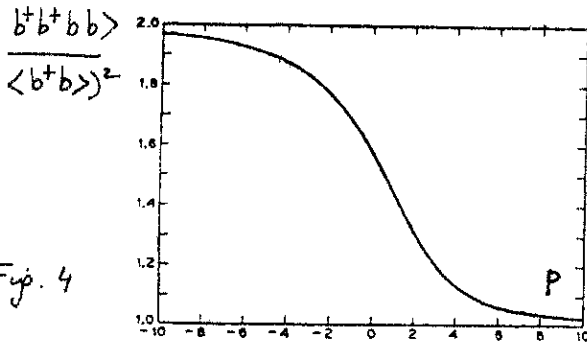
$$\frac{\langle b^+ b^+ b b \rangle}{(\langle b^+ b \rangle)^2} = \frac{\int_0^{\infty} r^4 P(r) r dr}{\left(\int_0^{\infty} r^2 P(r) r dr \right)^2} \quad (IX-52)$$

Le résultat représenté sur la figure 4 montre bien que ce rapport évolue depuis 2 au dessus du seuil, c-à-d pour $p < 0$ (approximation gaussienne) jusqu'à 1 au dessus du seuil (approximation quasi-linéaire)

Si l'on retranche 1 à la courbe précédente, on obtient

$$\frac{\langle r^4 \rangle - \langle r^2 \rangle^2}{\langle r^2 \rangle^2}, \quad \text{c-à-d encore le carré de la variance de } r^2 \text{ rapporté}$$

à $\langle r^2 \rangle^2$ et qui donne une idée de la largeur relative de la distribution de probabilité. On voit bien sur la figure 5 que cette largeur relative tend vers 0 bien au dessus du seuil.



② Spectre de fluctuations du champ laser

a) Principe général des calculs

- Pour étudier les fluctuations aux voisinages du seuil, il faut résoudre l'équation de Fokker-Planck dépendant du temps
- Pour cela, on sépare r, φ, τ dans l'équation (IX-41) en cherchant des solutions de la forme

$$P(r, \varphi, \tau) = e^{-\Gamma_{\lambda n} \tau} e^{i\lambda \varphi} R_{\lambda n}(r) \quad (\text{IX-53})$$

P devant reprendre la même valeur lorsqu'on change φ de 2π , on a

$$\lambda = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (\text{IX-54})$$

En reportant (IX-53) dans (IX-41) on obtient l'équation aux valeurs propres

$$\left(H_r - \frac{\lambda^2}{r^2} \right) R_{\lambda n}(r) = -\Gamma_{\lambda n} R_{\lambda n}(r) \quad (\text{IX-55})$$

que l'on peut résoudre numériquement (H_r est donné en IX-42).

- On peut montrer que l'ensemble des solutions (IX-53) forme un système complet permettant en particulier de calculer la fonction de Green de l'équation de Fokker-Planck $P(r, \varphi, \tau | r_0, \varphi_0, 0)$, c-à-d la probabilité conditionnelle d'avoir r et φ à l'instant τ sachant qu'on est parti de r_0 et φ_0 à $\tau=0$

- Sans entrer dans le détail des calculs, indiquons les valeurs propres $\Gamma_{\lambda n}$ qui jouent un rôle important.

- L'état stationnaire correspond à $\Gamma_{00} = 0$ (P indépendant de τ) et à $\lambda = 0$ (P indépendant de φ)
- La valeur propre non nulle la plus petite Γ_{01} , correspondant à $\lambda = 0$ est associée à un "mode" purement radial. Cette valeur propre joue un rôle important dans le spectre des fluctuations d'intensité [$\Gamma_{02}, \Gamma_{03} \dots$ interviennent aussi mais avec de poids plus petits]
- La valeur propre la plus petite Γ_{10} correspondant à $\lambda = 1$ intervient dans le calcul de $\langle e^{-i\varphi(\tau)} \rangle$. On voit donc qu'elle joue un rôle important dans le calcul de la fonction de corrélation du champ (ou intervient $\langle e^{-i(\varphi(\tau) - \varphi(0))} \rangle$) [$\Gamma_{11}, \Gamma_{12} \dots$ interviennent aussi mais avec de poids plus petits].

b) Résultats obtenus

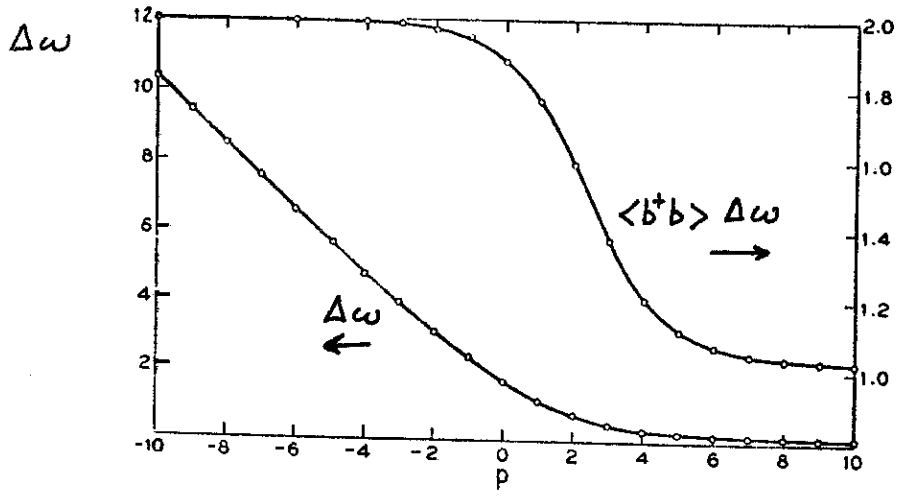


Fig. 6

La courbe de gauche de la figure 6 (échelle verticale de gauche) représente la $1/2$ largeur à mi hauteur de la raie laser $\Delta\omega = \frac{1}{2}$ en fonction du paramètre de pompage p . On retrouve bien en au dessous du seuil $\Delta\omega$ varie comme $-p$ (voir formule VIII-5), alors qu'au dessus du seuil $\Delta\omega$ varie comme $1/p$ (voir formule VIII-49).

La courbe de droite de la figure 6 (échelle verticale de droite) donne les variations avec p de $\langle b^+b \rangle \Delta\omega$. On retrouve bien que $\langle b^+b \rangle \Delta\omega$ passe de manière continue de la valeur 2 au dessous du seuil à la valeur 1 au dessus (voir formule VIII-45).

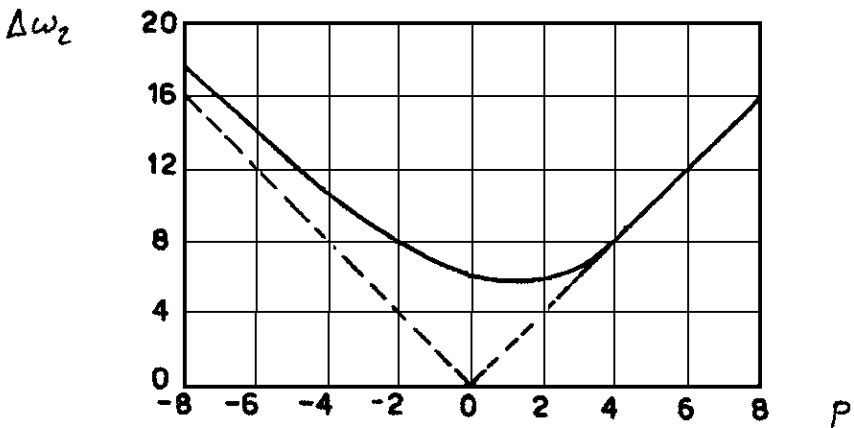


Fig. 7

La figure 7 enfin représente les variations avec le paramètre de pompage p de la $1/2$ largeur à mi hauteur $\Delta\omega_2$ du spectre des fluctuations d'intensité. On retrouve bien une variation en $-2p$ au dessous du seuil (formule VIII-14) et en $+2p$ au dessus du seuil (formule VIII-15).