

Etude simple des fluctuations
dans les masers et les lasers (suite)

E - Largeurs de raie - Fluctuations d'intensité.

But de ce § . Après avoir étudié au § D le nombre de photons du mode laser en régime stationnaire, c-à-d lorsqu'un équilibre dynamique a été atteint sous l'effet combiné des processus de pompage et de relaxation, nous allons, dans ce § étudier les fluctuations de phase, d'amplitude et d'intensité du champ laser, et en déduire l'expression de grandeurs physiques importantes comme la largeur spectrale de la lumière laser.

① Fonctions de corrélation caractérisant les fluctuations.

- Les plus fréquemment utilisées sont les fonctions de corrélation :

$$G_1(\tau) = \langle b^\dagger(\tau) b(0) \rangle \tag{VIII-1}$$

$$G_2(\tau) = \langle b^\dagger(0) b^\dagger(\tau) b(\tau) b(0) \rangle \tag{VIII-2}$$

$G_1(\tau)$ et $G_2(\tau)$ ne dépendent que de τ car on considère un régime stationnaire, en réalité un équilibre dynamique (différent cependant de l'équilibre thermodynamique)

- $G_1(\tau)$ caractérise les fluctuations du champ laser (phase et amplitude).

La T.F. de $G_1(\tau)$ représente la densité spectrale du rayonnement telle qu'elle peut être mesurée par un appareil interférentiel (du type Fabry - Pérot ...). La largeur de cette T.F., c-à-d encore l'inverse du temps d'amortissement de $G_1(\tau)$, représente donc la largeur de raie du laser.

- $G_2(\tau)$ caractérise les fluctuations d'intensité du laser.

On peut montrer que $G_2(\tau)$ est reliée à la probabilité de détecter 2 photons séparés par un intervalle de temps τ (comme dans l'expérience de Hanbury - Brown et Twiss par exemple).

- Il est important de noter que, aussi bien dans (VIII-1) que dans (VIII-2), l'ordre des opérateurs est l'ordre normal : les opérateurs de création sont à gauche des opérateurs d'annihilation. On peut montrer que l'origine d'une telle structure tient au fait que G_1 et G_2 sont reliées à des signaux expérimentaux fournis par des détecteurs de photons qui absorbent et donc détruisent les photons. (Un détecteur utilisant l'émission induite plutôt que l'absorption ferait intervenir des fonctions de corrélation où les opérateurs sont rangés dans l'ordre antinormal).

② Méthode générale de calcul de ces fonctions de corrélation.

a) Au dessous du seuil, on peut linéariser les équations de Langevin réduites du mode laser (donnant db/dt , $d(b^\dagger b)/dt$). Les valeurs moyennes $\langle b(t) \rangle$ et $\langle b^\dagger(t) b(t) \rangle$ ^(de croissent donc) varient des constantes de temps respectivement égales à τ_1 et τ_2 et aisément calculables. Le théorème

de régression quantiques appliquée à (VIII-1) et (VIII-2) indique alors que $G_1(\tau)$ et $G_2(\tau)$ décroissent aussi avec les constantes de temps τ_1 et τ_2 . On peut ainsi calculer les temps caractéristiques d'amortissement des fluctuations de phase, d'amplitude et d'intensité en fonction des divers paramètres, et étudier notamment le "ralentissement critique" quand S_0 se rapproche de S_{cr} .

b) Au dessus du seuil, comme l'amplitude est stabilisée, il faut tout d'abord tirer de l'équation de Langevin donnant $\frac{d}{dt} b(\tau)$ 2 équations décrivant séparément les fluctuations de phase et d'amplitude. Les fluctuations d'amplitude (comme d'ailleurs les fluctuations d'intensité) sont étudiées au moyen de l'approximation quasi-linéaire (linéarisation autour de la position d'équilibre), les fluctuations de phase au moyen d'une équation de diffusion dérivée de l'équation de Langevin de la phase. En combinant ces divers résultats, on peut alors obtenir la largeur de raie au laser au dessus du seuil.

Dans toute cette partie, relative à la situation au dessus du seuil, b et b^+ seront traités comme des nombres β et β^* . Nous n'aborderons donc pas les difficultés liées à l'introduction d'un opérateur phase. En fait, une telle manière de procéder peut être justifiée de la manière suivante. A partir des équations de Langevin quantiques, on peut établir (voir chapitre suivant) une équation de Fokker-Planck décrivant l'évolution au cours du temps de la densité de quasiprobabilité $P(\beta, \beta^*)$, permettant de calculer (au moyen des mêmes formules qu'une vraie densité de probabilité) les valeurs moyennes des produits normaux d'opérateurs b et b^+ (b^+b , b^+b^+bb ...). Cette équation de Fokker-Planck peut elle-même être considérée comme dérivée d'équations de Langevin classiques. Aux équations de Langevin quantiques on peut donc associer des équations de Langevin classiques conduisant à la même équation de Fokker-Planck.

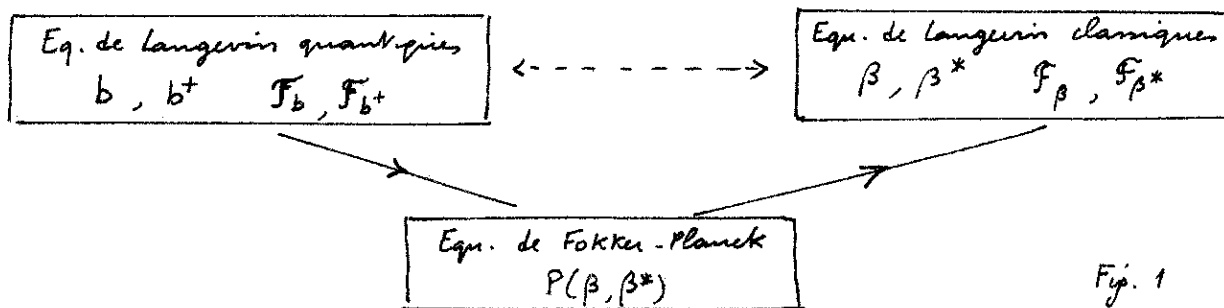


Fig. 1

Le point important est que dans l'équation de Fokker-Planck n'apparaît (à l'ordre le plus bas en ω/Γ et $\omega a/\Gamma$) que le coefficient de diffusion D_{b^+b} (et non D_{bb^+}), ce qui entraîne que les moments des forces classiques F_β et F_{β^*} ne font intervenir que D_{b^+b} .

$$F_\beta(\tau) F_{\beta^*}(\tau') = F_{\beta^*}(\tau) F_\beta(\tau') = 2 D_{b^+b} \delta(\tau - \tau') \quad \text{--- (VIII-3)}$$

On peut donc oublier le caractère quantique de b et b^+ , à condition de ne pas oublier que D_{b^+b} lorsqu'on s'intéresse à des produits normaux d'opérateurs comme (VIII-1) ou (VIII-2).

c) Au voisinage du seuil enfin, aucune approximation linéaire ou quadrilinéaire n'est possible. La résolution de l'équation de Langevin non linéaire est alors difficile et il est préférable d'utiliser l'équation de Fokker-Planck (voir chapitre suivant).

③ Fluctuations au dessous du seuil

a) Linéarisation de l'équation de Langevin

- Bien au dessous du seuil, on peut négliger le terme non linéaire b^+b de l'équation de Langevin VII-31 qui devient alors

$$\frac{d}{dt} b(t) = p b(t) + F(t) \tag{VIII-4}$$

On en déduit que la valeur moyenne $\langle b(t) \rangle$ s'amortit avec une constante de temps τ ,

$$\tau = - \frac{1}{p} \tag{VIII-5}$$

qui, d'après le théorème de régression quantique, est aussi la constante de temps d'amortissement de $G_1(t)$.

- Il est intéressant d'exprimer τ , en fonction du nombre moyen $\langle b^+b \rangle$ de photons, qui dans la même approximation linéaire, est égal à $-2/p$ [voir VII-40]

$$\tau = \frac{\langle b^+b \rangle}{2} \tag{VIII-6}$$

b) Largeur spectrale de la raie émise

La demi-largeur à mi hauteur $\Delta\omega$ de la T.F. de $G_1(t)$ est donc égale à $1/\tau$. En revenant aux unités t et $\langle a^+a \rangle$ (voir VII-30), on obtient

$$\Delta\omega = \frac{1}{T\tau} = \frac{2}{T\langle b^+b \rangle} = 2 \frac{\xi^2}{T} \frac{1}{\langle a^+a \rangle} \tag{VIII-7}$$

c-à-d encore, compte tenu de (VII-36)

$$\Delta\omega = \frac{wS_0}{2} \frac{n_A + n_R}{n_A} \frac{1}{\langle a^+a \rangle} \tag{VIII-8}$$

Enfin, on peut éliminer $wS_0/2n_A$ au moyen de (VII-27) et obtenir :

$$\Delta\omega = \kappa \frac{n_A + n_R}{\langle a^+a \rangle} \tag{VIII-9}$$

Cette formule montre clairement que la largeur spectrale de la lumière émise au dessous du seuil est égale à la largeur spectrale κ des modes de la cavité multipliée par un facteur de réduction. Ce facteur de réduction est le rapport du nombre de photons introduits par les sources de bruit (émission spontanée qui en introduit n_A , rayonnement du corps noir qui en introduit n_R) divisé par le nombre moyen $\langle a^+a \rangle$ de photons dans la cavité. (Pour un laser, n_R est négligeable et n_A de l'ordre de 1 au voisinage du seuil. voir bas de la page VII-7). Quand on se rapproche du seuil,

$\langle a^2 \rangle$ augmente de manière très rapide et la cavité émise s'affaiblit considérablement (ralentissement critique).

- On peut également, en utilisant l'expression (VIII-5) de τ , et l'expression (VII-37) de p , mettre $\Delta\omega$ sous la forme

$$\Delta\omega = \frac{W}{2} (S_{cr} - S_0) \quad (\text{VIII-10})$$

qui montre bien la décroissance de $\Delta\omega$ quand S_0 se rapproche de S_{cr} .

Remarque

Supposons que les pertes de la cavité soient essentiellement dues à la fuite des photons à travers les miroirs. La probabilité de sortie d'un photon par unité de temps est alors d'après (VII-26) égale à 2κ . En multipliant 2κ par le nombre de photons $\langle a^2 \rangle$ dans la cavité et l'énergie $\hbar\omega$ d'un photon, on obtient alors la puissance de sortie P

$$P = 2\kappa \langle a^2 \rangle \hbar\omega \quad (\text{VIII-11})$$

On peut alors réexprimer $\Delta\omega$ en fonction de P et obtenir

$$\Delta\omega = \frac{2\kappa^2 \hbar\omega (n_A + n_B)}{P} \quad (\text{VIII-12})$$

qui n'est autre que la formule de Townes et Schawlow.

c) Fluctuations d'intensité

La linéarisation de l'équation (VII-38) montre que $\langle b^+b \rangle$ s'amortit avec une constante de temps $\tau_2 = \frac{-1}{2p}$, 2 fois plus courte que τ_1 ,

$$\tau_2 = \frac{\tau_1}{2} = -\frac{1}{2p} \quad (\text{VIII-13})$$

D'après le théorème de régression quantique, τ_2 est aussi le temps de décroissance de la fonction de corrélation $G_2(\tau)$. La largeur $\Delta\omega_2$ de la T.F. de $G_2(\tau)$ est donc (dans les unités τ, b)

$$\Delta\omega_2 = -2p \quad (\text{VIII-14})$$

Elle tend vers 0 quand on se rapproche du seuil.

④ Fluctuations au dessus du seuil.

a) Fluctuations d'intensité

- Comme l'amplitude est stabilisée au dessus du seuil, il est plus simple de commencer par l'étude des fluctuations d'intensité.

Reprenons pour cela de l'équation (VII-38) qui donne l'évolution de $\langle b^+b \rangle$. Au dessus du seuil ($p \gg 1$), on peut remplacer $\langle b^+b^+b \rangle$ par $\langle b^+b \rangle^2$ et obtenir pour $I = \langle b^+b \rangle$ l'équation d'évolution

$$\frac{d}{dt} I = 2(p-I)I + 4 = V_I \quad (\text{VIII-15})$$

(V_I est la vitesse d'entraînement de I)

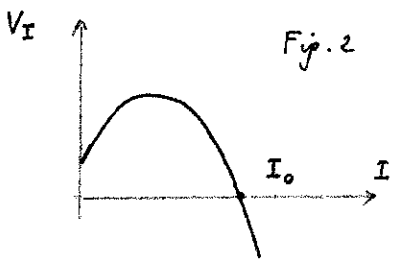


Fig. 2

La figure 2 représente la variations de V_I avec I . On obtient une parabole coupant l'axe des I en I_0 , correspondant à la valeur stationnaire de $\langle b^+b \rangle$ au dessus du seuil (voir VII-45).

L'approximation parabolique consiste à remplacer au voisinage de $I = I_0$, la parabole de la figure 2 par sa tangente en I_0 , ce qui revient à écrire

$$\frac{d}{dt} I = -\frac{1}{\tau_2} (I - I_0) \tag{VIII-16}$$

avec $\frac{1}{\tau_2} = -\left(\frac{dV_I}{dI}\right)_{I=I_0}$ (VIII-17)

- Pour $p \gg 1$, on a $I_0 = p$ (voir VII-46). On peut négliger le terme constant 4 dans (VIII-15), ce qui revient à écrire

$$p \gg 1 \quad \frac{dI}{dt} = 2(p - I)I = 2(I_0 - I)I \tag{VIII-18}$$

et donne par suite

$$p \gg 1 \quad \frac{1}{\tau_2} = \Delta\omega_2 = 2I_0 = 2p \tag{VIII-19}$$

(Un calcul plus précis utilisant VII-45 au lieu de VII-46 donnerait $\Delta\omega_2 = 2\sqrt{p^2 + 8}$).

On voit ainsi que la largeur $\Delta\omega_2$ de la TF de $G_2(\tau)$ croît comme $2p$ au dessus du seuil (dans les unités τ et b)

- Après s'être ralenties quand on se rapproche du seuil par en dessous (formule VIII-14), les fluctuations d'intensité s'accroissent quand on s'éloigne du seuil par dessus (formule VIII-19). L'interprétation physique de ce résultat est claire. Revenons à la figure 4c de la page VI-8. Quand on s'éloigne du seuil par dessus, le minimum du potentiel effectif au voisinage de la position d'équilibre stable (I_0) devient de plus en plus large, la force de rappel de plus en plus grande et le retour à l'équilibre de plus en plus rapide.

b) Equations de Langevin pour la phase et l'amplitude

- Comme cela est expliqué dans le § 2 b ci dessus (page VIII-2), on peut traiter b et b^+ comme des nombres β et β^* satisfaisant aux équations de Langevin déduites de (VII-31)

$$\frac{d}{dt} \beta = (p - |\beta|^2) \beta + F_\beta(\tau) \tag{VIII-20}$$

Mais alors que pour les forces quantiques $\langle F_b(\tau) F_{b^+}(\tau') \rangle \neq \langle F_{b^+}(\tau) F_b(\tau') \rangle$ car $D_{b^+b} \neq D_{bb^+}$, les forces classiques F_β et F_{β^*} apparaissant dans (VIII-20) et l'équation conjuguée ne font sens que si D_{b^+b} est satisfait à (VIII-3), qui avec les unités choisies pour écrire VII-31 devient

$$\overline{F_\beta(\tau) F_{\beta^*}(\tau')} = \overline{F_{\beta^*}(\tau) F_\beta(\tau')} = 4 \delta(\tau - \tau') \tag{VIII-21}$$

$$\overline{F_\beta(\tau) F_\beta(\tau')} = \overline{F_{\beta^*}(\tau) F_{\beta^*}(\tau')} = 0 \tag{VIII-22}$$

(VIII-22 a été rajouté pour mémoire et est lié à $D_{bb} = D_{b^+b^+} = 0$)

- Séparons dans β la phase et l'amplitude

$$\beta = r e^{-i\varphi} \tag{VIII-23}$$

On obtient alors à partir de l'équation (VIII-20) et de l'équation complexe conjuguée

$$\begin{cases} r e^{-i\varphi} - i r e^{-i\varphi} \dot{\varphi} = (p - r^2) r e^{-i\varphi} + F_{\beta} \\ r e^{i\varphi} + i r e^{i\varphi} \dot{\varphi} = (p - r^2) r e^{i\varphi} + F_{\beta}^* \end{cases} \tag{VIII-24}$$

On en déduit les équations de Langvin suivantes pour $\dot{\varphi}$ et \dot{r}

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{2ir} (F_{\beta}^* e^{-i\varphi} - F_{\beta} e^{i\varphi}) \tag{VIII-25}$$

$$\dot{r} = (p - r^2) r + \frac{1}{2} (F_{\beta}^* e^{i\varphi} + F_{\beta} e^{-i\varphi}) \tag{VIII-26}$$

Les résultats concernant les fluctuations d'amplitude sont très voisins de ceux obtenus au § précédent. Elle s'amortissent avec un temps 2 fois plus long que les fluctuations d'intensité. Aussi allons nous plus particulièrement étudier les fluctuations de phase décrites par l'équation (VIII-25)

c) Calcul de $\langle \Delta\varphi \rangle$ et $\langle (\Delta\varphi)^2 \rangle$

- Comme cela a été fait à plusieurs reprises dans ce qui précède, considérons un intervalle de temps $\Delta\tau$ long devant le temps de corrélation ^{des forces} mais court devant le temps d'évolution de la phase, et calculons la moyenne sur les réservoirs de l'accroissement $\Delta\varphi$ de φ au cours de $\Delta\tau$. Intégrons entre τ et $\tau + \Delta\tau$ l'équation (VIII-25). Cette équation est très non linéaire à cause de la présence de $e^{\pm i\varphi}$ et $\frac{1}{r}$ au 2^e membre. En fait l'amplitude étant stabilisée autour de r_0 , nous négligerons les variations de $\frac{1}{r}$ et remplacerons $\frac{1}{r}$ par $\frac{1}{r_0}$. Il vient ainsi :

$$\Delta\varphi(\tau) = \varphi(\tau + \Delta\tau) - \varphi(\tau) = \frac{1}{2ir_0} \left[\int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} dt' F_{\beta}^*(t') e^{-i\varphi(t')} - \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} dt' F_{\beta}(t') e^{i\varphi(t')} \right] \tag{VIII-27}$$

Par ailleurs, en développant $e^{\pm i\varphi(t')}$ au voisinage de τ , on obtient

$$e^{-i\varphi(t')} = e^{-i\varphi(\tau)} - i e^{-i\varphi(\tau)} \int_{\tau}^{t'} dt'' \dot{\varphi}(t'') + \dots \tag{VIII-28}$$

ce qui donne, lorsqu'on remplace $\dot{\varphi}(t'')$ par son expression (VIII-25)

$$e^{-i\varphi(t')} = e^{-i\varphi(\tau)} - \frac{i}{2ir_0} e^{-i\varphi(\tau)} \left[\int_{\tau}^{t'} dt'' (F_{\beta}^*(t'') e^{-i\varphi(t'')} - F_{\beta}(t'') e^{i\varphi(t'')}) \right] + \dots \tag{VIII-29}$$

On peut de nouveau, en utilisant (VIII-28), remplacer $e^{\mp i\varphi(t'')}$ par $e^{\mp i\varphi(\tau)}$ dans la dernière intégrale de (VIII-29) en ajoutant simultanément d'autres termes d'ordre plus élevé. On obtient ainsi un développement itératif de $e^{\mp i\varphi(t')}$ faisant intervenir $e^{\mp i\varphi(\tau)}$ et des intégrales sur des forces ou des produits de forces. En reportant ce développement dans (VIII-27), on obtient ainsi (compte tenu du fait que F_{β}^* et F_{β} sont complexes conjugués l'une de l'autre) :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(\tau) = & \frac{1}{2ir_0} \left[e^{-i\varphi(\tau)} \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} dt' F_{\beta}^*(t') - e^{i\varphi(\tau)} \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} dt' F_{\beta}(t') \right] \\ & - \frac{i}{(2ir_0)^2} \left[e^{-2i\varphi(\tau)} \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} dt' \int_{\tau}^{t'} dt'' F_{\beta}^*(t') F_{\beta}^*(t'') - \int_{\tau}^{\tau + \Delta\tau} dt' \int_{\tau}^{t'} dt'' F_{\beta}^*(t') F_{\beta}(t'') \right] + C.C. \\ & + \dots \text{ (produits de 3, 4, 5... forces)} \end{aligned} \tag{VIII-30}$$

- Prenons alors la moyenne sur les réservoirs de $\Delta\varphi(t)$
 La 1^{ère} ligne de (VIII-30) donne 0 car $\langle F_{\beta}^* \rangle = \langle F_{\beta} \rangle = 0$
 le 1^{er} terme du crochet de la 2^{ème} ligne donne 0 à cause de (VIII-22)
 le 2^{ème} terme de ce crochet donne un résultat non nul mais imaginaire pur et qui s'annule donc avec son complexe conjugué.

Pour les termes suivants de (VIII-30) il faut faire intervenir le caractère gaussien des forces de Langevin : les moments impairs de F et F^* sont nuls, les moments pairs d'ordre supérieur à 2 s'expriment en fonction des moments d'ordre 2. Par exemple

$$\langle F_{\beta}^*(t_1) F_{\beta}(t_2) F_{\beta}(t_3) F_{\beta}^*(t_4) \rangle = \langle F_{\beta}^*(t_1) F_{\beta}(t_2) \rangle \langle F_{\beta}(t_3) F_{\beta}^*(t_4) \rangle + \langle F_{\beta}^*(t_1) F_{\beta}(t_3) \rangle \langle F_{\beta}(t_2) F_{\beta}^*(t_4) \rangle \quad (VIII-31)$$

On se convainc alors aisément que les termes de la 3^{ème} ligne de (VIII-30) donnent, soit des contributions nulles (produit d'un nombre impair de forces), soit des contributions en $(\Delta\tau)^2, (\Delta\tau)^3, \dots$ (il suffit de reporter (VIII-21) dans (VIII-31) pour voir que l'intégrale sur t_1, t_2, t_3, t_4 entre t et $t + \Delta\tau$ de (VIII-31) donne un résultat proportionnel à $(\Delta\tau)^2$).

En conclusion $\langle \Delta\varphi \rangle$ est en $(\Delta\tau)^2$. Si l'on divise $\langle \Delta\varphi \rangle$ par $\Delta\tau$, et qu'on fait tendre $\Delta\tau$ vers 0 (tant en le laissant grand devant le temps de corrélation des forces de Langevin), on a donc

$$\boxed{\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta\varphi \rangle}{\Delta\tau} = 0} \quad (VIII-32)$$

- On peut calculer de la même manière $\langle \Delta\varphi^2 \rangle$ en élevant au carré l'expression (VIII-30). Le caractère gaussien des forces entraîne, comme on vient de le voir, que seuls les termes faisant intervenir un produit de 2 forces contribuent à la limite $\Delta\tau \rightarrow 0$. Donc il suffit d'élever au carré la 1^{ère} ligne de (VIII-30). D'autre part, d'après (VIII-22), seuls les termes rectangles contribuent. On obtient ainsi

$$\langle \Delta\varphi^2 \rangle = \frac{1}{4r_0^2} \int_t^{t+\Delta\tau} dt' \int_t^{t+\Delta\tau} dt'' [\langle F_{\beta}^*(t') F_{\beta}(t'') \rangle + \langle F_{\beta}(t'') F_{\beta}^*(t') \rangle] \quad (VIII-33)$$

La double intégrale se calcule aisément au moyen de (VIII-21) et est égale à $2\Delta\tau$. Finalement, on obtient

$$\boxed{\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta\varphi^2 \rangle}{2\Delta\tau} = \frac{1}{r_0^2}} \quad (VIII-34)$$

On trouve donc pour coefficient de diffusion de la phase $1/r_0^2$ ce qui confirme bien la discussion qualitative du § B (voir page VI-10). Plus le nombre de protons r_0^2 est élevé, plus la diffusion de la phase, associée à la diffusion de la particule fictive le long du cercle de rayon r_0 , est lente.

- Enfin, toujours à cause du caractère gaussien des forces, on a

$$\boxed{n > 2 \quad \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta\varphi^n \rangle}{\Delta\tau} = 0} \quad (VIII-35)$$

d) Equations de diffusion de la phase.

- A l'échelle de temps $\Delta T \gg \tau_c$, la phase φ peut être considérée comme une fonction aléatoire markoffienne (sans mémoire). Comme il s'agit de plus d'un processus à diffusion lente, on peut écrire pour la distribution de probabilité $P(\varphi, \tau)$ de φ une équation de Fokker-Planck généralisée (voir cours 76-77 p. IV-5)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P(\varphi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \varphi^n} M_n(\varphi) P(\varphi, \tau) \quad (\text{VIII-35})$$

où les "moments" $M_n(\varphi)$ sont définis par

$$M_n(\varphi) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{1}{n!} \frac{\langle \Delta \varphi^n \rangle}{\Delta T} \quad (\text{VIII-36})$$

Compte tenu de (VIII-32, 34, 35), on obtient alors pour $P(\varphi, \tau)$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P(\varphi, \tau) = \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} P(\varphi, \tau) \quad (\text{VIII-37})$$

équation qui n'est autre qu'une équation de diffusion, dont la fonction de Green [solution correspondant à la condition initiale $P(\varphi, 0) = \delta[\varphi - \varphi(0)]$] s'écrit :

$$\left(\frac{4\pi\tau}{r_0^2} \right)^{-1/2} \exp \left\{ - [\varphi(\tau) - \varphi(0)]^2 r_0^2 / 4\tau \right\} \quad (\text{VIII-38})$$

On déduit en particulier de (VIII-38) la moyenne du carré de l'accroissement $\langle [\varphi(\tau) - \varphi(0)]^2 \rangle$ au bout d'un temps τ non nécessairement petit

$$\langle [\varphi(\tau) - \varphi(0)]^2 \rangle = \frac{2\tau}{r_0^2} \quad (\text{VIII-39})$$

e) Fonction de corrélation du champ laser - largeur de raie du laser au dessus du seuil.

- En reportant (VIII-23) dans l'expression (VIII-1) de $G_1(\tau)$, on obtient

$$G_1(\tau) = \langle r(\tau) r(0) e^{i[\varphi(\tau) - \varphi(0)]} \rangle \quad (\text{VIII-40})$$

Comme l'amplitude est stabilisée au dessus du seuil, on commet une erreur négligeable en remplaçant dans (VIII-40) $r(\tau) r(0)$ par le nombre r_0^2 , ce qui donne

$$G_1(\tau) = r_0^2 \langle e^{i[\varphi(\tau) - \varphi(0)]} \rangle \quad (\text{VIII-41})$$

D'après (VIII-38) $\varphi(\tau) - \varphi(0)$ est une variable aléatoire gaussienne dont le crochet de (VIII-41) n'est autre que la fonction caractéristique Par T.F. de (VIII-38), on a alors, compte tenu de (VIII-39)

$$\langle e^{i[\varphi(\tau) - \varphi(0)]} \rangle = e^{-\frac{1}{2} \langle [\varphi(\tau) - \varphi(0)]^2 \rangle} = e^{-\frac{\tau}{r_0^2}} \quad (\text{VIII-42})$$

On a donc finalement

$$G_1(\tau) = r_0^2 e^{-\frac{\tau}{r_0^2}} \quad (\text{VIII-43})$$

- Le temps d'amortissement τ_1 des fluctuations du champ laser est donc

$$\tau_1 = r_0^2 = \langle b^+ b \rangle \quad (\text{VIII-44})$$

En comparant (VIII-44) à (VIII-6), on voit que τ_1 est toujours proportionnel à $\langle b^+ b \rangle$ que l'on soit au dessus ou au dessous du seuil, le coefficient de proportionnel étant cependant 2 fois plus grand au dessus du seuil qu'au dessous.

On en déduit pour la largeur de raie du laser

$$\Delta\omega = \frac{1}{\tau_1} = \begin{cases} \frac{2}{\langle b^+ b \rangle} & \text{au dessus du seuil} \\ \frac{1}{\langle b^+ b \rangle} & \text{au dessous du seuil} \end{cases} \quad (\text{VIII-45})$$

Comme $\langle b^+ b \rangle$ croît de manière spectaculaire au dessus du seuil, on voit que la largeur de raie du laser décroît aussi de manière spectaculaire.

On peut considérer que le facteur 2 de différence entre les 2 expressions (VIII-45) vient au fait qu'au dessus du seuil les fluctuations de phase et d'amplitude jouent toutes les 2 un rôle, alors qu'au dessous du seuil, seules les fluctuations de phase subsistent.

- En revenant aux unités t et $\langle a^+ a \rangle$, on peut, par des calculs tout à fait analogues à ceux de la page VIII-3 obtenir :

$$\Delta\omega = \frac{1}{T\tau_1} = \frac{\xi^2}{T} \frac{1}{\langle a^+ a \rangle} = \frac{w S_0}{4} \frac{n_A + n_R}{n_A} \frac{1}{\langle a^+ a \rangle} = \frac{K}{2} \frac{n_A + n_R}{\langle a^+ a \rangle} \quad (\text{VIII-46})$$

L'avant dernière expression (VIII-46) peut être très simplement interprétée dans le domaine optique où $n_R \ll n_A$ de sorte que $(n_A + n_R)/n_A = 1$. On a alors en multipliant le numérateur et le dénominateur de (VIII-46) par le carré E_0^2 du champ associé à un photon (on se rappelle que S_0 est le nombre N_2 d'atomes dans le niveau supérieur, puisque $N_1 = 0$) :

$$\Delta\omega = \frac{1}{4} \frac{N_2 w E_0^2}{\langle a^+ a \rangle E_0^2} \quad (\text{VIII-47})$$

Chaque processus d'émission spontanée fait apparaître un champ E_0 (petites flèches de la figure 3). Par

secondes on a $w N_2$ tels processus. Comme ils sont incohérents, il faut ajouter les carrés (et non les amplitudes). Donc $N_2 w E_0^2$ représente le carré moyen du champ spontané émis en 1 seconde (Carré du vecteur AB de la figure 3).

Le dénominateur de (VIII-47) est le carré du champ laser (carré du rayon du cercle de la figure 3).

$\Delta\omega$ représente donc (au facteur $\frac{1}{4}$ près) la moyenne du carré du déphasage du champ laser introduit pendant 1 seconde par l'émission spontanée.

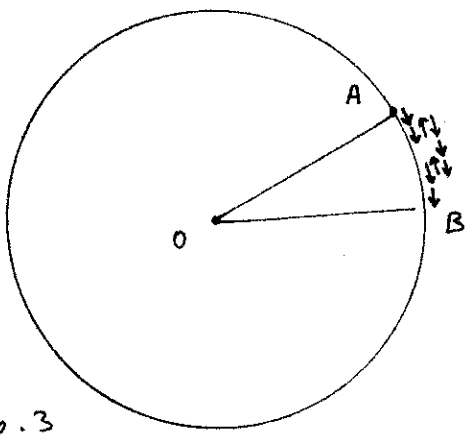


Fig. 3