

C - Equations de Langevin réduites pour le mode laser.

But de ce §

les équations (VI-10) et (VI-14) sont des équations de Langevin - Mori concernant les variables du mode laser (a et a^+) et les variables atomiques : dipole (S_{\pm}), inversion de populations ($N_2 - N_1 = S$). Dans ce §, on essaie d'obtenir une équation de Langevin réduite pour les seules variables a et a^+ . Pour cela, on élimine adiabatiquement les variables atomiques, en utilisant le fait qu'elles varient beaucoup plus vite que le champ laser, et peuvent donc suivre instantanément les variations lentes de ce dernier.

Il s'agit donc de reprendre les calculs du § B, d'une part en gardant dès le début les forces de Langevin, d'autre part en ne traitant pas les diverses variables comme des nombres mais comme des opérateurs qui ne commutent pas entre eux et dont il faut respecter l'ordre.

① Élimination adiabatique des variables atomiques

Rappel des paramètres physiques importants

κ : Taux d'amortissement du mode de la cavité ($\sim 10^6$ Hz)
 γ : Taux de relaxation du dipôle atomique
 Γ : " " des populations atomiques } ($\sim 10^8$ Hz)

$W = \frac{2g^2}{\gamma}$: Taux d'absorption ($1 \rightarrow 2$) ou d'émission induite ($2 \rightarrow 1$) ($\sim 10^{-2}$ Hz)
 associé à \pm photon (g : constante de couplage).

S_0 : Inversion de populations en l'absence de couplage atome - laser.

a) Élimination adiabatique du dipôle atomique S_{\pm}

- Comme les variables atomiques suivent l'évolution du champ, \dot{S}_{\pm} est de l'ordre de κS_{\pm} très au dessous du seuil, puis devient beaucoup plus petit quand on se rapproche du seuil et qu'on le dépasse. On peut donc, dans les équations (VI-10-3,4) négliger \dot{S}_{\pm} devant le 1^{er} terme, $-\gamma S_{\pm}$, du 2^e membre et obtenir ainsi :

$$S_+ = -\frac{ig}{\gamma} a^+ S + \frac{1}{\gamma} F_{S_+} \quad S_- = \frac{ig}{\gamma} a S + \frac{1}{\gamma} F_{S_-} \quad (VII-1)$$

Remarques

(i) A cause des forces de Langevin $F_{S_{\pm}}$ au 2^e membre de (VI-10-3,4), il y a une composante fluctuante dans S_{\pm} qui contribue à \dot{S}_{\pm} . Le raisonnement précédent n'est donc valable que pour les composantes de Fourier des forces fluctuantes de fréquence bien inférieure à γ . Le résultat déduit des équations (VII-1) pour les composantes de Fourier des fluctuations de S_{\pm} de fréquence supérieure à γ est donc certainement incorrect (ces fluctuations sont surestimées).

En fait, nous allons reporter les expressions "adiabatiques" (VII-1) de S_{\pm} dans l'équation d'évolution de a et a^+ . Les forces fluctuantes

nouvelles, d'origine atomique, qui apparaissent ainsi au 2^{ème} membre de l'équation donnant \dot{a} et \dot{a}^+ n'auront donc pas un spectre de fréquences correct pour $\omega \gg \gamma$. Une telle erreur n'est cependant pas grave car a et a^+ sont des variables très lentes qui ne sont sensibles qu'à la partie basse fréquence du spectre des Jones de Langevin. De manière plus précise, on peut sur les équations de Langevin réduites obtenues plus haut loin, "lisser" les Jones de Langevin et restreindre leur spectre de fréquence à une largeur $\theta^{-1} < \gamma$ [le spectre filtré est alors correct de même que les coefficients de diffusion]; la largeur θ^{-1} peut de plus toujours être choisie très grande devant la largeur spectrale des fluctuations du laser, de sorte que les Jones de Langevin filtrés (d'origine atomique) apparaissent toujours comme markoviennes pour les variables du mode laser (temps de corrélation très court devant le temps de relaxation du mode).

(ii) Dans (VII-1), on peut tout aussi bien écrire $S a^+$ au lieu de $a^+ S$ ($S a$ au lieu de $a S$), car les variables du mode de laser et les variables atomiques à un même instant t commutent.

- En reportant l'expression adiabatique VII-1 de S_- dans (VI-10-2) et en utilisant la définition $w = 2g^2/\gamma$ de w , on obtient

$$\dot{a} = -(\kappa - \frac{w}{2} S) a + \hat{F}_a \tag{VII-2}$$

où

$$\hat{F}_a = F_a - \frac{ig}{\gamma} F_{S_-} \tag{VII-3}$$

est une nouvelle Jones de Langevin pour le mode laser contenant, en plus de F_a , une contribution atomique $-\frac{ig}{\gamma} F_{S_-}$.

b) Élimination adiabatique de l'inversion de populations $S = N_2 - N_1$

- Suivant la même méthode que plus haut, on néglige dans l'équation (VI-14) \dot{S} devant $-\Gamma S$, ce qui donne

$$S = S_0 + \frac{2ig}{\Gamma} (a^+ S_- - S_+ a) + \frac{F_S}{\Gamma} \tag{VII-4}$$

- Reportons alors dans (VII-4) les expressions adiabatiques (VII-1) de S_{\pm} .
Il vient :

$$S = S_0 - \frac{2w}{\Gamma} S a^+ a + \frac{2ig}{\gamma \Gamma} (a^+ F_{S_-} - F_{S_+} a) + \frac{F_S}{\Gamma} \tag{VII-5}$$

Remarque

On peut dans (VII-5) écrire tout aussi bien $a^+ a S$ ou $S a^+ a$. Par contre, a^+ et a ne commutent pas avec $F_{S_{\pm}}$ et l'ordre des opérateurs dans l'avant dernière terme de (VII-5) est important. Notons que l'on aurait pu écrire $(S_- a^+ - a S_+)$ au lieu de $(a^+ S_- - S_+ a)$ dans le 2^{ème} terme de (VII-4). On aurait alors obtenu au lieu de (VII-5):

$$S = S_0 - \frac{2w}{\Gamma} S a a^+ + \frac{2ig}{\gamma \Gamma} (F_{S_-} a^+ - a F_{S_+}) + \frac{F_S}{\Gamma} \tag{VII-6}$$

Nous reviendrons plus loin (remarque ii page VII-6) sur l'équivalence entre (VII-5) et (VII-6).

② Equations de Langevin réduite pour a et a^+ .

a) Infiniment petits caractérisant les développements - Domaine de validité des calculs de ce chapitre.

- Nous avons vu plus haut que w/Γ et w/γ étaient extrêmement petits (de l'ordre de 10^{-10}). Nous négligerons donc toutes les corrections en w/Γ des différents coefficients des équations obtenues ci-dessous. L'approximation adiabatique a d'ailleurs introduit déjà des erreurs du même ordre ou plus grandes.
- De même, nous ne tiendrons compte des effets de saturation, caractérisés par le paramètre $\frac{w a^+ a}{\Gamma}$, que dans les termes où ils jouent un rôle important (saturation du gain qui empêche la divergence du système) et nous les calculerons alors l'ordre le plus bas où ils apparaissent. Nous supposons donc $\frac{w a^+ a}{\Gamma} \ll 1$, ce qui laisse cependant d'après la figure 3 de la page VI-7 la possibilité d'étudier une plage d'intensité assez large de part et d'autre du seuil.

b) Etablissement de l'équation d'évolution de a

- Il faut maintenant reporter l'expression adiabatique (VII-5) de S dans l'équation d'évolution (VII-2) de a qui contient S .
- Le 2^{ème} terme de (VII-5) est déjà d'ordre 1 en $w a^+ a / \Gamma$. On peut donc, d'après le § précédent, remplacer S par S_0 dans ce terme.
- Les 3^{ème} et 4^{ème} termes de (VII-5) vont, lorsqu'on reporte (VII-5) dans (VII-2), introduire des nouvelles forces fluctuantes au 2^{ème} membre de l'équation donnant \dot{a} , qui vont venir s'ajouter à \hat{F}_a . En fait, S est déjà multiplié par $w = 2g^2/\gamma$ dans (VII-2), de sorte que les nouvelles forces qui apparaissent ainsi sont \propto en g^2 et g^3 , alors que les 2 termes de \hat{F}_a sont, d'après (VII-3), en g^0 et g^1 . Nous négligerons donc ces nouvelles forces devant \hat{F}_a . [De manière plus précise ^(on peut montrer) qu'elles apportent au coefficient de diffusion de \hat{F}_a des corrections en $\frac{w}{\Gamma}$ ou $\frac{w a^+ a}{\Gamma}$].
- En toute rigueur, le 3^{ème} terme de (VII-5) n'est pas purement fluctuant puisqu'il a une valeur moyenne non nulle sur le réservoir (qui sera évalué dans le § 3 suivant). Cette valeur moyenne est cependant w/Γ fois plus petite que le 1^{er} terme, S_0 , de (VII-5) et sera donc négligée.

En conclusion, lorsqu'on reporte (VII-5) dans (VII-2), on peut ^(donc) à l'ordre le plus bas significatif en $\frac{w a^+ a}{\Gamma}$ et $\frac{w}{\Gamma}$, se contenter de l'expression

$$S = S_0 - \frac{2w}{\Gamma} S_0 a^+ a \tag{VII-7}$$

ce qui donne pour \dot{a}

$$\dot{a} = -\left(\kappa - \frac{w}{2} S_0 + \frac{w^2}{\Gamma} S_0 a^\dagger a\right) a + \hat{F}_a \quad (VII-8)$$

c) Coefficients de diffusion \hat{D} pour les nouvelles forces de Langevin \hat{F}

D'après (VII-3), on a, comme F_a et F_{S_\pm} sont des forces indépendantes :

$$2 \hat{D}_{a^\dagger a} = 2 D_{a^\dagger a} + \frac{2g^2}{\gamma^2} D_{S_+ S_-} \quad (VII-9)$$

c-à-d compte tenu de (V-29), (VI-11), (VI-12) et (VI-21)

$$2 \hat{D}_{a^\dagger a} = 2\kappa \langle n_0 \rangle + \frac{w}{2\gamma} \left(\langle N_2 \rangle - \Gamma \langle N_2 \rangle + 2\gamma \langle N_2 \rangle \right) \quad (VII-10)$$

Nous calculerons le 2^{ème} terme de (VII-10) à l'ordre 0 en $w a^\dagger a / \Gamma$. Il ne serait en effet pas cohérent de calculer les termes d'ordre 1 en continuant à négliger les forces de Langevin associées au 3^{ème} et 4^{ème} terme de (VII-5) qui donnent des corrections du même ordre.

A l'ordre 0 en $w a^\dagger a / \Gamma$, $\langle N_2 \rangle$ (et $\langle N_1 \rangle$) se calculent à partir de (VI-10-5 et 6) en négligeant le terme en $i\gamma(a^\dagger S_- - a S_+)$. Comme on peut négliger \dot{N}_2 et \dot{N}_1 (approximation adiabatique) et que $\langle F_{N_2} \rangle = \langle F_{N_1} \rangle = 0$, on a, compte tenu de (VI-12), (VI-15), (VI-17)

$$\langle N_2 \rangle - \Gamma \langle N_2 \rangle = 0 \quad \langle N_1 \rangle = 0 \quad (VII-10)$$

ce qui donne finalement

$$\frac{w}{2\gamma} \left(\langle N_2 \rangle - \Gamma \langle N_2 \rangle + 2\gamma \langle N_2 \rangle \right) = w \langle N_2 \rangle = w S_0 \quad (VII-11)$$

et de même

$$\frac{w}{2\gamma} \left(\langle N_1 \rangle - \Gamma \langle N_1 \rangle + 2\gamma \langle N_1 \rangle \right) = w \langle N_1 \rangle = 0 \quad (VII-12)$$

En conclusion, tant que $w a^\dagger a \ll \Gamma$, on peut utiliser le tableau suivant de coefficients de diffusion

$\alpha \backslash \beta$	a	a^\dagger	
	a	a^\dagger	
$2 \hat{D}_{\alpha\beta}$	a	a^\dagger	(VII-13)
	a	a^\dagger	

③ Moyennes sur les réservoirs d'un produit de forces de Langevin et d'opérateurs a et a^\dagger pris au même instant

La motivation d'un tel calcul est que des produits du type $a F$ ou $a^\dagger F$ apparaissent très fréquemment au cours des calculs de ce chapitre. Un premier exemple est le 3^{ème} terme de l'expression (VII-5) donnant S . Dans le § 4 suivant, on l'on calcule $\frac{d}{dt} \langle a^\dagger a \rangle$, on verra apparaître également $\langle a^\dagger \hat{F}_a + \hat{F}_a^\dagger a \rangle$

a) Principe du calcul

Définissons par $\hat{V}_a(t)$ le 1^{er} terme du second membre de (VII-8) et intégrons VII-8 entre $t-\Delta t$ et t , Δt étant un temps long devant le temps de corrélation des forces de Langevin, court devant le temps d'évolution de $a(t)$. On obtient, à des termes d'ordre supérieur en $\sqrt{\Delta t}$ près :

$$a(t) = a(t-\Delta t) + \hat{V}_a(t-\Delta t) \Delta t + \int_{t-\Delta t}^t \hat{F}_a(t') dt' \quad (\text{VII-14})$$

- Supposons alors qu'on s'intéresse par la quantité $\langle F_\beta(t) a(t) \rangle$ où F_β est l'une des forces de Langevin du problème. $a(t-\Delta t)$ et $\hat{V}_a(t-\Delta t)$ dépendent des valeurs des forces de Langevin dans le passé de $t-\Delta t$. Comme $\Delta t \gg \tau_c$, on en déduit que

$$\langle F_\beta(t) a(t-\Delta t) \rangle = \langle F_\beta(t) \hat{V}_a(t-\Delta t) \rangle = 0 \quad (\text{VII-15})$$

de sorte qu'en multipliant les 2 membres de (VII-14) par $F_\beta(t)$ et en prenant la valeur moyenne sur le réservoir, on obtient :

$$\langle F_\beta(t) a(t) \rangle = \int_{t-\Delta t}^t dt' \langle F_\beta(t) \hat{F}_a(t') \rangle \approx \int_{-\infty}^t dt' \langle F_\beta(t) \hat{F}_a(t') \rangle \quad (\text{VII-16})$$

b) Exemples d'application

i) Calcul de $\langle a^+(t) \hat{F}_a(t) + \hat{F}_a^+(t) a(t) \rangle$

En remplaçant $F_\beta(t)$ par $\hat{F}_a^+(t)$ dans (VII-16), on obtient immédiatement, compte tenu de (VII-13)

$$\begin{aligned} \langle \hat{F}_a^+(t) a(t) \rangle &= \int_{-\infty}^t dt' \langle \hat{F}_a^+(t) \hat{F}_a(t') \rangle = 2\hat{D}_{a^+a} \int_{-\infty}^t dt' \delta(t-t') \\ &= \hat{D}_{a^+a} = \kappa n_0 + \frac{w}{2} S_0 \end{aligned} \quad (\text{VII-17})$$

On voit ainsi toute l'importance d'avoir obtenu (après lissage) des forces de Langevin dont les fonctions de corrélation sont des fonctions paires de $t-t'$. Un calcul identique donne la même valeur pour $a^+(t) \hat{F}_a(t)$. On a donc

$$\langle a^+(t) \hat{F}_a(t) + \hat{F}_a^+(t) a(t) \rangle = 2\hat{D}_{a^+a} = 2\kappa n_0 + w S_0 \quad (\text{VII-18})$$

La signification physique de ce terme apparaîtra clairement au § 4 suivant.

ii) Calcul de $\langle a^+(t) F_{S_-}(t) - F_{S_+}(t) a(t) \rangle$ (cf 3^e terme de VII-5)

En remplaçant $F_\beta(t)$ par $F_{S_+}(t)$ dans (VII-16), en utilisant le fait que F_a et F_{S_+} sont indépendants, on obtient :

$$-\langle F_{S_+}(t) a(t) \rangle = \frac{ig}{\gamma} \int_{-\infty}^t dt' \langle F_{S_+}(t) F_{S_-}(t') \rangle = \frac{ig}{\gamma} D_{S_+S_-} \quad (\text{VII-19})$$

Un calcul analogue conduit à la même valeur pour $\langle a^+(t) F_{S_-}(t) \rangle$. On obtient ainsi (en calculant comme au § 2c $D_{S_+S_-}$ à l'ordre 0 en $w a^2/\Gamma$):

$$\frac{2ig}{\gamma\Gamma} \langle a^+(t) F_{S_-}(t) - F_{S_+}(t) a(t) \rangle = -\frac{2g^2}{\gamma^2\Gamma} 2D_{S_+S_-} = -\frac{2w}{\Gamma} \langle N_2 \rangle = -\frac{2w S_0}{\Gamma} \quad (\text{VII-20})$$

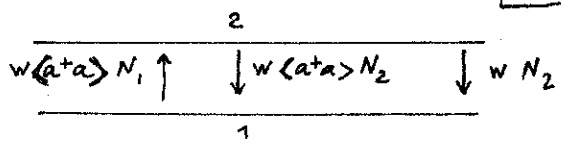
Prendons alors la valeur moyenne des 2 membres de (VII-5). En utilisant $\langle F_S \rangle = 0$, et (VII-20), on obtient (en remplaçant S par S_0 dans le terme de saturation)

$$0 = \Gamma S_0 - \Gamma \langle S \rangle - 2w S_0 \langle a^+ a \rangle - 2w \langle N_2 \rangle \quad (\text{VII-21})$$

On voit ainsi apparaître un nouveau terme, $-2w \langle N_2 \rangle$, par rapport à l'équation (VI-23) du § B précédent. La signification

physique de ce terme est très claire.

(VII-20) exprime qu'en régime stationnaire l'inversion S atteint une valeur d'équilibre sous l'effet combiné du pompage (1^{er} terme), de la relaxation (2^e terme), de l'absorption et de l'émission induites (3^e terme) et de l'émission spontanée dans le mode (4^e terme). (Le facteur 2 provient du fait que tout processus d'émission spontanée fait varier S de 2 unités)



Le paramètre w peut donc être encore interprété comme la probabilité par unité de temps d'émission spontanée d'un photon dans le mode.

Ainsi, en gardant les forces de Langevin dans (VI-10), en faisant attention à l'ordre des opérateurs et aux corrélations entre forces de Langevin et opérateurs, on voit apparaître très simplement l'émission spontanée dans le mode.

c) Remarques

(i) On peut donc séparer le 3^{em} terme de VII-5 en sa valeur moyenne, $-2w S_0 / \Gamma$ (plus petite que le 1^{er} terme de VII-5 par un facteur w/Γ ce qui explique pourquoi on ne l'a pas gardé), et l'écart par rapport sa valeur moyenne qui est une force de Langevin purement fluctuante, dont on peut se convaincre aisément qu'elle a la forme

$$\frac{2ig}{\gamma\Gamma} [a^+(t-\Delta t) F_{S-}(t) - F_{S+}(t) a(t-\Delta t)] \tag{VII-22}$$

Lorsqu'on reporte (VII-22) et F_S/Γ (VII-2), on obtient des termes fluctuants négligés dans le § 2 ci-dessus, mais qu'on pourrait calculer en suivant les mêmes méthodes que précédemment. On peut alors montrer que ces termes décrivent le bruit Schott associé aux fluctuations des populations N_1 et N_2 et provenant d'une part du pompage et de la relaxation (terme F_S/Γ), d'autre part des absorptions et émissions induites entre 1 et 2 (terme VII-22)

(ii) le même calcul qu'au § b ii) donne

$$\frac{2ig}{\gamma\Gamma} \langle F_{S-} a^+ - a F_{S+} \rangle = -\frac{2g^2}{\gamma^2\Gamma} 2D_{S-S_+} = -\frac{2w}{\Gamma} \langle N_1 \rangle = 0 \tag{VII-23}$$

Retraçons alors les valeurs moyennes des équations (VII-6) et (VII-5) obtenues plus haut à partir de 2 ordres possible d'opérateurs commutant entre eux. Il vient (à l'ordre 0 en $w(a^+a)/\Gamma$)

$$0 = \frac{2w}{\Gamma} S_0 \langle a a^+ - a^+ a \rangle - \frac{2w}{\Gamma} S_0 \tag{VII-24}$$

Comme $[a, a^+] = 1$, cette équation est bien vérifiée. En d'autres termes, suivant que le 2^{em} terme de (VII-4) est écrit sous la forme $a^+ S_- - S_+ a$ ou $S_- a^+ - a S_+$ le 2^{em} terme de l'expression VII-5 ou VII-6 donnant S n'a pas la même forme, mais il en est alors de même du 3^{em}, la somme des 2^{em} et 3^{em} termes conservant la même valeur.

④ Equations d'évolution du nombre moyen de photons $\langle a^\dagger a \rangle$

- Multiplions l'équation (VII-8) à gauche par a^\dagger , puis l'équation adjointe de (VII-8) à droite par a . Enfin, prenons la valeur moyenne sur les réservoirs de la somme des 2 équations ainsi obtenues. Il vient

$$\frac{d}{dt} \langle a^\dagger a \rangle = -(2\kappa - w S_0) \langle a^\dagger a \rangle - \frac{2w^2}{\Gamma} S_0 \langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle + \langle a^\dagger \hat{F}_a + \hat{F}_a^\dagger a \rangle \quad (VII-25)$$

c-à-d encore, compte tenu de (VII-18) :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \langle a^\dagger a \rangle = -(2\kappa - w S_0) \langle a^\dagger a \rangle - \frac{2w^2}{\Gamma} S_0 \langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle + 2\kappa n_0 + w S_0} \quad (VII-26)$$

- L'interprétation physique de (VII-26) est très claire. La vitesse de variation du nombre moyen de photons dans le mode est due à 3 processus

- (i) les pertes de la cavité : Terme $-2\kappa \langle a^\dagger a \rangle$
- (ii) le gain du milieu atomique : gain linéaire $w S_0 \langle a^\dagger a \rangle$ corrigé par la saturation $-\frac{2w^2}{\Gamma} S_0 \langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle$
- (iii) l'alimentation du mode d'une part par le rayonnement du corps noir qui introduit $2\kappa n_0$ ^(photons) dans le mode par unité de temps, d'autre part par l'émission spontanée qui en introduit $w S_0$.

- On notera 2 différences importantes entre (VII-26) et l'équation correspondante obtenue dans le § B précédent en négligeant les forces de Langevin et le caractère énantique des opérateurs (voir par exemple VI-18 et VI-22). D'une part, on a le terme source $2\kappa n_0 + w S_0$ qui est nouveau et qui permet d'avoir $\langle a^\dagger a \rangle \neq 0$ même en dessous du seuil. D'autre part, on voit apparaître $\langle a^\dagger a^\dagger a a \rangle$ et non $\langle a^\dagger a \rangle^2$

Remarque

On peut écrire le terme source $2\kappa n_0 + w S_0$ de manière plus symétrique et plus suggestive.

En l'absence d'atomes, l'équation (VII-26) s'écrit $\frac{d}{dt} \langle a^\dagger a \rangle = 2\kappa (n_0 - \langle a^\dagger a \rangle)$ ce qui montre que n_0 est, en régime stationnaire, le nombre moyen de photons dans le mode provenant du rayonnement du corps noir. Nous noterons $n_0 = n_R$ pour noter cette origine (rayonnement)

(VII-27 bis)

Supposons maintenant la cavité alimentée uniquement par l'émission spontanée. Le nombre moyen de photons dans le mode, si l'émission spontanée était le seul processus présent, serait donné par l'équation $\frac{d}{dt} \langle a^\dagger a \rangle = -2\kappa \langle a^\dagger a \rangle + w S_0$. Il vaudrait donc $\frac{w S_0}{2\kappa}$. Nous poserons

$$\boxed{n_A = \frac{w S_0}{2\kappa}} \quad (VII-27)$$

pour rappeler cette origine (atomique) de n_A . Finalement, on a

$$\boxed{2\kappa n_0 + w S_0 = 2\kappa (n_R + n_A)} \quad (VII-28)$$

Au voisinage du seuil, S_0 est voisin de $S_{cr} = \frac{2\kappa}{w}$ (voir VI-25), de sorte que n_A est de l'ordre de 1

Dans le domaine optique (lasers) n_A est de l'ordre de 1 alors que $n_R = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$ est complètement négligeable devant 1 ($\hbar\omega \gg kT$)

Dans le domaine microonde (masers), plus précisément pour $\hbar\omega \ll kT$, $n_R \approx \frac{kT}{\hbar\omega}$ est très grand devant n_A qui reste de l'ordre de 1

$$\begin{cases} \hbar\omega \gg kT & n_A \gg n_R \\ \hbar\omega \ll kT & n_A \ll n_R \end{cases} \quad (\text{VII-29})$$

⑤ Introduction de nouvelles variables sans dimensions

- Afin de simplifier les calculs et les discussions qui suivent, nous allons poser

$$\begin{cases} t = T \tau \\ a = \xi b \end{cases} \quad (\text{VII-30})$$

et choisir T (nouvelle unité de temps) et ξ (ξ^2 nouvelle unité d'intensité) pour que l'équation de Langevin pour b , obtenue à partir de (VII-8), ait la forme très simple

$$\begin{cases} \frac{db}{d\tau} = (p - b^+ b) b + \mathcal{F}(\tau) \\ \langle \mathcal{F}^+(\tau) \mathcal{F}(\tau') \rangle = 4 \delta(\tau - \tau') \end{cases} \quad (\text{VII-31})$$

Il n'y a alors plus qu'un paramètre p dans (VII-31) qui est appelé le paramètre de pompage. (Le facteur 4 est choisi dans VII-32 de manière que l'équation de Fokker-Planck associée à VII-31, qui sera étudiée plus loin, ait la forme standard de l'équation de Fokker-Planck d'un oscillateur de Van der Pol, équation très étudiée dans la littérature).

- Reportons (VII-30) dans (VII-8). Par identification avec (VII-31), on obtient :

$$\begin{cases} p = T \left(\frac{W}{2} S_0 - \kappa \right) = T \frac{W}{2} (S_0 - S_{cr}) \\ \frac{W^2 T}{\Gamma} \xi^2 W S_0 = 1 \end{cases} \quad (\text{VII-33})$$

$$\frac{W^2 T}{\Gamma} \xi^2 W S_0 = 1 \quad (\text{VII-34})$$

On a fait apparaître S_{cr} dans (VII-33) grâce à la relation (VI-25), de manière à montrer que p est proportionnel à l'écart à la valeur critique. Enfin, on peut calculer la fonction de corrélation de \mathcal{F} en fonction de celle de \hat{F} . Compte tenu de la relation $\delta(t-t') = \frac{1}{T} \delta(\tau-\tau')$, on obtient par identification avec VII-32

$$4 = \frac{\Gamma}{\xi^2} [W S_0 + 2\kappa n_0] = \frac{\Gamma}{\xi^2} W S_0 \left[1 + \frac{2\kappa n_0}{W S_0} \right] = \frac{\Gamma}{\xi^2} \left[1 + \frac{n_R}{n_A} \right] W S_0 \quad (\text{VII-35})$$

On a utilisé VII-27 et VII-27 bis. De (VII-34) et (VII-35), on tire

$$T = \sqrt{\frac{\Gamma}{W}} \frac{2}{W S_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{n_R}{n_A}}} \quad \xi^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Gamma}{W}} \sqrt{1 + \frac{n_R}{n_A}} \quad (\text{VII-36})$$

ce qui donne pour VII-33

$$p = \sqrt{\frac{\Gamma}{W}} \frac{S_0 - S_{cr}}{S_0} \sqrt{\frac{n_A}{n_A + n_R}} \quad (\text{VII-37})$$

Le paramètre de pompage p est donc l'écart de l'inversion S_0 par rapport à la valeur critique S_{cr} exprimé en valeur relative par rapport à S_0 , amplifié par le facteur $\sqrt{\frac{\Gamma}{W}}$ ($\sim 10^5$) [le dernier radical est de l'ordre de 1 pour les lasers où $n_A \gg n_R$]

Au voisinage du seuil, $\frac{2}{\omega S_0}$ est égal à κ^{-1} . La nouvelle unité de temps τ est donc, près du seuil, κ^{-1} amplifié par $\sqrt{\frac{\Gamma}{\omega}}$ (si $n_A \gg n_R$). Enfin, comme $a^\dagger a = \xi^2 b^\dagger b$, l'unité sur $b^\dagger b$ correspond à $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Gamma}{\omega}}$ photons

- Enfin, avec ces nouvelles variables, l'équation (VII-26) s'écrit :

$$\boxed{\frac{d}{d\tau} \langle b^\dagger b \rangle = 2p \langle b^\dagger b \rangle - 2 \langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle + 4} \quad (VII-38)$$

D. Nombre de photons émis par l'oscillateur en régime stationnaire

- Comme première application des formules précédentes, et avant d'étudier les fluctuations de phase et d'intensité, nous allons calculer le nombre moyen de photons dans le mode en fonction de l'écart à l'inversion critique, c-à-d de p

- Il faut pour cela trouver la solution stationnaire de (VII-38)

$$p \langle b^\dagger b \rangle - \langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle + 2 = 0 \quad (VII-39)$$

On se heurte alors tout de suite à la difficulté du terme $\langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle$ qui a priori ne s'exprime pas en fonction de $\langle b^\dagger b \rangle$.

Avant de résoudre cette difficulté de manière précise au moyen de l'équation de Fokker-Planck, on peut dès maintenant comprendre l'essentiel des phénomènes au moyen d'approximations raisonnables suggérées par la discussion du § B précédent (voir pages VI-9 et VI-10)

Très au dessous du seuil $p < 0 \quad |p| \gg 1$

On néglige tout simplement le terme non linéaire $\langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle$ ce qui donne

$$\text{Approx. linéaire : } \langle b^\dagger b \rangle \sim -\frac{2}{p} \quad (VII-40)$$

Au dessous du seuil $p < 0 \quad |p| > 1$

On essaie de tenir compte de manière approchée du terme non linéaire en utilisant le fait que la distribution des valeurs possibles de b doit avoir une "allure gaussienne". On écrit donc

$$\langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle \sim 2(\langle b^\dagger b \rangle)^2 \quad (VII-41)$$

ce qui donne l'équation du second degré suivante pour $I = \langle a^\dagger a \rangle$

$$pI - 2I^2 + 2 = 0 \quad (VII-42)$$

et par suite

$$\text{Approx. gaussienne : } \langle b^\dagger b \rangle \sim \frac{1}{4} (p + \sqrt{p^2 + 16}) \quad (VII-43)$$

qui redonne bien (VII-40) pour $|p| \gg 1$

Très au dessus du seuil $p \gg 1$ (restant toutefois tel que $\frac{\omega a^\dagger a}{\Gamma} \ll 1$)

D'après la discussion du § B, la distribution des valeurs possibles de $b^\dagger b$ est très resserée autour de la valeur d'équilibre, ce qui suggère de poser (approximation "quasi linéaire") :

$$\langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle \sim (\langle b^\dagger b \rangle)^2 \quad (VII-44)$$

ce qui donne l'équation $pI - I^2 + 2 = 0$ et par suite

$$\text{Approx. quasi linéaire : } \langle b^\dagger b \rangle \sim \frac{1}{2} (p + \sqrt{p^2 + 8}) \quad (VII-45)$$

Pour $p \gg 1$, on a $\langle b^+b \rangle \sim p$ (VII-46)

La figure 1 rassemble les résultats précédents. On y a porté pour $p > 0$ les résultats de l'approximation quasilineaire, pour $p < 0$ ceux de l'approximation gaussienne. Les comportements asymptotiques indiqués sont ceux donnés en (VII-40) et (VII-46). Les 2 approximations donnent respectivement 1.4 et 1 pour $\langle b^+b \rangle$ au seuil. En fait, la courbe exacte lombe entre ces 2 courbes, ce qui montre qu'au seuil $\langle b^+b \rangle$ est de l'ordre de 1, donc $\langle a^+a \rangle = \xi^2 \langle b^+b \rangle$ de l'ordre de $\sqrt{\Gamma/W}$ (voir VII-37)

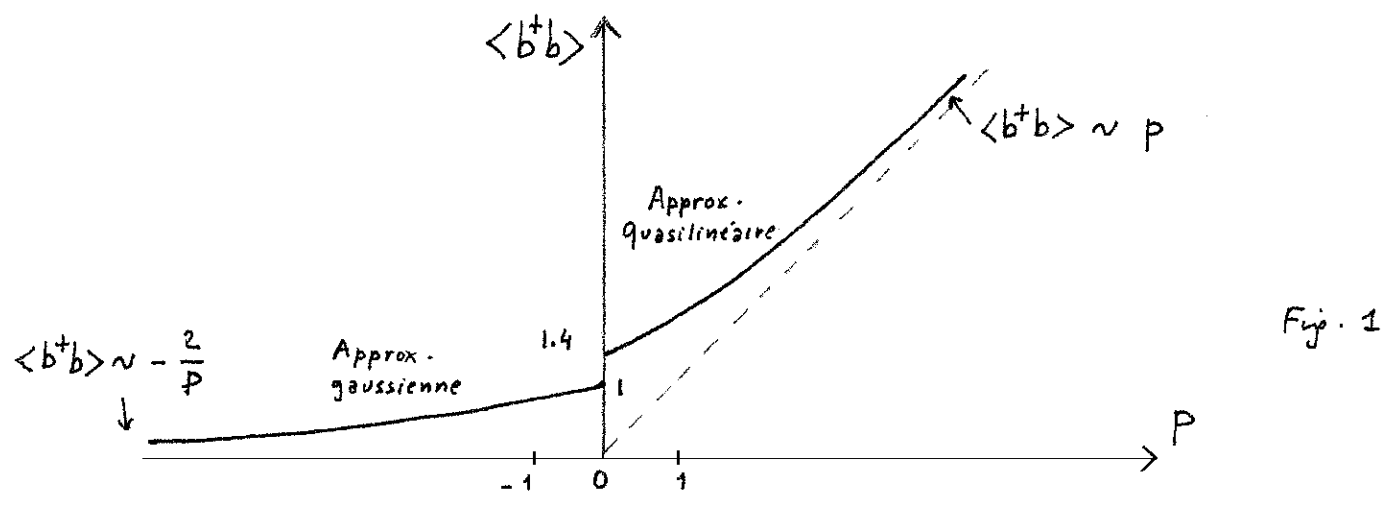


Fig. 1

Avec les variables choisies $\langle b^+b \rangle$ et p , la transition de la fig 1 a l'air très "douce". Si l'on revient aux "vraies" variables $\langle a^+a \rangle$ et $\frac{S_0 - S_{cr}}{S_0}$ il faut très dilater l'échelle des ordonnées et très contracter l'échelle des S_0 abscisses, ce qui donne la figure 2 bien typique d'une transition de phase: avant le seuil, il y a une divergence en $1/x$ (si $n_R \gg n_L$), après le seuil une croissance linéaire avec une pente extrêmement raide ($\frac{\Gamma}{W} \sim 10^{10}$)

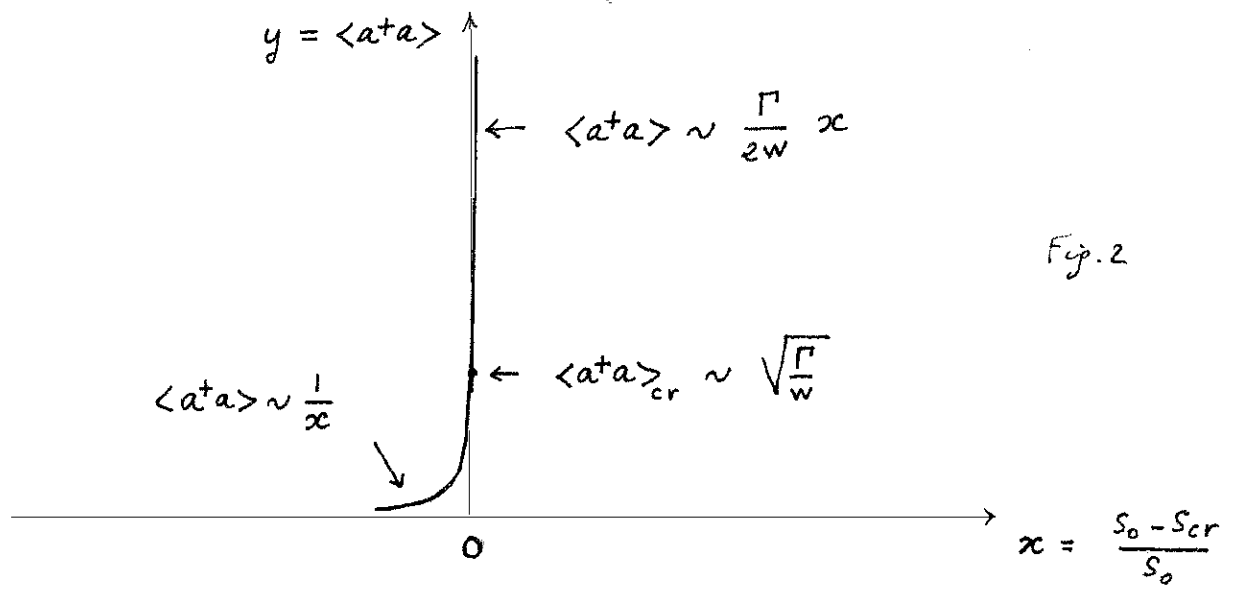


Fig. 2