

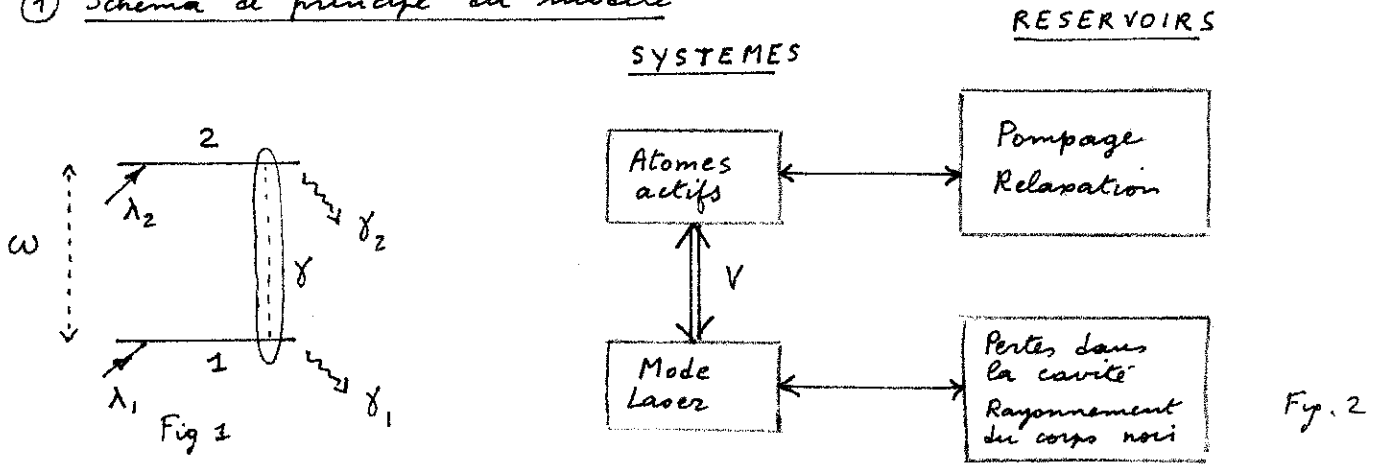
Etude simple des fluctuations  
dans les masers et lasers

But de ce chapitre

Utiliser les résultats des chapitres précédents (équations de Langevin - Mori, relations d'Einstein généralisées) pour étudier, dans le cadre d'un modèle simple, le bruit dans les masers et lasers. (La bibliographie est reprise à la fin du cours de cette année)

A. Equations de base du modèle

① Schema de principe du modèle



Le système considéré ici est constitué par un grand nombre "d'atomes actifs" à 2 niveaux (Fig 1) couplés à un mode d'une cavité laser par un couplage  $V$  (flèche verticale de la figure 2). Les atomes sont supposés immobiles. Chacun de ces sous-systèmes (atomes, mode laser) est en plus couplé à un réservoir (flèches horizontales de la figure 2). C'est ce couplage par exemple qui est responsable du pompage des atomes dans le niveau supérieur 2 (nécessaire à la réalisation d'une inversion de populations) ainsi que des processus de relaxation. De même, le mode de la cavité laser présente un certain amortissement et est alimenté par le rayonnement du corps noir.

Dans les cours précédents <sup>(on a montré)</sup> qui à tout processus de relaxation étaient associés des fluctuations, que le système étudié soit à l'équilibre ou hors d'équilibre. Donc les couplages système-réservoir de la figure 2, toujours présents ou indispensables (pompage) dans un oscillateur atomique, vont être responsables de fluctuations dans la sortie de l'oscillateur. <sup>C'est ce</sup> que nous nous proposons d'étudier dans ce chapitre.

② Hypothèses sur les forces de Langevin

- En l'absence de couplage atome-mode laser, il semble très raisonnable de supposer que les forces de Langevin agissant sur des atomes différents sont indépendantes (collisions avec des perturbateurs différents), de même que les forces de Langevin agissant sur les atomes et sur le mode laser.
- On pourrait croire que le couplage  $V$  introduit des corrélations

entre ces diverses forces. En fait, les temps de corrélation des diverses forces de Langevin sont très courts devant l'inverse de la période de Rabi qui caractérise l'interaction atome-laser, de sorte que l'interaction atome-laser n'a pas le temps de se manifester pendant ce temps de corrélation.

Nous supposons donc en présence de l'interaction  $V$ , les diverses forces de Langevin continuent à rester indépendantes et continuent à garder les mêmes caractéristiques (coefficients de diffusion notamment).

③ Equations de Langevin - Mori en l'absence de couplage atome-laser.

- Nous nous contentons de récupérer les équations établies au chapitre précédent [V-21 et V-25], en ajoutant un indice  $i$  pour repérer l'atome  $i$ , et en réintroduisant les termes d'évolution propre.

$$\begin{cases} \dot{n}_2^i = \lambda_2 - \gamma_2 n_2^i + f_{n_2}^i \\ \dot{n}_1^i = \lambda_1 - \gamma_1 n_1^i + f_{n_1}^i \\ \dot{\sigma}_-^i = (-i\omega - \gamma) \sigma_-^i + f_{\sigma_-}^i \\ \dot{\sigma}_+^i = (i\omega - \gamma) \sigma_+^i + f_{\sigma_+}^i \end{cases} \quad (VI-1) \quad \begin{cases} \dot{a} = -(i\omega + \kappa) a + F_a \\ \dot{a}^+ = (i\omega - \kappa) a^+ + F_{a^+} \end{cases} \quad (VI-2)$$

- Nous avons supposé la cavité accordée sur la fréquence atomique [la même fréquence  $\omega$  figure dans VI-1 et VI-2] de manière à simplifier le calcul qui suit. Il serait tout à fait possible de s'approcher de cette hypothèse, afin par exemple d'étudier les effets de "pulling".

④ Hamiltonien d'interaction atome-laser

- Cet hamiltonien  $V$  s'écrit

$$V = \sum_i g (e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_i} a \sigma_+^i + e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_i} a^+ \sigma_-^i) \quad (VI-3)$$

où  $\mathbf{x}_i$  est la position de l'atome  $i$ ,  $\mathbf{k}$  le vecteur d'onde du mode,  $g$  une constante de couplage.

-  $V$  décrit des processus où un photon est absorbé par l'atome qui monte de 1 à 2 (terme  $a \sigma_+^i$ ), ainsi que des processus où l'atome émet un photon en tombant de 2 à 1 (terme  $a^+ \sigma_-^i$ ). L'approximation du champ tournant permet de négliger des termes de la forme  $a \sigma_-^i$  ou  $a^+ \sigma_+^i$ .

- La constante de couplage  $g$  vaut  $g = d E_0$  (VI-4)

où  $d$  est le moment dipolaire de la transition 1-2 et  $E_0$  le "champ électrique d'un photon" (noté car il s'agit du carré du champ électrique correspondant à une énergie  $\hbar\omega$  dans la cavité).

Remarque

Dans les 2 premières équations (VI-1), nous avons négligé les transferts radiatifs ou collisionnels entre 1 et 2, en particulier les transferts par émission spontanée <sup>2→1</sup> (nous les supposons petits devant les transferts vers les autres niveaux). Comme nous traitons quantiquement l'interaction entre l'atome et le mode laser, nous nous écarterons plus loin des termes qui

décrivent des transferts  $2 \rightarrow 1$  par émission spontanée dans le mode laser. Il peut paraître surprenant de tenir compte de l'émission spontanée dans le mode laser (grâce à l'hamiltonien  $V$ ) et de négliger l'émission spontanée dans les autres modes pour la transition  $2-1$ . En fait, l'émission spontanée dans le mode laser fait apparaître des photons dans le mode laser qui représentent, comme nous le verrons plus loin, une source très importante de bruit. Il est donc indispensable d'en tenir compte, alors que l'émission spontanée dans les autres modes (pour la transition  $2 \rightarrow 1$ ) ne se manifeste qu'indirectement sur le bruit, par une modification des coefficients de diffusion, supposée ici négligeable.

### ⑤ Equations de Langevin - Mori en présence du couplage atome - laser

- Il suffit d'ajouter à chaque équation VI-1 ou VI-2 le commutateur correspondant avec  $V$  [multiplié par  $-i$ ] :

$$\begin{cases} \dot{a}^+ = (i\omega - \kappa) a^+ + ig \sum_i e^{ikx_i} \sigma_+^i + F_{a^+} \\ \dot{\sigma}_+^i = (i\omega - \gamma) \sigma_+^i - ig e^{-ikx_i} a^+ (n_2^i - n_1^i) + f_{\sigma_+}^i \\ \dot{n}_2^i = \lambda_2 - \gamma_2 n_2^i + ig e^{-ikx_i} a^+ \sigma_-^i - ig e^{ikx_i} a \sigma_+^i + f_{n_2}^i \end{cases} \quad (VI-5)$$

(et des équations analogues pour  $a$ ,  $n_1^i$ )

- On peut simplifier ces équations au moyen du changement de variables

$$\begin{cases} a^+ = \tilde{a}^+ e^{i\omega t} \\ a = \tilde{a} e^{-i\omega t} \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_+^i = \tilde{\sigma}_+^i e^{i(\omega t - kx_i)} \\ \sigma_-^i = \tilde{\sigma}_-^i e^{-i(\omega t - kx_i)} \end{cases} \quad (VI-6)$$

On obtient alors

$$\begin{cases} \dot{\tilde{a}}^+ = -\kappa \tilde{a}^+ + ig \sum_i \tilde{\sigma}_+^i + \tilde{F}_{a^+} \\ \dot{\tilde{\sigma}}_+^i = -\gamma \tilde{\sigma}_+^i - ig \tilde{a}^+ (n_2^i - n_1^i) + \tilde{f}_{\sigma_+}^i \\ \dot{n}_2^i = \lambda_2 - \gamma_2 n_2^i + ig (\tilde{a}^+ \tilde{\sigma}_-^i - \tilde{a} \tilde{\sigma}_+^i) + f_{n_2}^i \end{cases} \quad (VI-7)$$

(et des équations analogues pour  $\tilde{a}$  et  $n_1^i$ ) avec

$$\begin{cases} F_{a^+} = \tilde{F}_{a^+} e^{i\omega t} \\ F_a = \tilde{F}_a e^{-i\omega t} \end{cases} \quad \begin{cases} f_{\sigma_+}^i = \tilde{f}_{\sigma_+}^i e^{i(\omega t - kx_i)} \\ f_{\sigma_-}^i = \tilde{f}_{\sigma_-}^i e^{-i(\omega t - kx_i)} \end{cases} \quad (VI-8)$$

On vérifie aisément à partir de (V-24), (V-29), (VI-6) et (VI-8) que les tableaux de coefficients de diffusion restent les mêmes pour les nouvelles forces (avec  $v$ ) et les nouvelles variables [les exponentielles  $e^{\pm i\omega t}$  et  $e^{\pm i(\omega t - kx_i)}$  s'éliminent].

### ⑥ Variation atomiques et forces de Langevin atomiques collectives

- Posons

$$\begin{cases} N_1 = \sum_i n_1^i \\ N_2 = \sum_i n_2^i \\ S_+ = \sum_i \tilde{\sigma}_+^i \\ S_- = \sum_i \tilde{\sigma}_-^i \end{cases} \quad \begin{cases} F_{S_+} = \sum_i \tilde{f}_{\sigma_+}^i \\ F_{S_-} = \sum_i \tilde{f}_{\sigma_-}^i \\ \Lambda_1 = N \lambda_1 \\ \Lambda_2 = N \lambda_2 \end{cases} \quad (VI-9)$$

- Les équations (VI-7) [où pour simplifier on ne met plus  $\sim$  sur  $a$  et  $a^\dagger$ ] deviennent alors :

$\dot{a}^\dagger = -\kappa a^\dagger + ig S_+ + F_{a^\dagger}$	(VI-10-1)	
$\dot{a} = -\kappa a - ig S_- + F_a$	(VI-10-2)	
$\dot{S}_+ = -\gamma S_+ - ig a^\dagger (N_2 - N_1) + F_{S_+}$	(VI-10-3)	(VI-10)
$\dot{S}_- = -\gamma S_- + ig a (N_2 - N_1) + F_{S_-}$	(VI-10-4)	
$\dot{N}_2 = \Lambda_2 - \gamma_2 N_2 + ig (a^\dagger S_- - a S_+) + F_{N_2}$	(VI-10-5)	
$\dot{N}_1 = \Lambda_1 - \gamma_1 N_1 - ig (a^\dagger S_- - a S_+) + F_{N_1}$	(VI-10-6)	

- Comme les forces de Langevin des différents atomes sont indépendantes, on déduit de (V-24) et (VI-9) le tableau suivant de coefficients de diffusion

$2D_{\alpha\beta} =$

$\alpha \backslash \beta$	$N_1$	$N_2$	$S_-$	$S_+$	
$N_1$	$\langle \Lambda_1 \rangle + \gamma_1 \langle N_1 \rangle$	0	$\gamma_1 \langle S_- \rangle$	0	
$N_2$	0	$\langle \Lambda_2 \rangle + \gamma_2 \langle N_2 \rangle$	0	$\gamma_2 \langle S_+ \rangle$	
$S_-$	0	$\gamma_2 \langle S_- \rangle$	0	$\langle \Lambda_1 \rangle + (2\gamma - \gamma_1) \langle N_1 \rangle$	
$S_+$	$\gamma_1 \langle S_+ \rangle$	0	$\langle \Lambda_2 \rangle + (2\gamma - \gamma_2) \langle N_2 \rangle$	0	(VI-11)

le tableau (V-29) demeure valable pour  $F_a$  et  $F_{a^\dagger}$ . Enfin, tous les coefficients de diffusion "croisés" (laser - atome) sont nuls :

$$D_{0+a} = D_{a^\dagger N_2} = \dots = 0$$

Remarque

Dans le chapitre précédent, nous avons montré dans le cadre d'un modèle entièrement soluble, que les forces de Langevin  $F_{a^\dagger}$  et  $F_a$  avaient des moments gaussiens. Nous avons indiqué que cette propriété demeure valable pour d'autres types de réservoirs et est surtout <sup>liée</sup> à la linéarité de l'oscillateur harmonique.

Par contre, pour un système à 2 niveaux, les forces de Langevin  $f^i$  ne sont certainement pas gaussiennes. Si l'on se reporte à VI-10, on voit cependant que ce n'est pas  $f^i$  qui interviennent mais  $F = \sum f^i$ . S'il y a <sup>un très grand</sup> nombre d'atomes actifs, les forces de Langevin <sup>apparaissant dans</sup> (VI-10) résultent de la superposition d'un très grand nombre de forces de Langevin indépendantes. On peut donc s'attendre que, pour  $N$  suffisamment grand, les  $F$  soient gaussiens, même si les  $f^i$  ne le sont pas (Théorème de la limite centrale).

① - Introduction . Simplifications

- le but de ce § est de donner une vue d'ensemble du problème, de dégager les paramètres physiques importants, et de faire comprendre l'importance des fluctuations associées aux Jones de Langevin.
- Dans le but de simplifier au maximum la discussion, les divers opérateurs  $a^+$ ,  $a$ ,  $S_{\pm}$ ,  $N_1$ ,  $N_2$  seront traités comme des nombres commutant entre eux. Un calcul quantique plus rigoureux sera repris au § C.
- Dans le même souci de simplification, on supposera

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \Gamma \quad (\text{VI-12})$$

( $\Gamma$  pouvant être toutefois différent de  $\gamma$ ). Une telle hypothèse permet, par soustraction des 2 dernières équations VI-10, d'obtenir une équation d'évolution ne faisant intervenir que la différence de populations  $N_2 - N_1$  que nous appellerons désormais  $S$

$$S = N_2 - N_1 \quad (\text{VI-13})$$

$$\dot{S} = \Gamma (S_0 - S) + 2ig(a^+ S_- - a S_+) + F_S \quad (\text{VI-14})$$

avec  $S_0 = \frac{\Lambda_2 - \Lambda_1}{\Gamma} \quad (\text{VI-15})$

et  $F_S = F_{N_2} - F_{N_1} \quad (\text{VI-16})$

$S_0$  est l'inversion de population en l'absence de couplage atome - laser,  $F_S$  est la force de Langevin sur la différence de population  $S$ .

Enfin, nous supposons que seul le niveau 2 est alimenté

$$\Lambda_1 = 0 \quad (\text{VI-17})$$

(le cas  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ ,  $\Lambda_1 \neq 0$  ne présente aucune difficulté de principe mais complique les calculs sans introduire d'idée physique nouvelle).

② Etude du régime d'oscillation en l'absence de fluctuations.

Essayons de comprendre tout d'abord ce qui se passe en l'absence de fluctuations. Supprimons donc toutes les forces de Langevin  $F$  des équations VI-10 et VI-14. Nous les réintroduisons ensuite au § 3.

a) Régime stationnaire.

- Reprenons tout d'abord aux équations précédentes, celle qui donne l'évolution du nombre de photons  $a^+a$  (énergie du mode) et que l'on obtient en ajoutant (VI-10-1) multiplié par  $a$  et (VI-10-2) multiplié par  $a^+$

$$(a^+a) = -2K(a^+a) - ig(a^+ S_- - a S_+) \quad (\text{VI-18})$$

- En régime stationnaire, on tire de (VI-10-3) et (VI-10-4)

$$S_+ = -\frac{ig}{\gamma} a^\dagger S \quad S_- = \frac{ig}{\gamma} a S \quad (VI-19)$$

ce qui donne 
$$ig(a^\dagger S_- - a S_+) = -\frac{2g^2}{\gamma} a^\dagger a S \quad (VI-20)$$

Nous voyons ainsi apparaître un paramètre  $\frac{2g^2}{\gamma}$  que nous noterons  $w$

$$w = \frac{2g^2}{\gamma} \quad (VI-21)$$

qui a les dimensions d'un taux de transition et qui jouera un rôle très important dans toute la suite.

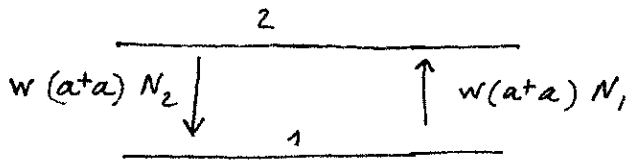
- Interprétation physique de  $w$

Si l'on retourne à l'expression (VI-4) de  $g$ ,  $g$  est le couplage associé à 1 photon (fréquence de Rabi dans le champ d'un photon).  $1/\gamma$  a la signification physique d'une "densité d'états" associée à la largeur homogène de la transition 1-2. L'expression (VI-21) donne donc la probabilité de transition par unité de temps  $1 \rightarrow 2$  ou  $2 \rightarrow 1$  (calculée par la règle d'or de Fermi) associée à 1 photon.

On peut encore se convaincre de cette interprétation en repartant de l'équation (VI-18) réécrite en régime stationnaire (au moyen de VI-20 et VI-21):

$$(a^\dagger a) = 0 = -2\kappa(a^\dagger a) + w(a^\dagger a)(N_2 - N_1) \quad (VI-22)$$

Cette équation exprime qu'en régime stationnaire  $a^\dagger a$  ne varie plus par suite d'une compensation entre les pertes de la cavité (1<sup>er</sup> terme,  $-2\kappa a^\dagger a$ , de VI-22) et le gain résultant de la différence entre processus d'émission stimulée ( $w a^\dagger a N_2$ ) et processus d'absorption ( $-w a^\dagger a N_1$ ).  $w$  est donc bien le taux de transition pour 1 photon



- Différence de population stationnaire

En régime stationnaire, l'équation (VI-14) s'écrit, compte tenu de (VI-20):

$$\dot{S} = 0 = \Gamma S_0 - \Gamma S - 2w(a^\dagger a) S \quad (VI-23)$$

Une telle équation exprime l'équilibre entre le pompage (1<sup>er</sup> terme), la relaxation (2<sup>er</sup> terme) et la saturation (3<sup>em</sup> terme) associés aux processus d'absorption et d'émission induite [le facteur 2 des derniers terme provient du fait que toute transition élémentaire d'absorption ou d'émission induite fait varier de 2 unités  $N_2 - N_1$ ]. On déduit de VI-23 que

$$S = \frac{S_0}{1 + \frac{2w}{\Gamma} a^\dagger a} = S_0 \left( 1 - \frac{2w}{\Gamma} a^\dagger a + \dots \right) \quad (VI-24)$$

- Seuil d'oscillation

Le coefficient de  $a^\dagger a$  dans (VI-22) est  $-2\kappa + wS$ . Considérons alors l'inversion critique  $S_{cr}$  définie par

$$S_{cr} = \frac{2\kappa}{w} \quad (VI-25)$$

Si  $S_0 < S_{cr}$ , comme d'après (VI-24)  $S \leq S_0$ , le coefficient de  $a+a$  dans (VI-22) est toujours négatif et ne peut s'annuler. La seule solution de (VI-22) est alors  $a+a=0$ : Pas d'oscillation.

Si par contre  $S_0 > S_{cr}$ , ce coefficient  $-2\kappa + WS$  peut s'annuler pour une valeur de  $a+a$  calculable à partir de l'expression VI-24 de  $S$

$$a+a = \frac{\Gamma}{4\kappa} \left[ S_0 - \frac{2\kappa}{W} \right] = \frac{\Gamma}{4\kappa} [S_0 - S_{cr}] \quad (VI-26)$$

$S_{cr}$  est donc le seuil d'oscillation.

b) Ordres de grandeurs

- Considérons un laser à gaz (longueur  $\sim 1$  m, Puissance  $\sim 10$  mW)  
 largeur spectrale  $\kappa$  des modes de la cavité  $\sim 10^{-2}$  x intervalle entre ordres

↳  $\kappa \sim 1$  MHz (VI-27)

- Largeurs atomiques  $\gamma, \Gamma$  (Pression  $\sim 3$  Torr)

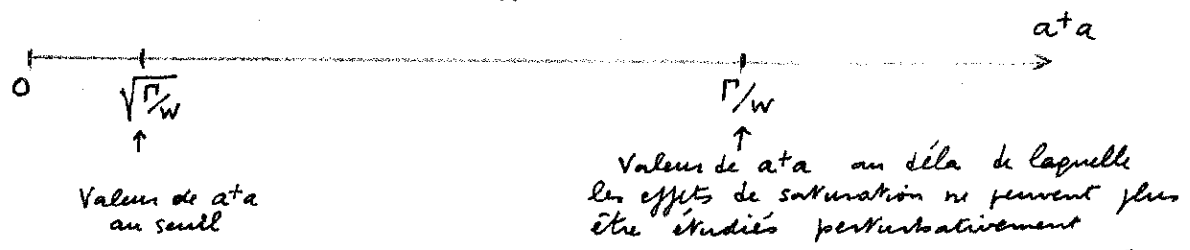
$$\gamma, \Gamma \sim 100$$
 MHz (VI-28)

- Temps de transition  $w$  associé à 1 photon

Pour l'estimer, on commence à évaluer (à partir de la puissance de sortie et du coefficient de réflexion des miroirs ( $\sim 99/100$ )) le nombre de photons dans la cavité que l'on trouve  $a+a \sim 10^{10}$  et on écrit que, pour un laser bien au dessus du seuil,  $wa+a \sim \Gamma$  ce qui donne

$$w \sim 10^{-10} \Gamma \sim 10^{-2}$$
 Hz (VI-29)

- Plus loin, nous verrons, en au seuil, le nombre de photons est de l'ordre de  $\sqrt{\Gamma/w} \sim 10^5$  (il faudra faire intervenir le bruit associé à l'émission spontanée dans le mode). Comme  $\sqrt{\Gamma/w} \ll \Gamma/w$  on voit qu'on peut étudier une plage très large de part et d'autre du seuil en gardant des effets de saturation (caractérisés par  $2wa+a/\Gamma$ ) suffisamment petits pour qu'on puisse utiliser des développements limités du type de VI-24



c) Atteinte de l'équilibre

Fig. 3

Equation d'évolution de a

- Dérivées (VI-10-2): On obtient en utilisant l'expression (VI-10-4) de  $\dot{S}_-$ :

$$\ddot{a} + \kappa \dot{a} = -ig \dot{S}_- = ig\gamma S_- + g^2 a S \quad (VI-30)$$

- Il suffit alors d'utiliser VI-10-2 pour exprimer  $S_-$  en fonction de  $\dot{a}$  et  $a$

On obtient ainsi  $\ddot{a} + (\kappa + \gamma) \dot{a} + (\kappa\gamma - g^2 S) a = 0 \quad (VI-31)$

c-a-d encore

$$\boxed{\ddot{a} + (\kappa + \gamma) \dot{a} + \frac{\gamma W}{2} (S_{cr} - S) a = 0} \quad (VI-32)$$

Approximation adiabatique pour S

L'idée physique est que les temps d'évolution des variables atomiques  $\gamma^{-1}$ ,  $\Gamma^{-1}$  ( $\sim 10^{-8}$  sec) sont beaucoup plus courts que les temps d'évolution du rayonnement qui partent de  $\kappa^{-1}$  ( $\sim 10^{-6}$  sec) et s'allongent considérablement quand on s'approche du seuil et qu'on le dépasse. On peut donc dire que les variables atomiques suivent instantanément l'évolution lente du champ.

Mathématiquement, on peut donc, au lieu de résoudre les équations d'évolution couplées de  $a$  et  $S$ , remplacer dans VI-32  $S$  par sa valeur stationnaire (VI-24) dans le champ correspondant à  $a$ , ce qui donne:

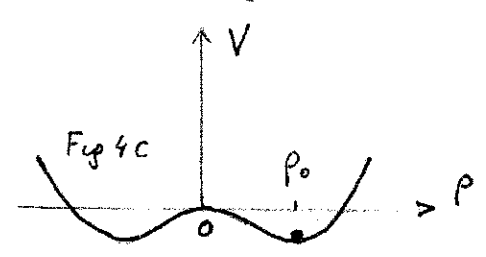
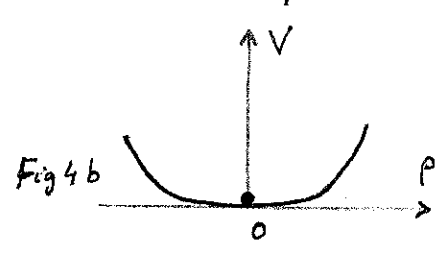
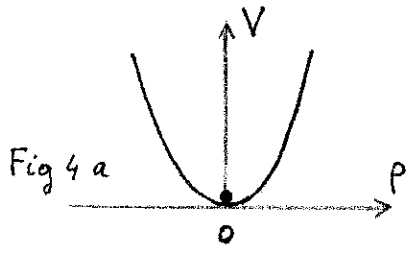
$$\ddot{a} + (k + \gamma)\dot{a} + (A + B a^2)a = 0 \tag{VI-33}$$

avec 
$$A = \frac{\gamma W}{2} (S_{cr} - S_0) \quad B = \frac{\gamma W^2}{\Gamma} S_0 \tag{VI-34}$$

Problème mécanique équivalent

L'équation (VI-33) a la même structure que celle décrivant le mouvement d'une particule dans un plan à 2 dimensions. Si l'on pose  $a = x + iy$ ,  $a^*a = x^2 + y^2 = \rho^2$ , l'équation (VI-33) exprime que cette particule "fictive" est soumise à une force de friction (coefficient  $k + \gamma$ ) et à un potentiel  $V(\rho)$  ne dépendant que de  $\rho$  (et non de l'angle polaire  $\theta$ ):

$$V(\rho) = \frac{A}{2} \rho^2 + \frac{B}{4} \rho^4 \tag{VI-35}$$



Supposons tout d'abord le système très au dessous du seuil ( $S_0 \ll S_{cr}$ ). D'après (VI-34),  $A$  est positif,  $B a^2$  est très petit devant  $A$ . On a alors le potentiel parabolique de la figure 4a. La particule tend vers sa position d'équilibre en  $\rho = 0$  avec une constante de temps  $\sim \kappa^{-1}$ .

Quand  $S_0$  augmente, tout en restant inférieur à  $S_{cr}$ , la courbure en 0 diminue et le temps d'atteinte de l'équilibre est de plus en plus long car la force de rappel est de plus en plus faible. Pour  $S_0 = S_{cr}$  (Fig 4.b) le potentiel est très plat en 0 ( $\sim \rho^4$ ).

Quand  $S_0$  dépasse  $S_{cr}$ ,  $A$  devient négatif, et le terme en  $\rho^2$ , qui domine pour  $\rho$  très petit, donne à  $V(\rho)$  une courbure négative. Si ce terme était tout seul, le système serait instable et la particule irait à l'infini. Le terme en  $\rho^4$ , qui est toujours positif, empêche une telle divergence et fait apparaître un minimum pour une valeur finie  $\rho_0$  de  $\rho$  (Fig 4.c). En fait, le potentiel a la symétrie cylindrique et il y a une infinité de positions d'équilibre se déduisant les unes des autres par rotations autour de l'axe des ordonnées. Au voisinage d'une position d'équilibre la particule est soumise à une force de rappel, si elle se déplace le long de l'axe  $\rho$ , mais peut se déplacer librement dans le sens perpendiculaire.

(On notera l'analogie avec une transition de phase et une brisure de symétrie).



### ③ Importance des fluctuations

Si l'on ne néglige plus les forces de Langevin dans (VI-10), il va apparaître au second membre de VI-33 des forces fluctuantes, qui font intervenir à la fois les forces de Langevin atomiques et celles du rayonnement (en toute rigueur, nous verrons également au § suivant que les coefficients A et B sont également légèrement modifiés).

On peut alors aisément deviner quel va être l'effet de ces forces fluctuantes

#### a) Au dessous du seuil

##### - Emission de lumière au dessous du seuil

La particule va fluctuer autour de sa position d'équilibre représentée sur la fig. 4a. Il s'ensuit que  $\langle a^2 \rangle = \rho^2$  va alors avoir une valeur moyenne non nulle, ce qui signifie que le tube laser va émettre de la lumière même au dessous du seuil. Cette lumière provient de l'émission spontanée ou du rayonnement du corps noir.

##### - Affinement de la raie quand on s'approche du seuil

Les fluctuations s'amortissent de plus en plus lentement quand on se rapproche du seuil par suite de la diminution de la courbure en 0. La raie émise va donc s'affiner

##### - Approximation linéaire

Le terme non linéaire  $B \langle a^2 \rangle a$  étant petit au dessous du seuil, on peut "linéariser"  $(A + B \langle a^2 \rangle) a$  en remplaçant  $B \langle a^2 \rangle$  par sa valeur moyenne  $B \langle a^2 \rangle$

$$(A + B \langle a^2 \rangle) a \rightarrow (A + B \langle a^2 \rangle) a \quad (VI-35)$$

##### - Allure de la distribution de probabilité du champ électrique

C'est, à un coefficient près, la distribution de probabilité de  $a$ . Par analogie avec le mouvement Brownien d'un oscillateur harmonique soumis à des forces de Langevin ponctuelles, on pense que cette distribution de probabilité a une allure gaussienne, centrée en 0, avec une largeur qui croît quand on se rapproche du seuil, puisque la diminution de la courbure du potentiel permet aux forces fluctuantes d'écartes de plus en plus la particule de sa position d'équilibre.

#### b) Au dessus du seuil

Notons tout d'abord que ce sont les forces fluctuantes qui font quitter le point 0 (équilibre instable) à la particule pour l'amener à sa nouvelle position d'équilibre.

##### - Stabilisation en amplitude

Le minimum de  $V$  le long de l'axe  $\rho$  stabilise l'amplitude du laser autour de la valeur  $\sqrt{\rho_0}$  (fig 4c). L'amplitude fluctue légèrement autour de  $\sqrt{\rho_0}$ .

- Diffusion de phase

Le mouvement tangentiel étant libre, la phase de l'onde laser diffuse. Comme l'amplitude est stabilisée, la largeur de raie d'un laser au dessus du seuil est donc essentiellement déterminée par la diffusion de phase.

Quand l'inversion  $S_0$  augmente, il en est de même de la puissance de sortie, c-à-d aussi du rayon  $\rho_0$  de la fig 4c. Le temps de diffusion de la phase augmente donc (la particule doit diffuser davantage sur un cercle de rayon  $\rho_0$  plus grand pour tourner du même angle). La largeur de raie d'un laser diminue donc quand la puissance augmente.

- Approximation quasi-linéaire

Au lieu de linéariser autour de  $p=0$  comme plus haut, on peut linéariser autour de la position d'équilibre  $\rho_0$

$$(A + B\rho_0)a \rightarrow (A + B\rho_0)a \quad (VI-36)$$

- Allure de la distribution de probabilité du champ électrique

Isotrope (indépendante de  $\theta$ ) - Gaussienne autour de  $\rho_0$  en fonction de  $p$ .

Cette distribution se rapproche plus de celle correspondant à un état cohérent (de phase équirépartie entre 0 et  $2\pi$ ).

c) Voisinage immédiat du seuil (au dessus ou au dessous)

La largeur de la distribution de probabilité de  $a$  devient si grande qu'on ne peut plus négliger les variations de la courbure de  $V(p)$  sur la largeur de cette distribution : On ne peut plus faire d'approximations linéaire ou quasi-linéaire.

Il faut alors établir l'équation d'évolution de la densité de probabilité.

En négligeant dans (VI-34)  $\dot{a}$  devant  $(\kappa + \gamma)a$  [au voisinage du seuil, les temps d'évolution du champ sont beaucoup plus longs que  $\kappa^{-1}$  et  $\gamma^{-1}$ ], et en rajoutant au second membre les forces fluctuantes, on voit que l'on doit étudier une équation de Langevin non-linéaire. Il faut alors établir l'équation de Fokker-Planck non-linéaire correspondante et résoudre cette équation.