

L'émission spontanée d'un système à 2 niveaux irradié par un laser résonnant intense (suite)

D. Evolution des populations de l'atome habillé.

Dans ce §, on explicite l'équation pilote (VIII-21) pour les populations des niveaux perturbés $|i, n\rangle$. On interprète physiquement ces équations, on les résout et on en extrait un certain nombre de résultats relatifs aux photons de fluorescence.

① Equations d'évolution - Interprétation physique.

Etablissement des équations d'évolution

- Soit
$$\pi_{i,n}(t) = \langle i, n | \rho(t) | i, n \rangle \quad (IX-1)$$
 la population du niveau perturbé $|i, n\rangle$ de l'atome habillé.

- Supposons que l'approximation des vitesses de variations indépendantes soit valable (condition VIII-18). On déduit de (VIII-21) que

$$\frac{d}{dt} \pi_{i,n}(t) = -\frac{1}{2} \langle i, n | \{ D^+ D^-, \sigma(t) \}_+ | i, n \rangle + \langle i, n | D^- \sigma(t) D^+ | i, n \rangle \quad (IX-2)$$

- Supposons que l'approximation séculaire soit valable (condition VIII-22). Dans le 2^{ème} membre de (IX-2), on peut négliger les éléments de $\sigma(t)$ autres que des populations.

- Termes d'amortissement (1^{er} terme du 2^{ème} membre de IX-2). Ils s'écrivent, compte tenu de l'approximation séculaire :

$$\begin{aligned} -\pi_{i,n}(t) \langle i, n | D^+ D^- | i, n \rangle &= -\pi_{i,n}(t) \sum_{j, n'} |\langle j, n' | D^- | i, n \rangle|^2 \\ &= -\pi_{i,n}(t) \sum_j |\langle j, n-1 | D^- | i, n \rangle|^2 = -\pi_{i,n}(t) \sum_j d_{ji}^2 \end{aligned} \quad (IX-3)$$

car, d'après les résultats du § B2 :

$$\langle j, n' | D^- | i, n \rangle = S_{n', n-1} \langle j, n' | D | i, n \rangle = S_{n', n-1} d_{ji} \quad (IX-4)$$

- Termes de transfert (2^{ème} terme du 2^{ème} membre de IX-2). Des calculs analogues aux précédents donnent :

$$\sum_{l, n'} \langle i, n | D^- | l, n' \rangle \pi_{l, n'}(t) \langle l, n' | D^+ | i, n \rangle = \sum_l \pi_{l, n+1}(t) d_{il}^2 \quad (IX-5)$$

- Finalement, si l'on pose :

$$d_{ji}^2 = \Gamma_{ji} \quad (IX-6)$$

$$\Gamma_i = \sum_j \Gamma_{ji} \quad (IX-7)$$

il vient :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \pi_{i,n}(t) = -\Gamma_i \pi_{i,n}(t) + \sum_l \Gamma_{il} \pi_{l, n+1}(t)} \quad (IX-8)$$

Interprétation physique

Γ_{ji} peut être interprété comme un temps de transition par unité de temps de $|i, n\rangle$ vers $|j, n-1\rangle$ (notez l'ordre de i et j dans Γ_{ji} qui correspond à $\Gamma_{j \leftarrow i}$)

l'équation (IX-8) exprime que la population du niveau $|i, n\rangle$

décroit à cause de transitions qui se produisent de $|i, n\rangle$ vers des états inférieurs (appartenant à E_{n-1}), et croît à cause de transitions qui viennent alimenter $|i, n\rangle$ à partir d'états supérieurs $|i, n+1\rangle$ (appartenant à E_{n+1}).

Donc interprétation très simple en termes de temps de transition.

Remarques

(i) Si $\omega_0 - \omega_L$ est suffisamment grand pour ne pas être négligeable devant ω_0 et ω_L , l'approximation des vitesses de variations indépendantes n'est plus valable alors que l'approximation séculaire le demeure.

Il faut alors tenir compte de la variation en ω^3 des temps de transfert Γ_{ij} . Dans l'équation IX-8, ils sont tous pris proportionnels à ω_0^3 (temps d'immersion spontané de l'atome nu). Compte tenu des fréquences des transitions $|i, n\rangle \rightarrow |j, n-1\rangle$ (cf. pp. 4 page VIII-3) il faut donc opérer la substitution :

$$\Gamma_{11} \rightarrow d_{11}^2 \left(\frac{\omega_L}{\omega_0}\right)^3 \quad \Gamma_{22} \rightarrow d_{22}^2 \left(\frac{\omega_L}{\omega_0}\right)^3 \quad \Gamma_{21} \rightarrow d_{21}^2 \quad \Gamma_{12} \rightarrow d_{12}^2 \left(\frac{2\omega_L - \omega_0}{\omega_0}\right)^3 \quad (\text{IX-6 bis})$$

(ii) En conservant tous les termes au 2^{ème} membre de (IX-2) on obtiendrait aisément les termes "non-séculaires". On verrait ainsi que l'évolution de $\Pi_{12}(t)$ est couplée à $\langle 1, n | \sigma | 2, n \rangle$, $\langle 2, n | \sigma | 1, n \rangle$, $\langle 1, n+1 | \sigma | 2, n+1 \rangle$, $\langle 2, n+1 | \sigma | 1, n+1 \rangle$ avec des coefficients qui sont simplement des produits d'éléments de matrice de D .

(iii) Les d_{ij} , Γ_{ij} ... introduits plus haut dépendent en toute rigueur de n . Mais nous avons déjà dit à plusieurs reprises que l'on peut négliger les variations de \sqrt{n} , et par suite celles de d_{ij} , Γ_{ij} ... quand n varie dans un intervalle \sqrt{n} autour de \bar{n} . Les d_{ij} , Γ_{ij} ... sont donc de notation abrégée pour $d_{ij}(\bar{n})$, $\Gamma_{ij}(\bar{n})$... c-à-d pour $d_{ij}(\omega, \delta)$, $\Gamma_{ij}(\omega, \delta)$...

② Conditions initiales

Entrée soudaine

- A l'instant initial 0, on suppose que l'atome entre soudainement dans le faisceau laser. Par exemple, dans des expériences de jet, on suppose que, au moyen de caches convenablement disposés, l'atome voit l'intensité laser passer brusquement de 0 à une valeur constante.

- Etat initial de l'atome $|\Psi_A\rangle$: en général l'état fondamental

$$|\Psi_A\rangle = |a\rangle \quad (\text{IX-9-a})$$

- Etat initial du champ : état quadratique

$$|\Psi_R\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \quad (\text{IX-9-b})$$

On posera

$$P_0(n) = |c_n|^2 \quad (\text{IX-10})$$

$P_0(n)$ est la ~~probabilité~~ distribution du nombre de photons dans le mode laser (distribution quadratique centrée en \bar{n} et de largeur $\sqrt{\bar{n}}$ très grande).

- Etat initial du système global

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_n c_n |a, n\rangle \quad (\text{IX-11})$$

$$\Pi_{i,n}(0) = |\langle i,n | \Psi(0) \rangle|^2 = |c_{n+1}|^2 |\langle i,n | a, n+1 \rangle|^2 \quad (IX-12)$$

Dans (IX-12), $|c_{n+1}|^2 = p_0(n+1)$ peut être remplacé par $p_0(n)$. D'autre part, $\langle i,n | a, n+1 \rangle$ peut être calculé aisément à partir du développement des états perturbés sur les états non perturbés (cf fig 4 page VIII-3)

On obtient ainsi :

$$\Pi_{i,n}(0) = p_0(n) \Pi_i(0) \quad (IX-13)$$

avec $\Pi_1(0) = \sin^2 \varphi \quad \Pi_2(0) = \cos^2 \varphi \quad (IX-14)$

③ Etude d'un cas entièrement soluble

a) Hypothèses.

- On se suppose placé à résonance. Donc, d'après (VIII-1) et (VIII-2)

$$\cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi = 1/2 \quad (IX-15)$$

et par suite, d'après (IX-6), (IX-7) et (VIII-5) :

$$\begin{cases} \Gamma_{11} = \Gamma_{22} = \Gamma_{12} = \Gamma_{21} = \Gamma/4 \\ \Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma/2 \end{cases} \quad (IX-16)$$

- les équations d'évolution des populations s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \Pi_{1,n} = -\frac{\Gamma}{2} \Pi_{1,n} + \frac{\Gamma}{4} \Pi_{1,n+1} + \frac{\Gamma}{4} \Pi_{2,n+1} \\ \frac{d}{dt} \Pi_{2,n} = -\frac{\Gamma}{2} \Pi_{2,n} + \frac{\Gamma}{4} \Pi_{1,n+1} + \frac{\Gamma}{4} \Pi_{2,n+1} \end{cases} \quad (IX-17)$$

Elles sont visiblement invariantes par échange de 1 et 2. Comme d'autre part, d'après (IX-14) et (IX-15), les conditions initiales sont symétriques

$$\Pi_{1,n}(0) = \Pi_{2,n}(0) = \frac{1}{2} p_0(n) \quad (IX-18)$$

on en déduit que la solution de (IX-17) reste symétrique et nous poserons

$$\Pi_{1,n}(t) = \Pi_{2,n}(t) = \frac{1}{2} \Pi_n(t) \quad (IX-19)$$

avec, compte tenu de (IX-18)

$$\Pi_n(0) = p_0(n) \quad (IX-20)$$

$\Pi_n(t)$ représente la population totale de la multiplicité E_n à l'instant t .

b) Solution des équations d'évolution.

- Reportant (IX-19) dans (IX-17) on obtient l'équation suivante pour $\Pi_n(t)$ (équation aux différences finies) :

$$\frac{d}{dt} \Pi_n(t) = \frac{\Gamma}{2} [\Pi_{n+1}(t) - \Pi_n(t)] \quad (IX-21)$$

- La solution de cette équation correspondant à la condition initiale :

$$\Pi_{n'}(0) = \delta_{nn'} \quad (IX-22)$$

est très simple. On vérifie par substitution directe qu'elle s'écrit :

$$\begin{cases} \Pi_{n-k}(t) = e^{-\Gamma t/2} \frac{(\Gamma t/2)^k}{k!} \text{ pour } k \geq 0 \\ = 0 \text{ pour } k < 0 \end{cases} \quad (IX-23)$$

- Comme l'équation (IX-21) est linéaire, on en déduit immédiatement ^(IX-4) la solution de (IX-21) correspondant à la condition initiale (IX-20),

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_0(n+k) e^{-\Gamma t/2} \frac{(\Gamma t/2)^k}{k!} \quad (\text{IX-24})$$

c) Discussion physique.

(i) Distribution du nombre de photons émis au bout d'un temps T.

Quelle est la loi de distribution $P_k(T)$ du nombre de photons émis au bout d'un temps T (sans rien préciser en plus sur la fréquence de ces photons)?

Supposons d'abord que l'atome habillé parte à $t=0$ de la multiplicité E_n (conditions initiales IX-22). S'il a émis k photons au bout d'un temps T, c'est en fait k cascades radiatives vers le bas et on retrouve dans E_{n-k} . Donc $P_k(T)$ est égal à la probabilité de retrouver l'atome habillé à l'instant T dans E_{n-k} , c-à-d $P_{n-k}(T)$ donné en (IX-23)

Il faut maintenant multiplier $P_{n-k}(T)$ par la probabilité $P_0(n)$ de partir de E_n à $t=0$, puis sommer sur n . Comme, d'après (IX-23), $P_{n-k}(T)$ ne dépend pas de n et que $\sum_n P_0(n) = 1$, on a finalement

$$P_k(T) = e^{-\Gamma T/2} \frac{(\Gamma T/2)^k}{k!} \quad (\text{IX-25})$$

On trouve une distribution de Poisson centrée en $\bar{k} \approx \Gamma T/2$ et de largeur $\sim \sqrt{\Gamma T/2}$.

L'approche de l'atome habillé nous a donc permis d'obtenir indirectement mais très simplement le résultat suivant : un atome dans l'état fondamental, entrant brusquement dans un faisceau laser résonnant et intense, et y demeurant un temps T, n'émet pas un nombre bien défini de photons. Il en émet un nombre moyen $\Gamma T/2$, avec une dispersion de l'ordre de $\sqrt{\Gamma T/2}$.

(ii) Evolution de la distribution ^{du nombre de} photons dans le mode laser.

- D'après (IX-24), on peut écrire :

$$P_n(T) = \sum_{k=0}^{\infty} P_0(n+k) P_k(T) \quad (\text{IX-26})$$

- $P_k(T)$ peut en quelque sorte être considéré comme une "fonction de Green" permettant de calculer la distribution $P_n(T)$ à l'instant T en fonction de la distribution initiale $P_0(n)$.

Comme $P_k(T)$ n'existe que pour $k \geq 0$, $P_k(T)$ décrit un déplacement vers le bas de $P_0(n)$ d'une quantité $\Gamma T/2$ (vitesse de déplacement $\Gamma/2$), accompagné d'une diffusion en $\sqrt{\Gamma T/2}$.

Or, la largeur de $P_0(n)$ est très grande devant $\Gamma T/2$. (Rappelons que dans l'espace libre, on peut faire tendre n vers $+\infty$ en même temps que le volume V de la cavité fictive renfermant l'onde laser).

- On peut donc négliger le nombre de photons perdus par le mode laser alors que ce phénomène est évidemment crucial pour les modes vides qui, initialement vides, se remplissent petit à petit.

④. Etude du cas général

IX-5

a) Ecriture des équations sous forme matricielle

- Appelons $\sigma(n, t)$ le vecteur colonne ayant pour composantes $\pi_{1,n}(t)$ et $\pi_{2,n}(t)$. Les équations (IX-6) s'écrivent matriciellement :

$$\frac{d}{dt} \sigma(n, t) = -A \sigma(n, t) + B \sigma(n+1, t) \quad (\text{IX-27})$$

où A et B sont les 2 matrices 2×2 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{IX-28})$$

- Avec ces notations, on peut écrire (IX-13) sous la forme

$$\sigma(n, 0) = p_0(n) \pi(0) \quad (\text{IX-29})$$

où $\pi(0)$ est le vecteur de composantes $\pi_1(0)$ et $\pi_2(0)$

- Si l'on introduit la matrice C

$$C = A - B = \begin{pmatrix} \Gamma_1 - \Gamma_{11} & -\Gamma_{12} \\ -\Gamma_{21} & \Gamma_2 - \Gamma_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{IX-30})$$

on peut réécrire (IX-27) sous la forme

$$\frac{d}{dt} \sigma(n, t) = -C \sigma(n, t) + B [\sigma(n+1, t) - \sigma(n, t)] \quad (\text{IX-31})$$

b) Résolution approchée des équations d'évolution. Régime stationnaire de cascade.

- La distribution en n de $\sigma(n, t)$ a, comme $p_0(n)$, une largeur très grande, de l'ordre de \sqrt{n} . Donc le dernier terme de (IX-31) est très petit, environ $1/\sqrt{n}$ fois plus petit que le premier. On peut donc négliger ce dernier terme et réécrire (IX-31) sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \sigma(n, t) = -C \sigma(n, t) \quad (\text{IX-32})$$

dont la solution est, compte tenu de la condition initiale (IX-29) :

$$\sigma(n, t) = p_0(n) \pi(t) \quad (\text{IX-33})$$

où $\pi(t)$ est le vecteur à 2 composantes $\pi_1(t), \pi_2(t)$ solution de :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \pi(t) = -C \pi(t)} \quad (\text{IX-34})$$

Les populations réduites $\pi_1(t)$ et $\pi_2(t)$ évoluent donc à partir de leurs ~~valeurs~~ valeurs initiales $\pi_1(0)$ et $\pi_2(0)$ données en (IX-14) avec 2 constantes de temps qui sont les inverses des valeurs propres de C

- Comme, d'après (IX-7), $\Gamma_1 = \Gamma_{11} + \Gamma_{21}$ et $\Gamma_2 = \Gamma_{22} + \Gamma_{12}$, on voit que la somme des lignes de la matrice C définie en (IX-30) est nulle.

Donc C a une valeur propre nulle qui correspond à un régime stationnaire pour $\pi_1(t)$ et $\pi_2(t)$. La somme des 2 valeurs propres de C étant égale à la trace de (IX-30), on en déduit que la valeur propre non nulle de C est $\Gamma_{12} + \Gamma_{21}$.

On en conclut, qu'après un régime transitoire durant un temps de l'ordre de $1/(\Gamma_{12} + \Gamma_{21})$, $\Pi_1(t)$ et $\Pi_2(t)$ passent de leurs valeurs initiales $\Pi_1(0)$ et $\Pi_2(0)$ à leurs valeurs stationnaires $\Pi_1(\infty)$ et $\Pi_2(\infty)$, solutions de l'équation

$$C \Pi(\infty) = 0 \quad (IX-35)$$

- La valeur stationnaire $P_0(n) \Pi_i(\infty)$ vers laquelle tend la population du niveau $|i, n\rangle$ correspond en fait à un "équilibre dynamique". Il y a un transfert incessant de population vers le bas : chaque niveau se vide vers les niveaux inférieurs et est alimenté par les niveaux supérieurs, les gains compensant à chaque instant les pertes. On a un "régime stationnaire de cascade" qui est atteint si le temps T d'observation (temps de traversée du faisceau laser par l'atome) est grand devant $1/(\Gamma_{12} + \Gamma_{21})$.
- Calcul de $\Pi_1(\infty)$ et $\Pi_2(\infty)$

En explicitant (IX-35), on obtient, compte tenu de (IX-30) et du fait que $\Gamma_{1-} \Gamma_{11} = \Gamma_{21}$

$$\Gamma_{21} \Pi_1(\infty) = \Gamma_{12} \Pi_2(\infty) \quad (IX-36)$$

La condition de "bilan détaillé" (IX-36) a une interprétation physique simple (fig. 1)

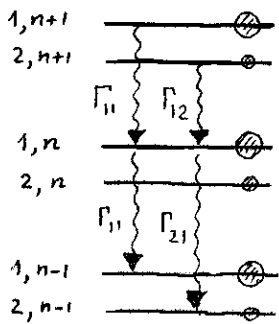


Fig. 1

Étant donné la très grande largeur de $P_0(n)$, on peut considérer que les populations stationnaires sont localement périodiques : $\Pi_{in} \approx \Pi_{i, n+1} \approx \Pi_{i, n-1}$. C'est ce qui exprime la forme (IX-33) de la solution.

Faisons le bilan de population pour $|1, n\rangle$. Ce qui arrive de $|1, n+1\rangle$, $\Gamma_{11} \Pi_1(\infty)$ est exactement compensé par ce qui part de $|1, n\rangle$ vers $|1, n-1\rangle$, $\Gamma_{11} \Pi_1(\infty)$. Le régime stationnaire est donc atteint quand ce qui arrive de $|2, n+1\rangle$, $\Gamma_{12} \Pi_2(\infty)$ est compensé par ce qui part vers $|2, n-1\rangle$, $\Gamma_{21} \Pi_1(\infty)$. On obtient ainsi (IX-36)

Calculons maintenant explicitement $\Pi_1(\infty)$ et $\Pi_2(\infty)$ à partir de (IX-36) et de la condition de normalisation $\Pi_1(\infty) + \Pi_2(\infty) = 1$

D'après (IX-6) et (VIII-5), on a :

$$\Gamma_{12} = \Gamma \sin^4 \varphi \quad \Gamma_{21} = \Gamma \cos^4 \varphi \quad (IX-37)$$

On en déduit, à partir de (IX-36) :

$$\Pi_1(\infty) = \frac{\sin^4 \varphi}{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi} \quad \Pi_2(\infty) = \frac{\cos^4 \varphi}{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi} \quad (IX-38)$$

c) Effet des termes négligés.

- Évaluons la correction due au dernier terme de (IX-31) que nous avons négligé. Pour cela, assimilons la dépendance "discrète" en n de $\sigma(n, t)$ à une dépendance continue et remplaçons donc $\sigma(n+1, t) - \sigma(n, t)$ par $\frac{\partial}{\partial n} \sigma(n, t)$.

Le dernier terme de (IX-31) ajoute donc à la vitesse de variation de la composante $\sigma_i(n, t)$ de $\sigma(n, t)$ une contribution égale à

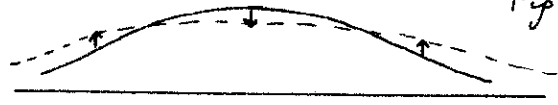
$$\sum_j B_{ij} \frac{\partial}{\partial n} \sigma_j(n, t) \quad (IX-39)$$

D'après (IX-28) et (IX-6), tous les B_{ij} sont positifs ; d'autre part, $\sigma_j(n, t)$ a une dépendance en n voisine de celle de $p_0(n)$ (traits pleins de la figure 2). On en déduit le sens de la vitesse de variations de $\sigma_j(n, t)$ associé au dernier terme de (IX-31) et représenté par les flèches de la figure 2 : > 0 pour les parties croissantes de $\sigma_j(n, t)$, < 0 pour les parties décroissantes, nul au maximum

Fig 2



Fig. 3



Le dernier terme de (IX-31) est donc responsable d'un déplacement de $\sigma_j(n, t)$ vers les faibles valeurs de n (traits tiretés de la fig. 2)

Si l'on avait développé $\sigma_j(n+1, t) - \sigma_j(n, t)$ jusqu'au 2^{ème} ordre, on aurait obtenu un terme supplémentaire, proportionnel à la courbure de $\sigma_j(n, t)$, $\frac{1}{2} B_{ij} \frac{\partial^2}{\partial n^2} \sigma_j(n, t)$, dont le signe est représenté par les flèches de la figure 3 et qui est responsable d'un élargissement de la distribution

Donc, à l'évolution des populations réduites discutées au § 4 ci-dessus, se superpose un déplacement vers le bas et un élargissement de la distribution en n des populations de l'atome battillé.

En conclusion

Les populations $\pi_i n$ partant des valeurs initiales $p_0(n) \pi_i(0)$ tendent après un régime transitoire durant un temps de l'ordre de $1/(\Gamma_{12} + \Gamma_{21})$ vers des valeurs stationnaires $p_0(n) \pi_i(\infty)$.

Le temps T d'observation (temps de traversée du faisceau laser par l'atome) est en général suffisamment long pour que ce régime stationnaire soit atteint.

Au bout d'un temps beaucoup plus long, de l'ordre de \sqrt{n}/Γ (où \sqrt{n} est la largeur de $p_0(n)$), deviendrait sensible une variation de populations due au fait que le mode laser se vide au profit des autres modes.

Remarque

Nous verrons plus loin que les quantités importantes pour le signal sont :

$$p_i = \sum_n \pi_i n \tag{IX-40}$$

En sommant (IX-8) sur n , on voit immédiatement que les p_i satisfont :

$$\frac{d}{dt} p_i = -\Gamma_i p_i + \sum_l \Gamma_{il} p_l \tag{IX-41}$$

que l'on peut écrire matriciellement, compte tenu de (IX-30)

$$\frac{d}{dt} p = -C p \tag{IX-42}$$

les conditions initiales étant d'après (IX-29) : $p(0) = \pi(0)$.

$p_1(t)$ et $p_2(t)$ satisfont donc aux mêmes équations que les populations réduites introduites dans le § 4 b et ont les mêmes valeurs initiales. Tout ce qui a été dit plus haut sur π_1 et π_2 demeure donc valable pour p_1 et p_2 [en particulier $p_i(\infty) = \pi_i(\infty)$], sans en il soit nécessaire de recourir à l'approximation consistant à négliger le dernier terme de (IX-31).

5) Application : Poids des raies en émission

a) Argument intuitif

Il semble tout à fait plausible que le nombre de photons émis au voisinage de la fréquence $\omega_L + E_i - E_j$ de la transition $|i, n\rangle \rightarrow |j, n-1\rangle$ soit égal au nombre de transitions de l'atome habillé qui s'effectuent à cette fréquence pendant le temps d'observation T . Nous justifierons ultérieurement une telle affirmation. On peut donc écrire (cf figure 4) :

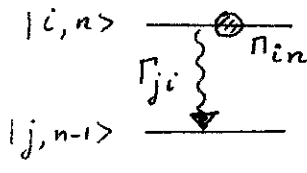


Fig. 4

$$J(\omega_L + E_i - E_j) = \int_0^T \sum_n \Gamma_{ji} \Pi_{in}(t) dt$$

$$= \int_0^T \Gamma_{ji} \rho_i(t) dt \quad (IX-43)$$

où les $\rho_i(t)$ ont été introduits en (IX-40).

Si l'on revient au diagramme d'énergie de la 4 page VIII-3, on obtient :

$$\begin{cases} J(\omega_L + \bar{\omega}) = \int_0^T \sum_n \Gamma_{21} \Pi_{1n}(t) dt = \int_0^T \Gamma_{21} \rho_1(t) dt \\ J(\omega_L - \bar{\omega}) = \int_0^T \sum_n \Gamma_{12} \Pi_{2n}(t) dt = \int_0^T \Gamma_{12} \rho_2(t) dt \\ J(\omega_L) = \int_0^T \sum_n \sum_{i=1,2} \Gamma_{ii} \Pi_{in}(t) dt = \int_0^T [\Gamma_{11} \rho_1(t) + \Gamma_{22} \rho_2(t)] dt \end{cases} \quad (IX-44)$$

b) Poids des raies dans le régime stationnaire

Si T est grand devant le temps du régime transitoire $1/(\Gamma_{12} + \Gamma_{21})$, on peut dans (IX-44) remplacer $\Pi_{in}(t)$ par $\rho_0(n) \Pi_i(\infty)$ [ou plus rigoureusement $\rho_i(t)$ par $\rho_i(\infty) = \Pi_i(\infty)$] ce qui donne :

$$\begin{cases} J(\omega_L + \bar{\omega}) = T \Gamma_{21} \Pi_1(\infty) \\ J(\omega_L - \bar{\omega}) = T \Gamma_{12} \Pi_2(\infty) \\ J(\omega_L) = T [\Gamma_{11} \Pi_1(\infty) + \Gamma_{22} \Pi_2(\infty)] \end{cases} \quad (IX-45)$$

On voit en particulier que la condition de bilan détaillé (IX-36) entraîne que

$$J(\omega_L + \bar{\omega}) = J(\omega_L - \bar{\omega}) \quad (IX-46)$$

les 2 raies latérales à $\omega_L + \bar{\omega}$ et $\omega_L - \bar{\omega}$ ont donc même poids. Nous verrons plus loin qu'elles ont même largeur, ce qui montre que le spectre est symétrique. L'interprétation physique de (IX-46) est la même que celle développée à propos de la fig 1. Lorsqu'on tient compte du régime transitoire, l'égalité (IX-46) n'est évidemment plus valable.

Quand on utilise les expressions (IX-37) et (IX-38) et les égalités $\Gamma_{11} = \Gamma_{22} = \Gamma \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$ déduites de (VIII-5) et (IX-6), on obtient à partir de (IX-45)

$$\begin{cases} J(\omega_L + \bar{\omega}) = \Gamma T \frac{\sin^4 \varphi \cos^4 \varphi}{\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi} = J(\omega_L - \bar{\omega}) \\ J(\omega_L) = \Gamma T \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \end{cases} \quad (IX-47)$$