

VII-1

Liens entre l'approche entièrement quantique et la
théorie des perturbations dépendant des temps (suite et fin)

D- Problème de l'équivalence entre les traitements utilisant une description
classique ou quantique de l'onde incidente.

① Idee générale (on néglige tout phénomène dissipatif).

- Considérons d'abord les traitements utilisant une description classique. Si l'état initial de l'atome à t_0 est décrit par un vecteur $|\psi(t_0)\rangle$, il reste à tout instant ultérieur t décrit par un vecteur $|\psi(t)\rangle$ obtenu en résolvant l'équation de Schrödinger, (ou en utilisant l'équation VI-48 si l'on connaît les états quasi-énergétiques et les quasi-énergies).

- Dans les traitements utilisant une description quantique, on peut toujours prendre un état initial sous forme d'un produit

$$|\psi(t_0)\rangle = |\psi_A(t_0)\rangle \otimes |\psi_R(t_0)\rangle \quad (\text{VII-1})$$

d'un ket atomique par un ket de rayonnement. Comme les 2 systèmes interagissent, il apparaît des corrélations entre eux et en général, l'état du système global est, à un instant ultérieur t , un ket $|\psi(t)\rangle$ qui n'est plus un produit, de sorte que l'état de l'atome à l'instant t est en général un mélange statistique.

- Comment alors justifier les traitements classiques où l'état atomique reste à tout instant décrit par un ket $|\psi(t)\rangle$ (cas pour) satisfaisant à une équation de Schrödinger dépendant des temps ?

- Nous allons montrer dans le § 2 (voir réf. D1) qu'un tel résultat est valable quand l'état initial du champ $|\psi_R(t_0)\rangle$ est un état quasiclassique (état cohérent). La résolution de l'équation de Schrödinger du système global atome + photons (atome habillé) montre en effet que dans ce cas la factorisation

$$|\psi(t)\rangle = |\psi_A(t)\rangle \otimes |\psi_R(t)\rangle \quad (\text{VII-2})$$

demeure valable à une très bonne approximation à tout instant ultérieur. De plus, on montre aisément que $|\psi_A(t)\rangle$ obéit à une équation de Schrödinger dépendant des temps.

Dans le § 3 (voir réf. D2), nous reprendrons ensuite le problème par une méthode légèrement différente basée sur une transformation unitaire qui permet de ramener le problème, d'un atome interagissant avec des photons incidents dans un état cohérent à celui d'un atome dans le vide de photons interagissant avec une onde classique.

② Première approche du problème.

a) Exemple simple montrant l'apparition de corrélations entre l'atome et le rayonnement : état initial à nombre bien défini de photons.

- Considérons pour simplifier le cas d'un champ tournant le calcul de la page (III-1) montre alors que si à t_0 on part de l'état produit

$$|-, n+1\rangle = \sin \varphi |1, n\rangle + \cos \varphi |2, n\rangle \quad (\text{VII-3})$$

l'état à l'instant t est devenue :

$$|\Psi(t)\rangle = \sin \varphi e^{-i\bar{\omega}(t-t_0)/2} |1, n\rangle + \cos \varphi e^{i\bar{\omega}(t-t_0)/2} |2, n\rangle \quad (\text{VII-4})$$

Lorsqu'on redéveloppe (VII-4) sur les états non perturbés (cf II-33), on obtient une superposition linéaire de $|-, n+1\rangle$ et $|+, n\rangle$

$$|\Psi(t)\rangle = \lambda(t) |-, n+1\rangle + \mu(t) |+, n\rangle \quad (\text{VII-5})$$

(où $\lambda(t)$ et $\mu(t)$ sont entièrement calculables) qui ne peut visiblement pas se mettre sous forme d'un produit (sauf à certains instants où $\lambda(t)$ ou $\mu(t)$ s'annulent)

b) Cas où l'état initial du champ est quasiclassique

$$|\Psi_R(t_0)\rangle = \sum_n c_n e^{-in\omega t_0} |n\rangle \quad (\text{VII-6})$$

On a considéré un seul mode du champ excité. On néglige le couplage avec les autres modes qui sont vides. La courbe donnant la distribution de $|c_n|^2$ en fonction de n a son maximum en \bar{n} et une largeur $\Delta n \sim \sqrt{\bar{n}}$.

Nous supposons les c_n réels et positifs (pour un état cohérent $|\alpha\rangle$, $c_n = e^{-|\alpha|^2/2} \alpha^n / \sqrt{n!}$, ce qui revient à supposer α réel > 0). La valeur moyenne du champ électrique (proportionnel à $a + a^\dagger$) est donc en $\cos \omega t_0$.

D'après la propriété que nous venons de mentionner sur la distribution des $|c_n|^2$

$$p \ll \sqrt{\bar{n}} \implies c_n \approx c_{n+p} \quad (\text{VII-7})$$

- Si l'on part d'un état atomique initial (notations du § C) :

$$|\Psi_A(t_0)\rangle = \sum_i \gamma_i |i\rangle \quad (\text{VII-8})$$

l'état initial du système global s'écrit :

$$|\Psi(t_0)\rangle = |\Psi_A(t_0)\rangle \otimes |\Psi_R(t_0)\rangle = \sum_{i,n} \gamma_i c_n e^{-in\omega t_0} |i, n\rangle \quad (\text{VII-9})$$

- Pour avoir l'état du système global à l'instant t , nous utiliserons le formalisme de l'atome habillé. Supposons connus les états propres $|\tilde{\ell}, n\rangle$ de l'hamiltonien, de valeurs propres $\tilde{E}_\ell + n\omega$. A l'instant t , $|\Psi(t_0)\rangle$ devient :

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{i,n} \sum_{\tilde{\ell}, n'} \gamma_i c_n \langle \tilde{\ell}, n' | i, n \rangle |\tilde{\ell}, n'\rangle e^{-i(\tilde{E}_\ell + n'\omega)(t-t_0)} e^{-in\omega t_0} \quad (\text{VII-10})$$

Redéveloppons les $|\tilde{\ell}, n'\rangle$ sur les états non perturbés :

$$|\tilde{\ell}, n'\rangle = \sum_{j, n''} |j, n''\rangle \langle j, n'' | \tilde{\ell}, n' \rangle \quad (\text{VII-11})$$

Il vient finalement :

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{i,n} \sum_{\tilde{\ell}, n'} \sum_{j, n''} \gamma_i c_n \langle j, n'' | \tilde{\ell}, n' \rangle \langle \tilde{\ell}, n' | i, n \rangle |j, n''\rangle e^{-i(\tilde{E}_\ell + n'\omega)(t-t_0)} e^{-in\omega t_0} \quad (\text{VII-12})$$

Jusqu'ici, nous n'avons fait aucune approximation (à part celle de négliger le couplage avec les modes vides). Aucune factorisation ne semble évidente sur (VII-12).

- Utilisons maintenant le caractère quasi-clampé de la distribution des $|c_n|^2$.

Montrons d'abord que dans la sommation (VII-12), n'' ne peut pas beaucoup différer de n . Les coefficients du développement $\langle j, n'' | \tilde{\ell}, n' \rangle$ d'un état perturbé sur un état non perturbé ne sont différents de zéro que si $|n' - n''|$ n'est pas trop grand (de manière plus précise, on peut montrer que $|n' - n''|$ ne doit pas être trop grand devant ω_1/ω). Comme $\sqrt{n} \gg 1$, on en déduit :

$$\begin{aligned} \langle j, n'' | \tilde{\ell}, n' \rangle \neq 0 &\implies |n' - n''| \ll \sqrt{n} \\ \langle \tilde{\ell}, n' | i, n \rangle \neq 0 &\implies |n - n'| \ll \sqrt{n} \end{aligned} \tag{VII-13}$$

de sorte que l'on doit avoir également

$$|n - n''| \ll \sqrt{n} \tag{VII-13 bis}$$

pour que les termes correspondants de (VII-12) ne soient pas négligeables. Par suite, en utilisant (VII-7), on voit qu'on commet une erreur négligeable en remplaçant dans (VII-12) c_n par $c_{n''}$

$$c_n \rightarrow c_{n''} \tag{VII-14}$$

- Par ailleurs, d'après la périodicité locale du diagramme de l'atome habillé, le produit scalaire $\langle j, n'' | \tilde{\ell}, n' \rangle$ ne dépend que de la différence $n'' - n'$. Ce point apparaît d'ailleurs très clairement sur les formules (VI-43) qui permettent d'écrire

$$\begin{cases} \langle j, n'' | \tilde{\ell}, n' \rangle = \langle j, q = n'' - n' | \bar{\ell} \rangle \\ \langle \tilde{\ell}, n' | i, n \rangle = \langle \bar{\ell} | i, p = n - n' \rangle \end{cases} \tag{VII-15}$$

où les $\langle | \rangle$ sont les composantes de Fourier apparaissant dans la théorie de Floquet-Shirley (cf VI-26)

- Reportons (VII-14) et (VII-15) dans (VII-12). D'autre part, au lieu de sommer sur n, n', n'' , on peut sommer sur $n'', p = n - n', q = n'' - n'$. Il vient ainsi

$$|\Psi(t)\rangle \approx \sum_{\substack{i, j, \ell \\ n'', p, q}} \gamma_i c_{n''} e^{-in''\omega t} e^{in''\omega t} |j, n''\rangle \langle j, q | \bar{\ell} \rangle \langle \bar{\ell} | i, p \rangle e^{-i(\bar{E}_\ell + n'\omega)(t-t_0)} e^{-in''\omega t_0} \tag{VII-16}$$

que l'on peut écrire

$$|\Psi(t)\rangle = |\Psi_R(t)\rangle \otimes |\Psi_A(t)\rangle \tag{VII-17}$$

avec

$$|\Psi_R(t)\rangle = \sum_{n''} c_{n''} e^{-in''\omega t} |n\rangle \tag{VII-18}$$

$$|\Psi_A(t)\rangle = \sum_{\substack{i, j, \ell \\ p, q}} \gamma_i \langle j, q | \bar{\ell} \rangle \langle \bar{\ell} | i, p \rangle e^{-i\bar{E}_\ell(t-t_0)} e^{iq\omega t} e^{-ip\omega t_0} |j\rangle \tag{VII-19}$$

Conclusion

On a ainsi démontré 2 points :

- (i) $|\Psi(t)\rangle$ reste factorisé à tout instant t (cf VII-18), l'état du champ à l'instant t se déduisant de $|\Psi_R(t_0)\rangle$ par une évolution libre.
- (ii) En comparant (VII-19) à (VI-48), on voit que $|\Psi_A(t)\rangle$ est la solution de l'équation de Schrödinger classique correspondant à l'état initial $|\Psi_A(t_0)\rangle$, ce qui justifie entièrement le traitement classique.

Pour arriver à ces résultats, on a utilisé 2 propriétés

- (i) La très grande largeur $\Delta n = \sqrt{n}$ de la distribution quasi-classique, ce qui permet de remplacer dans (VII-12) C_n par C_n'' . Rappelons que pour un atome interagissant avec une onde se propageant librement dans l'espace, on sait (voir discussion page II-4) qu'on peut faire tendre n vers l'infini.
- (ii) On a négligé la variation de \sqrt{n} quand n varie de \sqrt{n} autour de \bar{n} (équivalence locale entre l'hamiltonien de l'atome habillé et l'hamiltonien de Floquet-Sturley utilisé pour écrire VII-15)

On sait d'après la discussion (page II-6 §6) que ceci revient à négliger les fluctuations du champ électrique dans un état cohérent de l'ordre des fluctuations ses vides dans le mode considéré. De plus, on a négligé la fluctuation du vide associée aux autres modes.

Donc, la factorisation (VII-18) et le traitement par équation de Schrödinger dépendant du temps ne sont finalement valables que si l'état initial du champ est quasi-classique et si l'on peut négliger l'émission spontanée.

③ Autre approche

a) Etat initial quantique correspondant à la meilleure description possible d'un paquet d'ondes classiques incident.

- Champ électrique correspondant à une onde plane progressive classique (Mode $\vec{k} \vec{E}$) :

$$i(\vec{u}_{kE}(\vec{r}) e^{-i\omega_k t} - \vec{u}_{kE}^*(\vec{r}) e^{i\omega_k t}) \tag{VII-20}$$

avec

$$\vec{u}_{kE}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0 L^3}} \vec{E} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \tag{VII-21}$$

- Champ électrique correspondant à un paquet d'ondes obtenu en superposant linéairement de telles ondes planes

$$\vec{E}_{cl}(\vec{r}, t) = i \sum_{kE} \left[\vec{u}_{kE}(\vec{r}) \alpha_{kE}(t) - \vec{u}_{kE}^*(\vec{r}) \alpha_{kE}^*(t) \right] \tag{VII-22}$$

avec

$$\alpha_{kE}(t) = \alpha_{kE} e^{-i\omega_k t} \tag{VII-23}$$

- Opérateurs champ électrique quantique $\vec{E}(\vec{r})$ au point \vec{r} (voir cours 73-74 p. XII-4)

$$\vec{E}(\vec{r}) = i \sum_{kE} \left[\vec{u}_{kE}(\vec{r}) a_{kE} - \vec{u}_{kE}^*(\vec{r}) a_{kE}^+ \right] \quad (VII-24)$$

les a_{kE} et a_{kE}^+ étant des opérateurs d'annihilation et de création d'un photon kE

$$[a_{kE}, a_{k'E}^+] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{EE'} \quad (VII-25)$$

- Etat du champ quantique correspondant le mieux au paquet d'ondes classique (VII-22) : Produit d'états cohérents de chaque mode correspondant au coefficient $\alpha_{kE}(t)$ figurant dans VII-22

$$|\Psi_R(t)\rangle = \prod_{kE} |\alpha_{kE}(t)\rangle = |\{\alpha_{kE}(t)\}\rangle \quad (VII-26)$$

Toutes les valeurs moyennes des opérateurs quantiques calculées dans $|\Psi_R(t)\rangle$ sont égales aux grandeurs classiques associées au paquet d'ondes classiques VII-22 (cf cours 74-75 p. III-2)

- Considérons un paquet d'onde du type de (VII-26) arrivant sur l'atome dans l'état $|\Psi_A\rangle$ situé au point \vec{R} (choisi comme origine des coordonnées : $\vec{R} = \vec{0}$)

Pour t suffisamment loins dans le passé, le paquet d'ondes n'est pas encore arrivé sur l'atome, de sorte que l'état du système global atome + champ e.m. est encore un produit :

$$|\Psi(t)\rangle \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} |\Psi_A(t)\rangle \otimes |\Psi_R(t)\rangle = e^{-iH_A t} |\Psi_A\rangle \otimes |\{\alpha_{kE} e^{-i\omega_k t}\}\rangle \quad (VII-27)$$

H_A étant l'hamiltonien atomique.

A partir du moment où le paquet d'ondes arrive sur l'atome, la factorisation (VII-27) n'est bien sur plus évidente.

b) Hamiltonien du système atome + champ quantique

$$H = H_A + H_R + V \quad (VII-28)$$

$$H_R = \sum_{kE} \omega_k a_{kE}^+ a_{kE} \quad (VII-29)$$

$$V = -\vec{D} \cdot \vec{E}(\vec{0}) = -i\vec{D} \cdot \sum_{kE} \left[\vec{u}_{kE}(\vec{0}) a_{kE} - \vec{u}_{kE}^*(\vec{0}) a_{kE}^+ \right] \quad (VII-30)$$

\vec{D} : dipôle atomique.

c) Rappel ou établissement de quelques formules utiles

- Formule de Glauber

Si A et B commutent avec $[A, B]$, on a :

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A, B]} \quad (VII-31)$$

- Expression de l'état cohérent $|\alpha_{kE}(t)\rangle$ à partir du vide $|0_{kE}\rangle$

$$|\alpha_{kE}(t)\rangle = D(\alpha_{kE}(t)) |0_{kE}\rangle \quad (VII-32)$$

où
$$D(\alpha_{kE}(t)) = e^{[\alpha_{kE}(t) a_{kE}^+ - \alpha_{kE}^*(t) a_{kE}]} \quad (VII-33)$$

est un opérateur unitaire (opérateur de déplacement de Glauber) satisfaisant de plus aux relations suivantes

$$\begin{cases} D^\dagger(\alpha_{kE}(t)) a_{kE} D(\alpha_{kE}(t)) = a_{kE} + \alpha_{kE}(t) \\ D^\dagger(\alpha_{kE}(t)) a_{kE}^\dagger D(\alpha_{kE}(t)) = a_{kE}^\dagger + \alpha_{kE}^*(t) \end{cases} \quad (VII-34)$$

La démonstration de (VII-34) se fait en utilisant (VII-31) et la relation $[a, f(a^\dagger)] = \frac{df(a^\dagger)}{da^\dagger}$.

- Calcul de la dérivée de $D(\alpha_{kE}(t))$.

Si $\dot{A}(t)$ ne commute pas avec $A(t)$, on a $\frac{d}{dt} e^{A(t)} \neq \dot{A}(t) e^{A(t)}$.
 Donc $\frac{d}{dt} e^{(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)} \neq (\dot{\alpha} a^\dagger - \dot{\alpha}^* a) e^{(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)}$ (Pour simplifier les notations, on n'écrit pas k, E, t dans $\alpha_{kE}(t)$).

Pour calculer $\frac{d}{dt} D(\alpha)$, on utilise la formule de Glauber pour $D(\alpha)$

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} e^{-\frac{1}{2} \alpha^* \alpha} \quad (VII-35)$$

et on dérive chaque exponentielle

$$\frac{d}{dt} D(\alpha) = \dot{\alpha} a^\dagger D + D \cdot (-\dot{\alpha}^* a) + D \cdot \left(-\frac{\dot{\alpha} \alpha^* + \alpha \dot{\alpha}^*}{2} \right) \quad (VII-36)$$

On fait ensuite passer a^\dagger à droite de D dans le 1^{er} terme de (VII-36) grâce à (VII-34) :

$$\frac{d}{dt} D(\alpha) = D \cdot (\dot{\alpha} a^\dagger) + D \cdot (\dot{\alpha} \alpha^*) + D \cdot (-\dot{\alpha}^* a) + D \cdot \left(-\frac{\dot{\alpha} \alpha^* + \alpha \dot{\alpha}^*}{2} \right) \quad (VII-37)$$

En regroupant les 2^{es} et 4^{es} termes de (VII-37) et en utilisant le fait que, compte tenu de (VII-23)

$$\dot{\alpha} = -i\omega \alpha \quad \dot{\alpha}^* = i\omega \alpha^* \quad (VII-38)$$

on obtient

$$\frac{d}{dt} D(\alpha_{kE}(t)) = D(\alpha_{kE}(t)) \left[-i\omega_k \alpha_{kE}(t) a_{kE}^\dagger - i\omega_k \alpha_{kE}^*(t) a_{kE} - i\omega_k \alpha_{kE}^*(t) \alpha_{kE}(t) \right] \quad (VII-39)$$

- Notations commodes

$$D(\{\alpha_{kE}(t)\}) = \prod_{kE} D(\alpha_{kE}(t)) \quad (VII-40)$$

Comme les opérateurs de 2 modes différents commutent, on déduit de (VII-39)

$$\frac{d}{dt} D(\{\alpha_{kE}(t)\}) = -i D(\{\alpha_{kE}(t)\}) \sum_{kE} \omega_k \left[\alpha_{kE}(t) a_{kE}^\dagger + \alpha_{kE}^*(t) a_{kE} + \alpha_{kE}^*(t) \alpha_{kE}(t) \right] \quad (VII-41)$$

d) Transformation unitaire effectuée sur l'équation de Schrödinger.

- Effectuons sur le ket $|\psi(t)\rangle$ solutions de l'équation de Schrödinger du système global la transformation unitaire $D^\dagger(\{\alpha_{kE}(t)\})$.

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = D^\dagger(\{\alpha_{kE}(t)\}) |\psi(t)\rangle \quad (VII-42)$$

Comme on peut, d'après (VII-32), écrire (VII-27) sous la forme

$$|\psi(t)\rangle \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} e^{-iH_A t} |\psi_A\rangle \otimes D(\{\alpha_{kE}(t)\}) |0\rangle_R \quad (VII-43)$$

où $|0\rangle_R$ est le vide de Fock, on voit que :

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} e^{-iH_A t} |\psi_A\rangle \otimes |0\rangle_R \quad (VII-44)$$

Dans la nouvelle représentation, on est ramené à un problème où aucun photon incident n'arrive sur l'atome (quand $t \rightarrow -\infty$, on a le vide de Fock). Evidemment, l'évolution de $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ n'est plus la même que celle de $|\psi(t)\rangle$.

- Equations d'évolution de $|\tilde{\psi}(t)\rangle$.

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} |\tilde{\psi}(t)\rangle &= i \frac{d}{dt} [D^+ |\psi\rangle] = i \left(\frac{d}{dt} D^+ \right) |\psi\rangle + D^+ i \frac{d}{dt} |\psi\rangle \\ &= i \left(\frac{d}{dt} D^+ \right) D |\tilde{\psi}\rangle + D^+ H D |\tilde{\psi}\rangle \end{aligned} \quad (VII-45)$$

On en déduit

$$i \frac{d}{dt} |\tilde{\psi}(t)\rangle = \tilde{H}(t) |\tilde{\psi}(t)\rangle$$

$$\text{où } \tilde{H}(t) = i \left[\frac{d}{dt} D(\{\alpha_{kE}(t)\}) \right] D(\{\alpha_{kE}(t)\}) + D^+(\{\alpha_{kE}(t)\}) H D(\{\alpha_{kE}(t)\}) \quad (VII-46)$$

- Calcul de $\tilde{H}(t)$

En prenant l'adjoint de (VII-41), et en utilisant $D^+ D = 1$, on obtient pour le 1^{er} terme de VII-46

$$i \left(\frac{d}{dt} D^+ \right) D = - \sum_{kE} \omega_{kE} \left[\alpha_{kE}^*(t) a_{kE} + \alpha_{kE}(t) a_{kE}^+ + \alpha_{kE}^{(H)} \alpha_{kE}^*(t) \right] \quad (VII-47)$$

Par ailleurs, en utilisant les expressions (VII-28) et (VII-30) de H et V, le fait que H_A commute avec D, et les relations (VII-34), on obtient aisément :

$$\begin{aligned} D^+ H D &= H_A + \sum_{kE} \omega_{kE} [a_{kE}^+ + \alpha_{kE}^*(t)] [a_{kE} + \alpha_{kE}(t)] \\ &\quad - i \vec{D} \cdot \sum_{kE} \left\{ \vec{u}_{kE}(\vec{0}) [a_{kE} + \alpha_{kE}(t)] - \vec{u}_{kE}^*(\vec{0}) [a_{kE}^+ + \alpha_{kE}^*(t)] \right\} \end{aligned} \quad (VII-48)$$

En ajoutant (VII-47) et (VII-48), on obtient finalement :

$$\tilde{H}(t) = H - \vec{D} \cdot \vec{E}_Q(\vec{0}, t) \quad (VII-49)$$

e) Discussions physique

Grâce à la transformation unitaire D^+ , on a ainsi ramené le problème d'un atome interagissant avec des photons incidents dans un état quasi-classique à celui d'un atome initialement dans le vide de photons mais soumis à une perturbation de plus à une perturbation dépendant du temps correspondant à l'hamiltonien d'interaction avec le paquet d'ondes classiques incident.

Il ne faut pas oublier cependant que l'hamiltonien $H = H_A + H_R + V$ figurant dans (VII-49) contient l'interaction V avec les modes quantiques qui va être responsable du fait que les modes des

champs initialement vides vont se remplir (émission spontanée de l'atome perturbé par une onde classique incidente)

Supposons que l'on puisse négliger l'émission spontanée (spectroscopie hertzienne). On peut alors négliger le remplissage des modes initialement vides dans la nouvelle représentation. La solution de l'équation de Schrödinger satisfaite par $|\tilde{\Psi}(t)\rangle$ est alors, si l'on utilise (VII-49) et que l'on néglige V dans H .

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle = |\Psi_A(t)\rangle \otimes e^{-iH_R t} |0\rangle_R \quad (\text{VII-50})$$

où $|\Psi_A(t)\rangle$ est la solution de l'équation de Schrödinger correspondant à l'hamiltonien purement atomique

$$H_A - \vec{D} \cdot \vec{E}_d(\vec{0}, t) \quad (\text{VII-51})$$

(Comme l'énergie du champ est négligée par rapport au vide $|0\rangle_R$, on peut écrire dans VII-50 $e^{-iH_R t} |0\rangle_R = |0\rangle_R$).

Quand on revient ensuite à l'ancienne représentation par action de D , on obtient à partir de (VII-50), compte tenu de (VII-32):

$$|\Psi(t)\rangle = |\Psi_A(t)\rangle \otimes |\{\alpha_{RE}(t)\}\rangle \quad (\text{VII-52})$$

ce qui décrit une situation où le champ de rayonnement peut être considéré comme évoluant librement.

On retrouve ainsi le résultat obtenu en 2. La factorisation du vecteur d'état et la description de l'évolution atomique par une équation de Schrödinger avec perturbations dépendant du temps ne sont valables que si:

- l'état initial du champ est quasi-classique.
- on peut négliger l'émission spontanée.

References

- D 1. C. Fabre Thèse 3^{ème} cycle Paris 1974
 D 2. B.R. Mollow Phys. Rev. A12, 1919 (1975)