Opérateurs de projection - Applications (suite)

C - Factorisation de $R(z)$

① But d'un tel calcul

- Ajoutons un indice 1 aux sous-espace $\mathcal{E}$ et $\mathcal{S}$ introduits en A ainsi qu'aux projecteurs P et $\mathcal{Q}$ correspondants.
 La formule (VI-21) devient :

$$\mathcal{Q}_1 G(z) P_1 = \frac{\mathcal{Q}_1}{z - \mathcal{Q}_1 H_0 \mathcal{Q}_1} R_1(z) \frac{P_1}{z - P_1 H_0 P_1 - P_1 R_1(z) P_1} \qquad \text{(VII-1)}$$

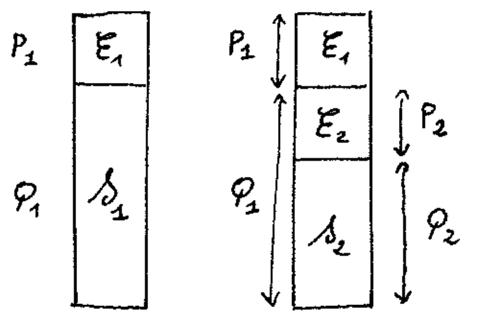
avec

$$R_1(z) = V + V \frac{\mathcal{Q}_1}{z - \mathcal{Q}_1 H_0 \mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_1 V \mathcal{Q}_1} V \qquad \text{(VII-2)}$$

(VII-1) permet de calculer l'amplitude de transition d'un état initial $|i\rangle \in \mathcal{E}_1$ à un état final $|f\rangle \in \mathcal{S}_1$.

- Considérons une partition $(\mathcal{E}_2, \mathcal{S}_2)$ dans $\mathcal{S}_1$.

Fig 4



Soient P_2 et $\mathcal{Q}_2$ les projecteurs sur $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{S}_2$ qui sont 2 sous-espaces supplémentaires de $\mathcal{S}_1$

$$P_2 + \mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_1 \qquad \text{(VII-3)}$$

$$\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_1 - P_2 = 1 - P_1 - P_2 \qquad \text{(VII-4)}$$

$$P_2 \mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_1 P_2 = P_2 \qquad \text{(VII-5)}$$

$$\mathcal{Q}_2 \mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_2 \qquad \text{(VII-6)}$$

- But du calcul

 Transformer l'expression (VII-2) de $R_1(z)$ de manière à distinguer clairement parmi toutes les transitions qui vont de $|i\rangle$ à $|f\rangle$ celles qui passent intermédiairement par un état de $\mathcal{E}_2$.

② Transformation de l'expression donnant $R_1(z)$

- Réécrivons (VII-2), en posant pour simplifier les notations :

$$z - \mathcal{Q}_1 H_0 \mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_1 V \mathcal{Q}_1 = C \qquad \text{(VII-7)}$$

Il vient :

$$R_1 = V + V \frac{\mathcal{Q}_1}{C} V \qquad \text{(VII-8)}$$

- Nous allons, dans ce qui suit, travailler dans $\mathcal{S}_1$. L'opérateur $\mathcal{Q}_1 H_0 \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_1 V \mathcal{Q}_1$ est un hamiltonien de $\mathcal{S}_1$, dont la résolvante est $\frac{\mathcal{Q}_1}{C}$. Comme $(\mathcal{E}_2, \mathcal{S}_2)$ est une partition de $\mathcal{S}_1$, on a :

$$\frac{\mathcal{Q}_1}{C} = P_2 \frac{\mathcal{Q}_1}{C} P_2 + \mathcal{Q}_2 \frac{\mathcal{Q}_1}{C} P_2 + P_2 \frac{\mathcal{Q}_1}{C} \mathcal{Q}_2 + \mathcal{Q}_2 \frac{\mathcal{Q}_1}{C} \mathcal{Q}_2 \qquad \text{(VII-9)}$$

Les 4 opérateurs du 2ème membre de (VII-9) peuvent être calculés immédiatement à partir des formules (VI-12), (VI-13), (VI-16) et (VI-18) établies en A moyennant la substitution :

$$H_0 \to \mathcal{Q}_1 H_0 \mathcal{Q}_1 \qquad V \to \mathcal{Q}_1 V \mathcal{Q}_1 \qquad P \to P_2 \qquad \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}_2 \qquad \text{(VII-10)}$$

– On obtient ainsi à partir de (VI-12), (VI-11), et compte tenu de (VII-5), (VII-6) :

$$P_2 \frac{\mathcal{P}_1}{C} P_2 = G_2(z) = \frac{P_2}{z - P_2 H_0 P_2 - P_2 R_2(z) P_2} \qquad \text{(VII-11)}$$

avec

$$R_2(z) = V + V \frac{\mathcal{Q}_2}{z - \mathcal{Q}_2 H_0 \mathcal{Q}_2 - \mathcal{Q}_2 V \mathcal{Q}_2} V \qquad \text{(VII-12)}$$

Notons que les 2 opérateurs P_2 et $\mathcal{Q}_2$ qui apparaissent dans VII-11 et VII-12 ne projettent pas sur 2 sous-espaces supplémentaires dans l'espace des état total ($P_2 + \mathcal{Q}_2 = \mathcal{P}_1 \neq 1$). Il ne faut donc pas confondre $G_2(z)$ avec $P_2 G(z) P_2$. $G_2(z)$ décrit une évolution dans $\mathcal{E}_2$ excluant toute transition intermédiaire vers un état de $\mathcal{E}_1$.

Pour simplifier les notations, nous poserons

$$B = z - P_2 H_0 P_2 - P_2 R_2(z) P_2 \qquad \text{(VII-13)}$$

$$A = z - \mathcal{Q}_2 H_0 \mathcal{Q}_2 - \mathcal{Q}_2 V \mathcal{Q}_2 \qquad \text{(VII-14)}$$

de sorte que (VII-11) et (VII-12) s'écrivent :

$$P_2 \frac{\mathcal{P}_1}{C} P_2 = \frac{P_2}{B} = G_2(z) \qquad \text{(VII-15)}$$

$$R_2 = V + V \frac{\mathcal{Q}_2}{A} V \qquad \text{(VII-16)}$$

– On obtient de même à partir de (VI-13) (VI-16) et (VI-18), et compte tenu de (VII-10), (VII-5), (VII-6), (VII-13), (VII-14) :

$$\mathcal{Q}_2 \frac{\mathcal{P}_1}{C} P_2 = \frac{\mathcal{Q}_2}{A} V \frac{P_2}{B} \qquad \text{(VII-17)}$$

$$P_2 \frac{\mathcal{P}_1}{C} \mathcal{Q}_2 = \frac{P_2}{B} V \frac{\mathcal{Q}_2}{A} \qquad \text{(VII-18)}$$

$$\mathcal{Q}_2 \frac{\mathcal{P}_1}{C} \mathcal{Q}_2 = \frac{\mathcal{Q}_2}{A} + \frac{\mathcal{Q}_2}{A} V \frac{P_2}{B} V \frac{\mathcal{Q}_2}{A} \qquad \text{(VII-19)}$$

– En insérant (VII-15), (VII-17), (VII-18), (VII-19) dans (VII-9), on obtient pour R_1 qui est donné par (VII-8) :

$$\begin{aligned} R_1 &= V + V\frac{P_2}{B}V + V\frac{\mathcal{Q}_2}{A}V\frac{P_2}{B}V + V\frac{P_2}{B}V\frac{\mathcal{Q}_2}{A}V + V\frac{\mathcal{Q}_2}{A}V + V\frac{\mathcal{Q}_2}{A}V\frac{P_2}{B}V\frac{\mathcal{Q}_2}{A}V \\ &= V + V\frac{\mathcal{Q}_2}{A}V + \left(V + V\frac{\mathcal{Q}_2}{A}V\right)\frac{P_2}{B}\left(V + V\frac{\mathcal{Q}_2}{A}V\right) \end{aligned} \qquad \text{(VII-20)}$$

c-à-d encore, compte tenu de (VII-16) et (VII-15)

$$\boxed{R_1(z) = R_2(z) + R_2(z)\, G_2(z)\, R_2(z)} \qquad \text{(VII-21)}$$

Le 1er terme de (VII-21) donne* les transitions induites par R_1 et ne passant jamais par $\mathcal{E}_2$; le 2ème terme donne les transitions passant au moins 1 fois par $\mathcal{E}_2$.

– En reportant (VII-21) dans (VII-1), et en posant

$$G_1(z) = \frac{P_1}{z - P_1 H_0 P_1 - P_1 R_1(z) P_1} \qquad \text{(VII-22)}$$

on obtient

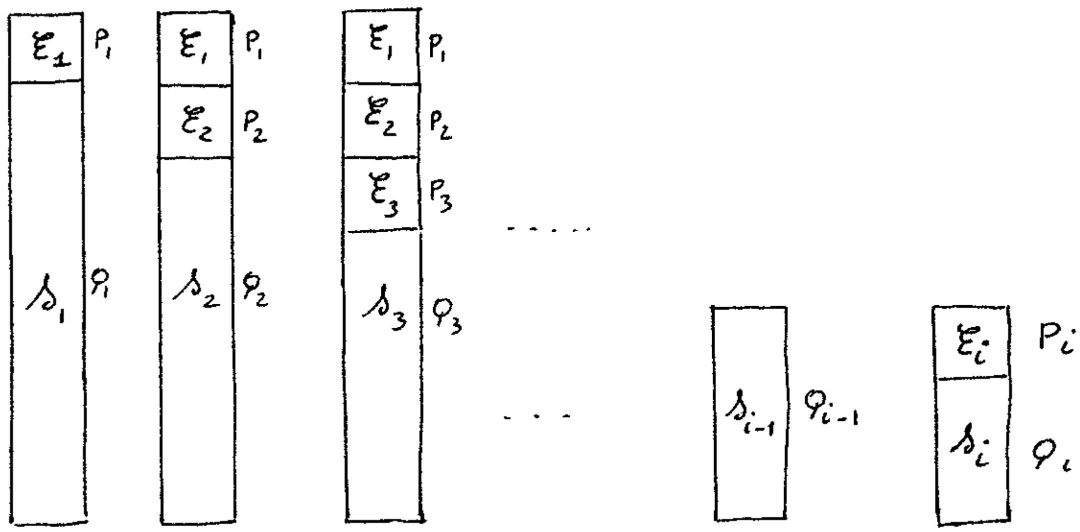
$$\boxed{P_1\, G(z)\, P_1 = \frac{1}{z-\mathcal{Q}_1 H_0 \mathcal{Q}_1}\, R_2(z)\left[1+G_2(z)\,R_2(z)\right]G_1(z)} \qquad \text{(VII-23)}$$

les 2 termes du crochet de (VII-23) sont respectivement associés aux transitions qui vont de $|i\rangle$ à $|f\rangle$ en passant 0 ou au moins 1 fois par $\mathcal{E}_2$.

③ Généralisation

– On effectue une partition $(\mathcal{E}_3, \mathcal{S}_3)$ dans $\mathcal{S}_2$, … $(\mathcal{E}_i, \mathcal{S}_i)$ dans $\mathcal{S}_{i-1}$

Fig 5



$$P_i + \mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}_{i-1} \qquad P_i\mathcal{Q}_{i-1} = \mathcal{Q}_{i-1}P_i = P_i \qquad \mathcal{Q}_i\mathcal{Q}_{i-1} = \mathcal{Q}_{i-1}\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}_i \qquad \text{(VII-24)}$$

– Par récurrence, on généralise aisément les résultats du § précédent. Une fois arrivé à $R_{i-1}(z)$ donné par :

$$R_{i-1}(z) = V + V\,\frac{\mathcal{Q}_{i-1}}{z-\mathcal{Q}_{i-1}H_0\mathcal{Q}_{i-1} - \mathcal{Q}_{i-1}V\mathcal{Q}_{i-1}}\,V \qquad \text{(VII-25)}$$

on transforme aisément (VII-25) en considérant la partition $(\mathcal{E}_i, \mathcal{S}_i)$ de $\mathcal{S}_{i-1}$. On obtient ainsi la relation suivante, analogue de (VII-21)

$$\boxed{R_{i-1}(z) = R_i(z) + R_i(z)\,G_i(z)\,R_i(z)} \qquad \text{(VII-26)}$$

où

$$\boxed{R_i(z) = V + V\,\frac{\mathcal{Q}_i}{z-\mathcal{Q}_i H_0 \mathcal{Q}_i - \mathcal{Q}_i V \mathcal{Q}_i}\,V} \qquad \text{(VII-27)}$$

$$\boxed{G_i(z) = \frac{P_i}{z - P_i H_0 P_i - P_i R_i(z) P_i}} \qquad \text{(VII-28)}$$

(Là encore, comme $P_i + \mathcal{Q}_i \neq 1$, $G_i(z) \neq P_i G(z) P_i$. $G_i(z)$ décrit une évolution dans $\mathcal{E}_i$ excluant toute transition intermédiaire vers $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 \oplus \mathcal{E}_3 \dots \oplus \mathcal{E}_{i-1}$. Seul $G_1(z) = P_1 G(z) P_1$ puisque $P_1 + \mathcal{Q}_1 = 1$).

Parmi toutes les transitions passant dans $\mathcal{S}_{i-1}$ et décrites par R_{i-1}, (VII-26) distingue celles qui ne passent jamais dans $\mathcal{E}_i$ de celles qui y passent au moins 1 fois.

– Remplaçons dans (VII-23) $R_2(z)$ par son expression en fonction de R_3 et G_3 calculée à partir de VII-26. Il vient :

$$\mathcal{P}_1 G(z) P_1 = \frac{1}{z - \mathcal{P}_1 H_0 \mathcal{P}_1} R_3(z) \left[1 + G_3(z) R_3(z)\right]\left[1 + G_2(z) R_2(z)\right] G_1(z) \qquad \text{(VII-29)}$$

et ainsi de suite jusqu'à :

$$\mathcal{P}_1 G(z) P_1 = \frac{1}{z - \mathcal{P}_1 H_0 \mathcal{P}_1} R_i \left(1 + G_i R_i\right)\left(1 + G_{i-1} R_{i-1}\right) \cdots \left(1 + G_2 R_2\right) G_1 \qquad \text{(VII-30)}$$

Si l'on veut que le système partant de $|i\rangle$ aboutisse à $|f\rangle$ en passant intermédiairement et successivement par $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$, … $\mathcal{E}_{i-1}$, $\mathcal{E}_i$, il faut nécessairement prendre, parmi les $(2)^{i-1}$ termes de (VII-30), le suivant :

$$\frac{1}{z - \mathcal{P}_1 H_0 \mathcal{P}_1} R_i\, G_i\, R_i\, G_{i-1}\, R_{i-1} \cdots G_2\, R_2\, G_1 \qquad \text{(VII-31)}$$

D- Applications à l'étude de l'émission spontanée en cascade de 2 photons

① But de ce §

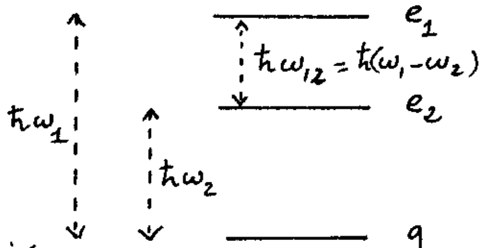


Fig 6

Un atome, initialement excité dans l'état e_1 retombe dans l'état fondamental f en passant intermédiairement par e_2 et en émettant successivement 2 photons de fréquences voisines de ω_{12} et ω_2.

Quelle est la répartition spectrale du rayonnement émis par l'atome au cours de cette cascade ?

② Sous-espaces $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. Etats initial et final - Amplitude de transition

$\mathcal{E}_1$: sous espace à 1 dimension sous tendu par $|e_1, 0\rangle$

$\mathcal{E}_2$: sous espace à une infinité de dimensions sous-tendu par l'ensemble des états $|e_2, \vec{k}\vec{\varepsilon}\rangle$ (pour tout $\vec{k}$ et $\vec{\varepsilon}$)

Etat initial : $|i\rangle = |e_1, 0\rangle \in \mathcal{E}_1$ (VII-32)

Etat final : $|f\rangle = |g; \vec{k}_A\vec{\varepsilon}_A, \vec{k}_B\vec{\varepsilon}_B\rangle \in \mathcal{S}_1$ (VII-33)

L'amplitude de probabilité pour que l'atome soit retombé dans l'état fondamental g en émettant 2 photons A et B d'énergies $\hbar\omega_A = \hbar c k_A$ et $\hbar\omega_B = \hbar c k_B$, s'obtient en intégrant le long de C_+ l'élément de matrice suivant de (VII-23) :

$$\frac{1}{z - \hbar\omega_A - \hbar\omega_B} \langle g, \vec{k}_A\vec{\varepsilon}_A, \vec{k}_B\vec{\varepsilon}_B | R_2(z)\left[1 + G_2(z) R_2(z)\right] G_1(z) | e_1, 0\rangle \qquad \text{(VII-34)}$$

(On a utilisé le fait que $\langle g, \vec{k}_A\vec{\varepsilon}_A, \vec{k}_B\vec{\varepsilon}_B|$ est bra propre de $\mathcal{P}_1 H_c \mathcal{P}_1$ de valeur propre $\hbar\omega_A + \hbar\omega_B$).

③ Approximations faites

L'expression (VII-34) est exacte. Nous allons maintenant introduire un certain nombre d'approximations

(i) Nous négligeons le facteur 1 du crochet de (VII-34)

Nous nous intéressons en effet à la cascade $e_1 \to e_2 \to g$.

L'atome passe intermédiairement par e_2. ω_A et ω_B seront donc voisins de ω_{12} et ω_2 et tous les processus correspondant à un état excité intermédiaire autre que e_2 (et compris entre g et e_1) seront non résonnants pour ces valeurs de ω_A et ω_B; ils contribueront de manière très faible à l'amplitude de transition

(ii) On remplace $G_1(z)$ par :

$$G_1(z) = \frac{1}{z - \hbar\omega_1 - \hbar\Delta_1 + i\hbar\frac{\Gamma_1}{2}} \qquad (\text{VII-35})$$

où $\hbar\omega_1$ est l'énergie de e_1, $\hbar\Delta_1$ et $\hbar\Gamma_1$ le Lamb-shift et la largeur naturelle de e_1 associés à l'émission spontanée d'un photon par un atome dans e_1 et qui tombe dans un état d'énergie inférieure (e_2 + tous les autres). On néglige la dépendance en z de Δ_1 et Γ_1, ce qui revient à négliger la décroissance non exponentielle de e_1 [on remplace dans $\Delta_1(z)$ et $\Gamma_1(z)$, z par $\hbar\omega_1 + i\varepsilon$].

(iii) Calcul approché de $G_2(z)$

Comme E_2 comporte plusieurs états, $G_2(z)$ a à la fois des éléments diagonaux et non diagonaux

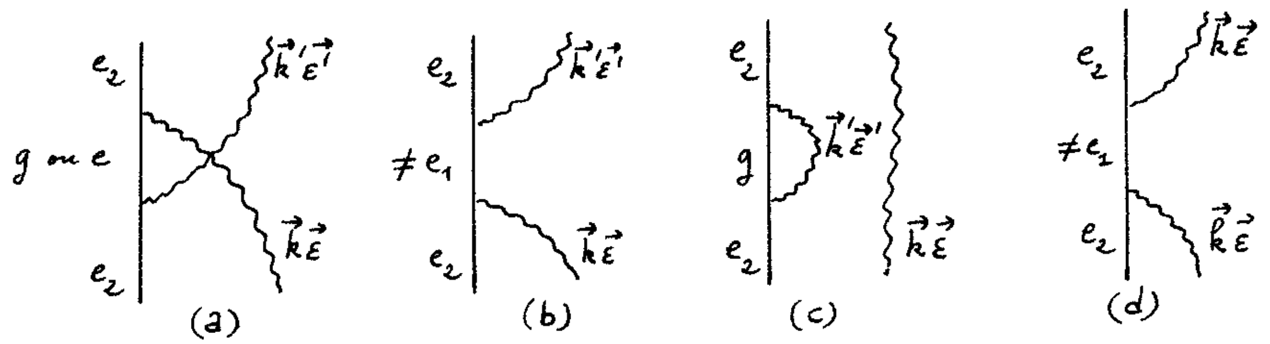


Fig 7

- Les éléments non diagonaux de $G_2(z)$ correspondent à la diffusion d'un photon $\vec{k}\vec{\varepsilon}$ par l'atome dans l'état e_2 (voir par exemple les figures 7a et 7b). Comme on est parti de l'état $|e_1, 0\rangle$, le photon $\vec{k}\vec{\varepsilon}$ a nécessairement été émis auparavant par l'atome. Cette diffusion ne peut être résonnante. Le projecteur $\mathcal{Q}_2$ qui apparaît dans les expressions VII-11 et VII-12 de G_2 exclut par exemple que l'état intermédiaire du diagramme 7b soit e_1, ce qui exclut toute diffusion résonnante du photon $\vec{k}\vec{\varepsilon}$ (qui, ayant été émis par e_1, a une fréquence voisine de ω_{12})
- Les éléments diagonaux de G_2 correspondent à l'émission spontanée du niveau e_2, le photon $\vec{k}\vec{\varepsilon}$ étant "spectateur" (voir fig 7c), ou à la diffusion vers l'avant du photon $\vec{k}\vec{\varepsilon}$ (voir 7d)
- Nous négligerons tous les processus de diffusion (non-résonnante) par l'atome d'un photon $\vec{k}\vec{\varepsilon}$ émis auparavant et ne garderons que les éléments diagonaux de G_2 où le photon $\vec{k}\vec{\varepsilon}$ est spectateur (fig 7c). Nous poserons donc

$$\langle e_2, \vec{k}'\vec{\varepsilon}' | G_2(z) | e_2, \vec{k}\vec{\varepsilon} \rangle = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\,\delta_{\vec{\varepsilon}\vec{\varepsilon}'}\,\frac{1}{z - \hbar\omega_2 - \hbar ck - \hbar\Delta_2 + i\hbar\frac{\Gamma_2}{2}} \qquad (\text{VII-36})$$

où $\hbar\Delta_2$ et $\hbar\Gamma_2$ sont le Lamb-shift et la largeur naturelle de e_2.

Dans les processus de la figure 7c, l'atome interagit avec tous les modes $\vec{k}'\vec{\varepsilon}'$ du champ, et le fait que le mode $\vec{k}\vec{\varepsilon}$ ne soit pas vide et contienne un photon introduit une correction négligeable. C'est pourquoi nous utilisons en VII-36 les quantités Δ_2 et Γ_2 relatives à l'état excité e_2 isolé

- On voit que les éléments diagonaux de $G_2(z)$ écrits en VII-36 peuvent être de l'ordre de $1/\hbar\Delta_2$ ou $1/\hbar\Gamma_2$ au voisinage de $z = \hbar\omega_2 + \hbar ck$. C'est ce qui justifie le fait de négliger les éléments non diagonaux de $G_2(z)$ qui sont de l'ordre de l'inverse d'une fréquence optique donc beaucoup plus petits.

(iv) Calcul approché de $R_2(z)$

On remplace $R_2(z)$ par son expression d'ordre le plus bas conduisant à un résultat non nul à partir de VII-34, c-à-d par V.

Les 4 approximations précédentes conduisent alors à l'expression suivante:

$$\frac{\langle g, \vec{k}_A\vec{\varepsilon}_A, \vec{k}_B\vec{\varepsilon}_B \,|\, V \,|\, e_2, \vec{k}_B\vec{\varepsilon}_B\rangle \langle e_2, \vec{k}_B\vec{\varepsilon}_B \,|\, V \,|\, e_1, 0\rangle}{(z-\hbar\omega_A-\hbar\omega_B)(z-\hbar\omega_2-\hbar\omega_B-\hbar\Delta_2+i\hbar\frac{\Gamma_2}{2})(z-\hbar\omega_1-\hbar\Delta_1+i\hbar\frac{\Gamma_1}{2})}$$

$$+ \text{ Terme analogue } A \rightleftarrows B \qquad (\text{VII-37})$$

pour l'élément de matrice de $P_1 G P_1$ entre $|i\rangle$ et $\langle f|$. Les 2 termes de (VII-37) correspondent aux 2 ordres possibles d'émission des 2 photons $\hbar\omega_A$ et $\hbar\omega_B$ (voir figures 8a et 8b)

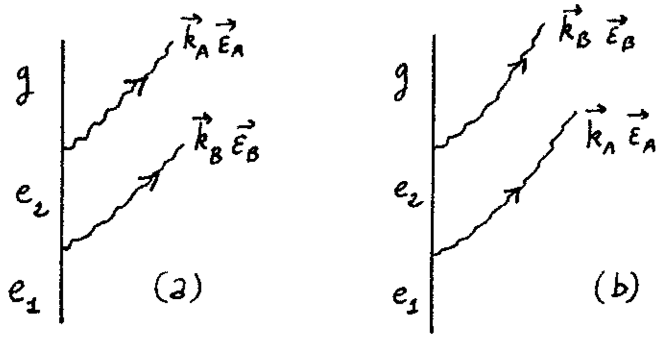


Fig. 8

④ Calcul de l'amplitude de transition

On s'intéresse à la distribution spectrale du rayonnement émis, c-à-d à la limite $t \to \infty$ de l'amplitude de transition. Lors de l'intégration le long du contour C_+, seul le pole sur l'axe réel de (VII-37), en $z = \hbar\omega_A + \hbar\omega_B$, donne une contribution qui ne tend pas vers zéro quand $t \to \infty$ (les contributions des poles associés aux état instable décroissent exponentiellement en $e^{-\Gamma_1 t/2}$ et $e^{-\Gamma_2 t/2}$). On obtient donc finalement pour l'amplitude de transition

$$\frac{V^A_{ge_2}\; V^B_{e_2e_1}}{(\omega_A-\omega_2-\Delta_2+i\frac{\Gamma_2}{2})(\omega_A+\omega_B-\omega_1-\Delta_1+i\frac{\Gamma_1}{2})} + \frac{V^B_{ge_2}\; V^A_{e_2e_1}}{(\omega_B-\omega_2-\Delta_2+i\frac{\Gamma_2}{2})(\omega_A+\omega_B-\omega_1-\Delta_1+i\frac{\Gamma_1}{2})} \qquad (\text{VII-38})$$

où

$$V^C_{\alpha\beta} = \langle \alpha, \vec{k}_C\vec{\varepsilon}_C \,|\, V \,|\, \beta, 0\rangle \qquad (\text{VII-39})$$

est l'élément de matrice correspondant à l'émission d'un photon $\vec{k}_C\vec{\varepsilon}_C$ par l'atome tombant de β à α. Nous négligerons la variation des V avec l'énergie des photons dont ils décrivent l'émission car cette variation est lente devant celle des dénominateurs.

La règle pour obtenir (VII-38) à partir des diagrammes (8a) et (8b) est simple. On ajoute aux énergies des états instables les énergies complexes $\Delta_1 - i\frac{\Gamma_1}{2}$ et $\Delta_2 - i\frac{\Gamma_2}{2}$, et on calcule la valeur des propagateurs correspondant à (8a) et (8b) pour l'énergie $\hbar\omega_A + \hbar\omega_B$ de l'état final qui est stable.

(5) Distribution spectral du rayonnement émis

– En élevant (VII-38) au carré (en module), on obtient la probabilité $I(\omega_A, \omega_B)$ d'avoir 2 photons émis de fréquences ω_A et ω_B. On a d'après (VII-38) :

$$I(\omega_A, \omega_B) = I(\omega_B, \omega_A) \qquad \text{(VII-40)}$$

– Un spectromètre ne mesure pas les corrélations entre les fréquences des 2 photons émis, mais la probabilité pour que l'un quelconque des 2 photons ait la fréquence ω_A. Un tel instrument mesure donc la densité spectrale réduite :

$$I(\omega_A) = \int d\omega_B \, I(\omega_A, \omega_B) \qquad \text{(VII-41)}$$

– En élevant (VII-38) au carré (en module), et en effectuant l'intégrale sur ω_B par la méthode des résidus, on obtient aisément :

$$I(\omega_A) \sim \frac{\left|V^A_{ge_2} V^B_{e_2e_1}\right|^2}{\Gamma_1} \frac{1}{(\omega_A - \tilde{\omega}_2)^2 + \left(\frac{\Gamma_2}{2}\right)^2} + \frac{\left|V^B_{ge_2} V^A_{e_2e_1}\right|^2 (\Gamma_1 + \Gamma_2)}{\Gamma_1 \Gamma_2} \frac{1}{(\omega_A - \tilde{\omega}_{12})^2 + \left(\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2}\right)^2}$$
$$- \frac{1}{\Gamma_1} 2\mathcal{Re} \frac{V^{B*}_{ge_2} V^{A*}_{e_2e_1} V^A_{ge_2} V^B_{e_2e_1}}{\left(\omega_A - \tilde{\omega}_2 + i\frac{\Gamma_2}{2}\right)\left(\omega_A - \tilde{\omega}_{12} + i\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2}\right)} \qquad \text{(VII-42)}$$

où l'on a posé

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_2 = \omega_2 + \Delta_2 \\ \tilde{\omega}_{12} = \omega_1 + \Delta_1 - \omega_2 - \Delta_2 \end{cases} \qquad \text{(VII-43)}$$

– Les 3 termes de (VII-42) proviennent respectivement du carré du 1er terme de (VII-38), du carré du 2ème terme de (VII-38) et du double produit (terme d'interférence entre 8a et 8b)

(i) Cas de 3 niveaux e_1, e_2, g non-équidistants : $|\tilde{\omega}_{12} - \tilde{\omega}_2| \gg \Gamma_1, \Gamma_2$

Les 2 parenthèses du dénominateur du 3ème terme de (VII-42) ne peuvent jamais être simultanément petites. Le terme d'interférence de (VII-42) est donc plus petit que les 2 termes carrés par un facteur de l'ordre de $|\Gamma/(\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_{12})| \ll 1$. Nous le négligerons.

La distribution spectrale du rayonnement émis consiste donc en 2 courbes de Lorentz (fig. 9)

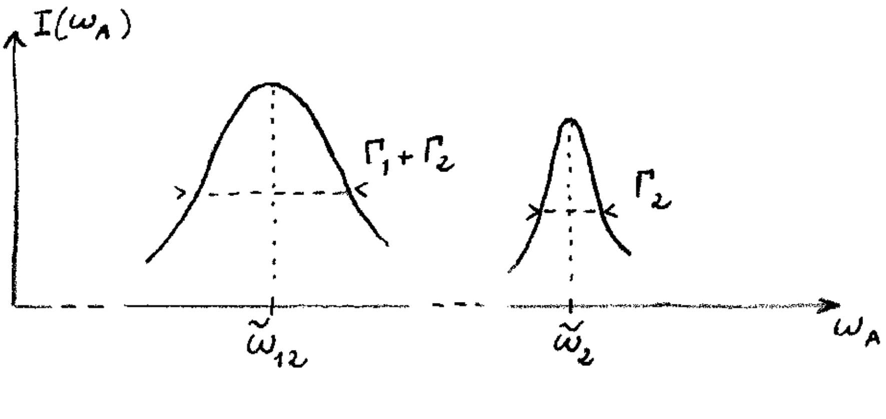


Fig 9

On obtient une courbe centrée en $\tilde{\omega}_2 = \omega_2 + \Delta_2$, de largeur Γ_2 (transition $e_2 \leftrightarrow g$) et une autre courbe centrée en $\tilde{\omega}_{12} = \omega_1 + \Delta_1 - \omega_2 - \Delta_2$ de largeur $\Gamma_1 + \Gamma_2$ (transition $e_1 \leftrightarrow e_2$). Une transition reliant 2 niveaux instables est donc deplacée d'une quantité égale à la différence entre les lamb-shift des 2 états ; elle a pour largeur la somme des largeurs naturelle des 2 états.

(ii) Cas de 3 niveaux équidistants ($|\tilde{\omega}_{12} - \tilde{\omega}_2| \lesssim \Gamma_1, \Gamma_2$)

Cette fois le terme d'interférence de VII-42 est important, et il faut le garder car il peut modifier profondément les prévision précédentes. Nous allons illustrer ce point en étudiant plus en détail l'émission spontanée d'un oscillateur harmonique.

E - Emission spontanée d'un oscillateur harmonique

① Largeur naturelle et lamb-shift du niveau $|\varphi_n\rangle$

A l'approximation dipolaire électrique, la largeur naturelle et le lamb-shift du niveau d'énergie $|\varphi_n\rangle$ d'un oscillateur harmonique sont proportionnels à $|\langle\varphi_{n-1}|X|\varphi_n\rangle|^2$, c-à-d à n.

Un déplacement du niveau $|\varphi_n\rangle$, proportionnel à n, ne modifie pas l'équidistance entre les niveaux d'énergie. Nous supposons le lamb-shift réinclus dans la fréquence ω_0 de l'oscillateur. La largeur naturelle Γ_n du niveau $|\varphi_n\rangle$ sera notée

$$\Gamma_n = n\Gamma \qquad \text{(VII-44)}$$

où Γ est la largeur naturelle du niveau $|\varphi_1\rangle$

Une généralisation brutale des résultats obtenus au § D5 précédent laisserait croire que la raie émise par l'oscillateur tombant de $|\varphi_n\rangle$ à $|\varphi_{n-1}\rangle$ a une largeur égale à $\Gamma_n + \Gamma_{n-1} = (2n-1)\Gamma$, ce qui signifierait que la largeur spectrale du rayonnement émis par un oscillateur croit avec l'excitation de cet oscillateur. Un tel résultat est faux comme nous allons le voir maintenant.

② Raie émise par l'oscillateur initialement excité en $|\varphi_1\rangle$

C'est une lorentzienne centrée en ω_0 et de largeur Γ

③ Raie émise par l'oscillateur initialement excité en $|\varphi_2\rangle$

On a alors une cascade $|\varphi_2\rangle \to |\varphi_1\rangle \to |\varphi_0\rangle$. Les 2 diagrammes analogues à ceux de la figure 8 sont représentés en 10.

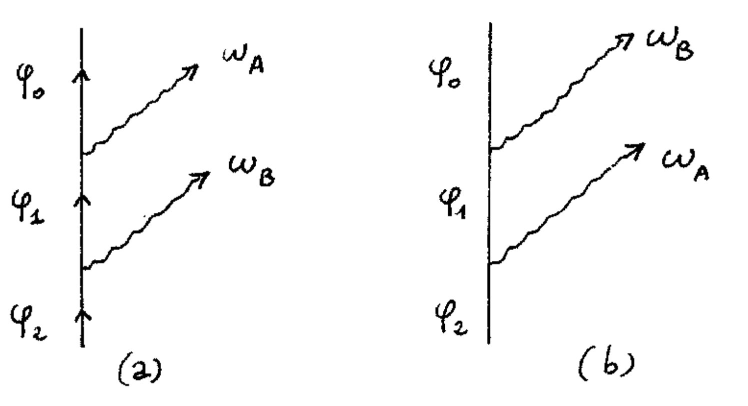


Fig 10

Comme les 3 niveaux $|\varphi_2\rangle$, $|\varphi_1\rangle$, $|\varphi_0\rangle$ sont équidistants les 2 diagrammes (10 a) et (10 b) peuvent être <u>simultanément</u> importants quand ω_A et ω_B sont voisins de ω_0, de sorte que le carré de leur somme n'est pas égal à la somme de leur carrés. Pour le montrer, appliquons la formule (VII-38) au cas qui nous intéresse ici. On obtient pour l'amplitude globale de transition une quantité proportionnelle à :

$$\frac{\sqrt{1}\,\sqrt{2}}{\left(\omega_A-\omega_0+i\frac{\Gamma}{2}\right)\left(\omega_A+\omega_B-2\omega_0+i\Gamma\right)}+\frac{\sqrt{1}\,\sqrt{2}}{\left(\omega_B-\omega_0+i\frac{\Gamma}{2}\right)\left(\omega_A+\omega_B-2\omega_0+i\Gamma\right)}=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\left(\omega_A+\omega_B-2\omega_0+i\Gamma\right)}\left(\frac{1}{\omega_A-\omega_0+i\frac{\Gamma}{2}}+\frac{1}{\omega_B-\omega_0+i\frac{\Gamma}{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{\left(\omega_A-\omega_0+i\frac{\Gamma}{2}\right)\left(\omega_B-\omega_0+i\frac{\Gamma}{2}\right)} \tag{VII-45}$$

On voit que la <u>somme des 2 amplitudes</u> associées à (10-a) et (10-b) se <u>factorise</u> et que les fréquences des 2 photons émis en cascade sont non-corrélées. En élevant au carré (VII-45) et en intégrant sur ω_B, on trouve que la distribution spectrale du rayonnement émis est simplement :

$$\frac{1}{(\omega_A-\omega_0)^2+\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \tag{VII-46}$$

c-à-d une Lorentzienne centrée en ω_0 et de largeur Γ (comme pour le cas de l'excitation en $|\varphi_1\rangle$). C'est donc bien le terme d'interférence entre (10 a) et (10 b) qui fait disparaître la raie de largeur 3Γ et centrée en ω_0 qui provient de l'intégration sur ω_B du carré de l'amplitude associée à (10 b).

④ <u>Raie émise par l'oscillateur initialement excité en $|\varphi_3\rangle$</u>

– Il y a maintenant $n! = 3! = 6$ amplitudes différentes correspondant aux 6 ordres possibles d'émission des photons $\omega_A, \omega_B, \omega_C$. Ces amplitudes se calculent au moyen de la formule (VII-30) et des mêmes approximations que celles effectuées au § D-3. Comme dans ce §, on trouve qu'il suffit d'ajouter l'énergie complexe $-in\Gamma/2$ à l'énergie de chaque état intermédiaire instable $|\varphi_n\rangle$ et d'évaluer le propagateur correspondant à un diagramme donné pour la valeur de l'énergie de l'état stable final, qui vaut ici $\hbar\omega_C+\hbar\omega_B+\hbar\omega_C$. Ainsi l'amplitude associée au diagramme de la figure 11 vaut

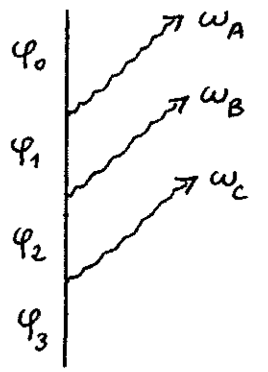


Fig 11

$$\sqrt{3!}\;\frac{1}{\left(\omega_A-\omega_0+i\frac{\Gamma}{2}\right)}\;\frac{1}{\left(\omega_A+\omega_B-2\omega_0+i\Gamma\right)}\;\frac{1}{\left(\omega_A+\omega_B+\omega_C-3\omega_0+3i\frac{\Gamma}{2}\right)} \tag{VII-47}$$

Il faut maintenant sommer (VII-47) sur toutes les permutations possibles des 3 photons $\omega_A\ \omega_B\ \omega_C$

– Sommons tout d'abord sur les 2! permutations laissant inchangé le 1er photon émis ω_C. D'après les résultats du § 3 précédent :

$$\sum_{\text{permut } A,B} \frac{1}{(\omega_A-\omega_0+i\frac{\Gamma}{2})(\omega_A+\omega_B-2\omega_0+i\Gamma)} = \frac{1}{(\omega_A-\omega_0+i\frac{\Gamma}{2})(\omega_B-\omega_0+i\frac{\Gamma}{2})} \quad \text{(VII-48)}$$

En multipliant haut et bas (VII-48) par $(\omega_C-\omega_0+i\frac{\Gamma}{2})$, on obtient pour amplitude de probabilité de l'ensemble des processus où le 1er photon émis est ω_C [sommation de VII-47 sur les permutations de A, B] :

$$\sqrt{3!}\quad \frac{1}{\omega_A+\omega_B+\omega_C-3\omega_0+3i\frac{\Gamma}{2}} \times \frac{\omega_C-\omega_0+i\frac{\Gamma}{2}}{(\omega_A-\omega_0+i\frac{\Gamma}{2})(\omega_B-\omega_0+i\frac{\Gamma}{2})(\omega_C-\omega_0+i\frac{\Gamma}{2})} \quad \text{(VII-49)}$$

– Il faut maintenant sommer $n=3$ expressions analogues à (VII-49) et différant par la fréquence ω_C du 1er photon émis. Ces 3 expressions ont même dénominateur. Il suffit donc d'ajouter les numérateurs

$$\sum_C (\omega_C-\omega_0+i\frac{\Gamma}{2}) = \omega_A+\omega_B+\omega_C-3\omega_0+3i\frac{\Gamma}{2} \quad \text{(VII-50)}$$

ce qui simplifie le 1er dénominateur de (VII-49) et donne finalement pour l'amplitude de transition globale

$$\frac{\sqrt{3!}}{(\omega_A-\omega_0+i\frac{\Gamma}{2})(\omega_B-\omega_0+i\frac{\Gamma}{2})(\omega_C-\omega_0+i\frac{\Gamma}{2})} \quad \text{(VII-51)}$$

5 Généralisation : oscillateur initialement dans l'état $|\varphi_n\rangle$

Le raisonnement précédent se généralise aisément par récurrence. On somme d'abord sur les $(n-1)!$ processus laissant inchangé le 1er photon émis, ce qui permet d'utiliser la factorisation supposée valable pour une excitation initiale du niveau $|\varphi_{n-1}\rangle$. Puis on somme l'expression ainsi obtenue (et analogue de VII-49) sur les n fréquences possibles du 1er photon émis, ce qui permet d'éliminer le dénominateur $(\omega_A+\omega_B+\cdots+\omega_N-n\omega_0+ni\frac{\Gamma}{2})$ et d'obtenir l'amplitude

$$\frac{\sqrt{N!}}{(\omega_A-\omega_0+i\frac{\Gamma}{2})(\omega_B-\omega_0+i\frac{\Gamma}{2})\cdots\cdots(\omega_N-\omega_0+i\frac{\Gamma}{2})} \quad \text{(VII-52)}$$

Les N photons émis ont des fréquences non-corrélées. La distribution spectrale du rayonnement émis, obtenue en élevant (VII-52) au carré et en intégrant sur $\omega_B, \omega_C, \ldots \omega_N$ est toujours une lorentzienne centrée en ω_0 et de largeur Γ.

Références sur les opérateurs de projection.

1 Cours de N. KROLL dans les Houches 64.
2 – L. MOWER Phys. Rev. 142, 799 (1966) et 165, 145 (1968)
3 – A.S. GOLDHABER and K.M. WATSON Phys. Rev. 160, 1151 (1967)

Autres problèmes intéressants non abordés

– Corrélations entre les polarisations de 2 photons émis dans une cascade.
– Corrélations angulaires perturbées par un champ magnétique