

① Démonstration du fait que le prolongement analytique de $G_i(z)$ a un pôle dans le 2^{ème} feuillet de Riemann.

- On se limite au cas d'un couplage faible. D'après (III-8) :

$$\left\{ \begin{array}{l} z = E + i\epsilon \\ z = E - i\epsilon \end{array} \right. \quad G_i(z) = \frac{1}{z - E_i - \frac{\hbar}{2}\Delta(E) + i\frac{\hbar}{2}\frac{\Gamma(E)}{2}} \quad (IV-1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = E + i\epsilon \\ z = E - i\epsilon \end{array} \right. \quad G_i(z) = \frac{1}{z - E_i - \frac{\hbar}{2}\Delta(E) - i\frac{\hbar}{2}\frac{\Gamma(E)}{2}} \quad (IV-2)$$

- Dans (IV-1) $\Gamma(E) > 0$ de même que $\text{Im} z$; la partie imaginaire du dénominateur de (IV-1) ne s'annule jamais. Il en est de même pour (IV-2) où les 2 parties imaginaires sont < 0 . On retrouve bien que $G_i(z)$ n'a pas de pôle hors de l'axe réel dans le 1^{er} feuillet de Riemann.

- Au voisinage de $z = E_i$, $z - E_i$ peut s'annuler dans (IV-1) et (IV-2) alors que $\Delta(E)$ et $\Gamma(E)$ varient lentement (largeur L de $\Gamma(E) \gg \Gamma(E_i)$)
On peut donc, au voisinage de $z = E_i$, remplacer dans les 2 fonctions $\Delta(E)$ et $\Gamma(E)$ de (IV-1) et (IV-2) E par E_i , ce qui donne, au dessus de l'axe réel par exemple :

$$z \text{ voisin de } E_i \text{ avec } \text{Im} z > 0 \quad G_i(z) \approx \frac{1}{z - E_i - \frac{\hbar}{2}\Delta(E_i) + i\frac{\hbar}{2}\frac{\Gamma(E_i)}{2}} \quad (IV-3)$$

- Prolongeons $G_i(z)$ dans le 2^{ème} feuillet de Riemann, en traversant la coupure sur l'axe réel de haut en bas.

La fonction prolongée de (IV-1), que nous noterons $\tilde{G}_i(z)$, se déduit par continuité de (IV-1) et ressemble donc au prolongement de (IV-3). On peut donc écrire

$$z \text{ voisin de } E_i \text{ avec } \text{Im} z < 0 \quad \tilde{G}_i(z) \approx \frac{1}{z - E_i - \frac{\hbar}{2}\Delta(E_i) + i\frac{\hbar}{2}\frac{\Gamma(E_i)}{2}} \quad (IV-4)$$

Notons que la fonction prolongée (IV-4) ne ressemble pas en dessous de l'axe réel à la détermination initiale $G_i(z)$ (dans le 1^{er} feuillet de Riemann) et que est donnée par IV-2.

- Comme $\text{Im} z < 0$ et $\Gamma(E_i) > 0$ dans (IV-4), le dénominateur de la fonction prolongée peut maintenant s'annuler. $\tilde{G}_i(z)$ a donc un pôle dans le 2^{ème} feuillet de Riemann dont la position est approximativement donnée par

$$z_0 \approx E_i + \frac{\hbar}{2}\Delta(E_i) - i\frac{\hbar}{2}\frac{\Gamma(E_i)}{2} \quad (IV-5)$$

L'abscisse et l'ordonnée de ce pôle donnent respectivement l'énergie et la largeur de l'état instable.

- C'est la présence de ce pôle dans le 2^{ème} feuillet de Riemann qui fait que la détermination initiale (IV-1) de $G_i(z)$ varie très vite au voisinage de $E_i + \frac{\hbar}{2}\Delta(E_i)$

② Autre contour d'intégration possible.

Au lieu de faire comme plus haut et de garder C_+ et C_- , afin de faire apparaître $G_i(E-i\epsilon) - G_i(E+i\epsilon)$ (cf III-10), on peut ne garder que C_+ , et par suite $G_i(E+i\epsilon)$, puisque C_- donne une contribution nulle pour $t > 0$

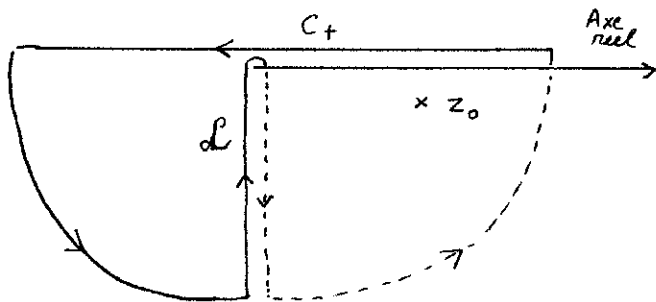


Fig. 17

Pour fermer le contour par continuité, il faut nécessairement passer dans le 2^{ème} feuillet de Riemann entourant le pôle z_0 qui s'y trouve, puis revenir dans le 1^{er} feuillet au moyen du lacet L (voir figure 17).

La contribution des 1/4 de cercle est nulle (à cause de $e^{-izt/t}$), celle du pôle donne la décroissance exponentielle, celle du lacet la décroissance en $1/t^{n+1}$.

③ Une approximation très souvent faite.

Comme $\Delta(E)$ et $\Gamma(E)$ sont très petits, on n'en tient compte ^(le long de C_+) de manière précise qu'au voisinage de $z = E_i$ où $z - E_i$ s'annule et où $\Delta(E)$ et $\Gamma(E)$ peuvent alors jouer un rôle important.

On remplace donc dans (IV-1) $\Delta(E)$ et $\Gamma(E)$ par $\Delta(E_i)$ et $\Gamma(E_i)$ non seulement au voisinage de $E = E_i$ comme en (IV-3) mais pour tout E . L'argument est que si $|E - E_i| \gg \hbar \Gamma(E_i)$, $\hbar \Delta(E)$ et $\hbar \Gamma(E)$ sont négligeables devant $E - E_i$ et le fait de les remplacer par $\hbar \Delta(E_i)$ et $\hbar \Gamma(E_i)/2$ n'introduit pas alors une grosse erreur.

(Dans ce point de vue, on ne garde ainsi que C_+ pour $t \geq 0$)

On oublie donc $G_i(z)$ et on introduit une nouvelle fonction de la variable complexe z :

$$\hat{G}_i(z) = \frac{1}{z - E_i - \hbar \Delta(E_i) + i \frac{\hbar}{2} \Gamma(E_i)} \quad (IV-6)$$

qui a des propriétés analytiques complètement différentes de celles de $G_i(z)$ mais qui est très proche de $G_i(z)$ le long de C_+ .

$\hat{G}_i(z)$ n'a qu'un pôle en $z = z_0$ (où z_0 est donné par IV-5) et n'a plus de coupure. L'intégration le long de C_+ fermée par un 1/2 cercle dans le demi-plan inférieur ne donne que le terme exponentiel. Une telle approximation fait donc perdre toutes les corrections aux temps très courts et très longs.

④ lien avec la théorie des perturbations.

$G_i(z)$ a été calculé sans approximations à partir de $G = G_0 + G_0 V G_0 + G_0 V G_0 V G_0$. On aurait pu aussi calculer $G_i(z)$ perturbativement à partir du développement :

$$G = G_0 + G_0 V G_0 + G_0 V G_0 V G_0 + G_0 V G_0 V G_0 V G_0 + \dots \quad (IV-7)$$

L'expression (III-4) rassemble donc la série des perturbations. Si l'on représente par un double trait le propagateur perturbé G , par un trait le propagateur non perturbé G_0 , par un rond V , on peut écrire (IV-7) sous la forme (après avoir pris l'élément de matrice entre $\langle \varphi_i |$ et $|\varphi_i \rangle$)

$$i \parallel = i | + \begin{array}{c} i \\ | \\ \alpha \\ | \\ i \end{array} + \begin{array}{c} i \\ | \\ \alpha \\ | \\ i \\ | \\ \alpha \\ | \\ i \end{array} + \dots \quad (IV-8)$$

Pour l'émission spontanée : $|\varphi_i \rangle = |e, 0\rangle$ $|\alpha \rangle = |f, \vec{k}, \vec{E}\rangle$ et (IV-8) devient (en représentant les photons par des traits ondulés) :

$$e \parallel = e | + \begin{array}{c} e \\ | \\ f \\ | \\ e \end{array} \begin{array}{c} \vec{k} \\ \vec{E} \end{array} + \begin{array}{c} e \\ | \\ f \\ | \\ e \end{array} \begin{array}{c} \vec{k}' \\ \vec{E}' \end{array} + \dots \quad (IV-9)$$

Si l'on fait la même approximation qu'en (IV-6), c-à-d si l'on remplace dans tous les propagateurs des états α de (IV-8) z par E_i , le développement (IV-8) donne après intégration sur le contour C_+ (et en posant $\Gamma_i = \Gamma(E_i)$, $\Delta_i = \Delta(E_i)$)

$$1 - \left(\frac{\Gamma_i}{2} + i\Delta_i\right)t + (-1)^2 \left(\frac{\Gamma_i}{2} + i\Delta_i\right)^2 \frac{t^2}{2!} + \dots = e^{-\left(\frac{\Gamma_i}{2} + i\Delta_i\right)t} \quad (IV-10)$$

Chacun des termes de (IV-8) conduit à un terme du développement en série de l'exponentielle décroissante.

Pour obtenir un comportement exponentiel, il faut donc resommer toute la série des perturbations. Sinon on aurait un comportement polynomial.

D'où l'intérêt d'essayer d'obtenir des formules exactes du type de (III-4) et de faire éventuellement des approximations seulement au stade final [par exemple celle qui consiste à remplacer la quantité $\int d\alpha' \frac{|V(\alpha')|^2}{z - E'}$ de (III-4) par $t\Delta(E_i) + i\Gamma(E_i)/2$ ce qui conduit à (IV-6)].