

Evolution d'un état discret couplé à un continuum

Modèle simplifié (suite).

D. Autre méthode (non-perturbative) de résolution approchée de l'équation de Schrödinger.

① Couplage faible avec un continuum large $(L \gg \Gamma_0)$. Décroissance exponentielle.

Principe Remplacer dans l'équation intégrodifférentielle (I-11) $b_i(t')$ non par $b_i(0)$ mais par $b_i(t)$

Justification

Récrivons (I-11) sous la forme (on pose $\tau = t - t'$) :

$$\frac{d}{dt} b_i(t) = \int_0^t dt' g(E_i, t-t') b_i(t') = \int_0^t d\tau g(E_i, \tau) b_i(t-\tau) \quad (\text{II-1})$$

avec
$$g(E_i, \tau) = -\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \Gamma(E) e^{i(E_i - E)\tau/\hbar} \quad (\text{II-2})$$

(on a utilisé $\Gamma(E) = 0$ pour $E < 0$). Le "noyau" $g(E_i, \tau)$ qui caractérise la "mémoire" du processus est la T.F. de $\Gamma(E)$. Il a donc une largeur de l'ordre de $1/L$.

Or d'après l'étude perturbative précédente (§ C3), le temps caractéristique d'évolution de $b_i(t)$ est $1/\Gamma_0$, très long devant $1/L$ (puisque nous supposons ici $L \gg \Gamma_0$). Dans l'intervalle $[0 - 1/L]$ de l'intégrale (II-1) où $g(E_i, \tau)$ varie très vite, $b_i(t-\tau)$ varie très peu et peut donc être remplacé par $b_i(t)$

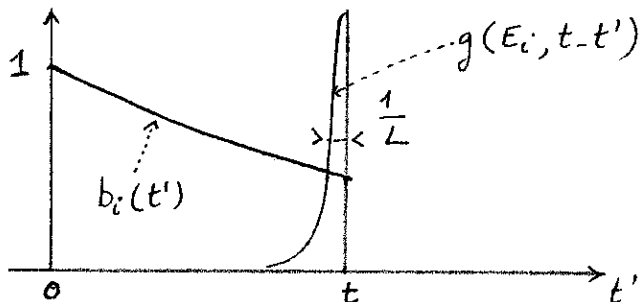


Fig 6

L'équation (II-1) peut donc être remplacé par l'équation approchée :

$$\frac{d}{dt} b_i(t) = b_i(t) \int_0^t d\tau g(E_i, \tau) = -b_i(t) \frac{1}{2\pi\hbar} \int_0^\infty dE \Gamma(E) \int_0^t d\tau e^{i(E_i - E)\tau/\hbar} \quad (\text{II-3})$$

La double intégrale est la même que celle rencontrée au § C (où l'on avait remplacé $b_i(t')$ par 1), et vaut donc $A(t) + iB(t)$, c-à-d pour $t \gg \frac{1}{L}$, $\frac{\Gamma_i}{2} + i\Delta_i$ (cf I-23 et I-24).

En conclusion, pour $t \gg \frac{1}{L}$, mais pas nécessairement petit devant $1/\Gamma_0$, l'équation intégrodifférentielle (I-11) peut être remplacée par l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt} b_i(t) \approx -\left(\frac{\Gamma_i}{2} + i\Delta_i\right) b_i(t) \quad (\text{II-4})$$

dont la solution est, compte tenu de la condition initiale $b_i(0) = 1$:

$$b_i(t) = e^{-(\frac{\Gamma_i}{2} + i\Delta_i)t} \quad (\text{II-5}) \quad \text{II-2}$$

En reportant (II-5) dans (I-8-b) et en intégrant, on obtient compte tenu de (I-9) et en posant $\delta E_i = \hbar \Delta_i$

$$b(\alpha, t) = \frac{v(\alpha)}{\hbar} \frac{1 - e^{-\Gamma_i t/2} e^{i(E - E_i - \delta E_i)t/\hbar}}{[(E - E_i - \delta E_i)/\hbar] + i\Gamma_i/2} \quad (\text{II-6})$$

Discussion physique (voir référence 2)

(i) $\tau_i = 1/\Gamma_i$: durée de vie de l'état initial : $|b_i(t)|^2 = e^{-t/\tau_i}$ (II-7)

(ii) $\delta E_i = \hbar \Delta_i = \frac{\hbar}{2\pi} \int dE \mathcal{P}\left(\frac{1}{E_i - E}\right) \Gamma(E) = \int_0^\infty dE \mathcal{P}\left(\frac{1}{E_i - E}\right) \int d\beta \rho(\beta, E) |v(\beta, E)|^2$
 $= \mathcal{P} \int d\alpha \frac{|\langle \alpha | V | \psi_i \rangle|^2}{E_i - E}$ (II-8)

Déplacement (au 2^{em} ordre de la théorie des perturbations) de l'état discret $|\psi_i\rangle$ du au couplage avec les états $|\alpha\rangle$ (la partie principale éliminant la singularité en $E = E_i$). Dans le cas de l'émission spontanée, δE_i est le "Lamb-shift" de l'état excité.

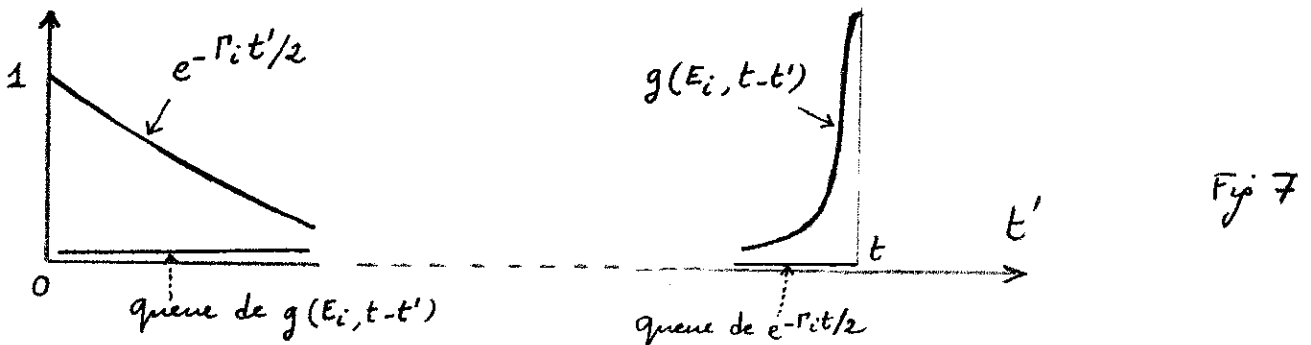
(iii) $|b(\alpha, t)|^2 \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} |v(\alpha)|^2 \frac{1}{(E - E_i - \delta E_i)^2 + \hbar^2 \Gamma_i^2/4}$ (II-9)

Distribution en énergie des états du continuum qui sont remplis à $t = \infty$ après la désintégration de l'état discret initial : courbe de Lorentz centrée en $E_i + \delta E_i$ et de largeur $\hbar \Gamma_i$.

Cas de l'émission spontanée : largeur naturelle des raies spectrales.

Insuffisances de la méthode précédente pour décrire le comportement aux temps très longs ($t \gg 1/\Gamma_0$)

Admettons que la solution (II-5) soit valable pour $t \gg 1/\Gamma_0$ et montrons que l'on aboutit à une contradiction, à savoir que $db_i(t)/dt$ ne décroît pas exponentiellement. Reprenons la figure 6 pour $t \gg 1/\Gamma_0$.



Pour avoir $\frac{d}{dt} b_i(t)$ il faut intégrer sur t' le produit des 2 fonctions $e^{-\Gamma_i t'/2}$ et $g(E_i, t-t')$ représentées ci-dessus. Nous montrons ci-dessous que, bien qu'ayant une largeur très étroite, de l'ordre de $1/L \ll 1/\Gamma_0$, la fonction $g(E_i, t-t')$ a une queue qui décroît beaucoup moins vite qu'exponentiellement, en $[1/(t-t')]^{n+1}$, où n est un entier qui sera défini. Pour $t \gg 1/\Gamma_0$, la contribution à l'intégrale du produit des 2 fonctions de la région $t' \approx t$ (qui était la

seule envisagé plus haut) est exponentiellement petite (en $e^{-\Gamma_0 t/2}$), alors que la contribution de la région $t \sim 0$ n'est qu'en $(1/t)^{n+1}$ et peut par suite l'emporter. Donc $db_i(t)/dt$ ne décroît pas exponentiellement.

L'approximation de "mémoire très courte" est donc insuffisante aux temps très longs $t \gg 1/\Gamma_0$. La valeur de $b_i(t)$ est devenue tellement petite que les valeurs passées de $b_i(t')$ (avec $t' \sim 0$), qui sont beaucoup plus grandes, finissent par contribuer de manière significative compte tenu du fait que la mémoire du processus ne décroît pas exponentiellement dans le passé.

Comportement de $g(E_i, t-t')$ pour $t-t' \gg 1/\Gamma_0$

Précisons tout d'abord le comportement de $\Gamma(E)$ pour $E \rightarrow 0$.

On suppose

$$\Gamma(E) \underset{E \rightarrow 0}{\sim} \Gamma_0 \left(\frac{E}{E_0}\right)^n \tag{II-10}$$

où n est un entier > 0 et où Γ_0 et E_0 sont l'ordonnée et l'abscisse du maximum de $\Gamma(E)$. Pour l'émission spontanée, $\rho(E) \sim E^2$ et $|v(E)|^2 \sim E$ pour $E \rightarrow 0$, de sorte que:

$$\Gamma(E) \sim E^3 \tag{II-11}$$

Récrivons $g(E_i, \tau)$ sous la forme

$$g(E_i, \tau) = -\frac{1}{2\pi\hbar} e^{iE_i\tau/\hbar} \int_0^\infty dE \Gamma(E) e^{-iE\tau/\hbar} \tag{II-12}$$

puisque $\Gamma(E) = 0$ pour $E < 0$. Supposons $\Gamma(z)$ analytique dans le plan complexe et considérons l'intégrale de $\Gamma(z) e^{-iz\tau/\hbar}$ le long du contour de la figure 8

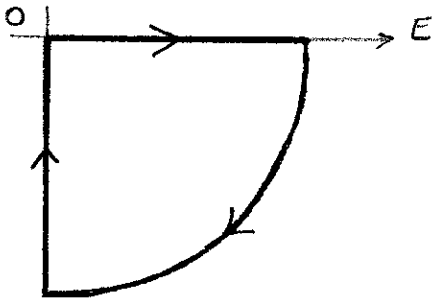


Fig 8

Comme $\text{Im}(z)\tau < 0$, la contribution du quart de cercle est nulle lorsque $\tau \rightarrow \infty$. Comme il n'y a pas de pôle à l'intérieur du contour, l'intégrale le long de l'axe réel est égale à l'intégrale le long de l'axe imaginaire.

$$\int_0^\infty dE \Gamma(E) e^{-iE\tau/\hbar} = i \int_0^{-\infty} dy e^{y\tau/\hbar} \Gamma(iy) = -i \int_0^\infty dy e^{-y\tau/\hbar} \Gamma(-iy) \tag{II-13}$$

L'exponentielle $e^{-y\tau/\hbar}$ coupe les contributions de $\Gamma(-iy)$ pour $y \gg \frac{\hbar}{\tau}$, ce qui montre que, pour $\tau \rightarrow \infty$, seul le comportement de $\Gamma(-iy)$ au voisinage de $y = 0$ intervient. En utilisant (II-10), on obtient, compte tenu de (II-12) et (II-13):

$$g(E_i, \tau) \underset{\tau \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{i}{2\pi\hbar} e^{iE_i\tau/\hbar} \int_0^\infty dy e^{-y\tau/\hbar} \Gamma_0 \left(\frac{-iy}{E_0}\right)^n = -\frac{(i)^{n+1}}{2\pi} \frac{e^{iE_i\tau/\hbar}}{\tau^{n+1}} \frac{\hbar^n}{E_0^n} \Gamma_0 \underbrace{\int_0^\infty dx e^{-x} x^n}_{= n!} \tag{II-14}$$

$g(E_i, \tau)$ décroît bien en $\frac{1}{\tau^{n+1}}$

② Couplage fort avec un continuum étroit $(\Gamma_0 \gg L)$ - Précession de Rabi (II-4)

Principe Repartir de l'équation intégrodifférentielle (I-11) et dériver les 2 membres,

$$\frac{d^2}{dt^2} b_i(t) = - \left(\frac{1}{2\hbar k} \int_0^\infty \Gamma(E) dE \right) b_i(t) + \frac{1}{2\hbar k} \int_0^\infty dE \int_0^t dt' \Gamma(E) \frac{i(E_i - E)}{\hbar} e^{\frac{i(E_i - E)(t - t')}{\hbar}} b_i(t')$$

$= \Omega_1^2$ d'après (I-16) (II-15)

Négliger le dernier terme de (II-15), ce qui donne

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \Omega_1^2 \right) b_i(t) = 0 \quad (II-16)$$

dont la solution est, compte tenu des conditions initiales

$$b_i(t) = \cos \Omega_1 t$$

Justifications

Calculons un ordre de grandeur très grossier du terme négligé par rapport aux 2 autres (qui sont en $\Omega_1^2 b_i(t)$).

La double intégrale de (II-15) ressemble beaucoup à celle qui donne $\frac{d}{dt} b_i(t)$ [voir I-11] à part que $\Gamma(E)$ est remplacé par $\Gamma(E) \frac{i(E_i - E)}{\hbar}$.

- Si $|E_i - E_0| \gg \hbar L$ (voir figure 1), on peut remplacer $E_i - E$ par $E_i - E_0$. Le dernier terme de (II-15) peut alors s'écrire $i \frac{E_i - E_0}{\hbar} \frac{d}{dt} b_i(t)$ et son ordre de grandeur est $\frac{|E_i - E_0|}{\hbar} \Omega_1 b_i$.

Or, nous avons supposé $|E_i - E_0| \ll \hbar \Omega_1$ (cf page I-8 après la formule I-27). Le dernier terme de (II-15) est alors négligeable devant les autres.

De toute manière, on pourrait résoudre (II-15) en remplaçant le dernier terme par $i \frac{(E_i - E_0)}{\hbar} \frac{d}{dt} b_i(t)$. On trouverait en effet juste remplacer la fréquence de Rabi Ω_1 par $[\Omega_1^2 + \left(\frac{E_i - E_0}{2\hbar}\right)^2]^{1/2}$.

- Si $|E_i - E_0| \lesssim \hbar L$, on peut écrire $\frac{|E_i - E|}{\hbar} \Gamma(E) \lesssim L \Gamma(E)$, et l'ordre de grandeur du 3^{ème} terme de (II-15) est $L \frac{db_i}{dt} \approx L \Omega_1 b_i \ll \Omega_1^2 b_i$.

Critiques

Le calcul d'ordre de grandeur précédent est très grossier.

Le 3^{ème} terme de (II-15) produit-il simplement un changement de la fréquence de Rabi, ou introduit-il en plus un amortissement? Que se passe-t-il pour $t \gg \frac{1}{\Omega_1}$, pour $t \gg \frac{1}{L}$?

Pour répondre de manière plus précise aux critiques soulevées à la fin des §§ D1 et D2, il est plus simple de travailler dans l'espace des fréquences que dans l'espace des temps. On pourrait donc songer à remplacer le système d'équations différentielles couplées (I-8) pour $b_i(t)$ et $b(\alpha, t)$ par un système d'équations algébriques auxquelles obéiraient leurs transformées de Fourier ou de Laplace, et qui serait plus simple à manipuler (voir par exemple réf. 3).

Plutôt que de prendre la T.F. de (I-8), nous allons de manière plus générale étudier la T.F. de l'opérateur d'évolution et introduire à ce propos la résolvante $G(z)$ de l'hamiltonien H , car nous en aurons besoin par la suite.

E. Opérateur d'évolution et résolvante

① Opérateur d'évolution $U(t, t')$ et Fonctions de Green $K_{\pm}(t, t')$

On se limite dans tout ce qui suit au cas où H est indépendant de t

- Opérateur d'évolution

$$U(t, t') = e^{-iH(t-t')/\hbar} \quad (\text{II-17})$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t') = H U(t, t') \quad (\text{II-18})$$

- Opérateurs $K_{\pm}(t, t')$

Définition

$$\begin{cases} K_+(t, t') = \theta(t-t') U(t, t') & (\text{II-19}) \\ K_-(t, t') = -\theta(t'-t) U(t, t') & (\text{II-20}) \end{cases}$$

$\theta(x)$: Fonction de Heaviside $= 0$ pour $x < 0$, $= 1$ pour $x > 0$

Equation différentielle

$$(i\hbar \frac{d}{dt} - H) K_{\pm}(t, t') = +i\hbar \delta(t-t') \quad (\text{II-21})$$

Origine du mot "fonction de Green".

K_{\pm} satisfait à la même équation différentielle, mais différent pour les conditions aux limites (K_+ fonction de Green retardée, K_- avancée)

Intérêt

- Le développement de perturbation de U fait intervenir des intégrales multiples sur des temps ordonnés. Le développement correspondant de K_{\pm} est plus simple : grâce aux fonctions θ , on n'a plus besoin d'imposer explicitement aux divers temps d'être ordonnés de sorte qu'ils peuvent varier indépendamment de $-\infty$ à $+\infty$
- La transformée de Fourier de K_+ ou K_- est plus simple que celle de U

Expression de U en fonction de K_+ et K_- . Comme $\theta(x) + \theta(-x) = 1$

$$U(t, t') = K_+(t, t') - K_-(t, t') \quad (\text{II-22})$$

② Transformées de Fourier de $K_{\pm}(t-t')$: Propagateurs $G_{\pm}(E)$.

- Posons $t-t' = \tau$ et introduisons la T.F de $K_+(\tau)$ par :

$$K_+(\tau) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iE\tau/\hbar} G_+(E) dE \quad (\text{II-23})$$

La constante $-1/2\pi i$ est introduite de manière à avoir la forme la plus simple possible pour $G_+(E)$, comme nous allons le voir en inversant (II-23) :

$$\begin{aligned} G_+(E) &= \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iE\tau/\hbar} K_+(\tau) d\tau = \frac{1}{i\hbar} \int_0^{\infty} e^{i(E-H)\tau/\hbar} d\tau \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{i\hbar} \int_0^{\infty} e^{i(E-H+i\epsilon)\tau/\hbar} d\tau = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{E-H+i\epsilon} \\ &= \mathcal{P}\left(\frac{1}{E-H}\right) - i\pi \delta(E-H) \end{aligned} \quad (\text{II-24})$$

- De la même façon on introduit $G_-(E)$ par

$$K_-(\tau) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iE\tau/\hbar} G_-(E) dE \quad (\text{II-25})$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} G_-(E) &= \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iE\tau/\hbar} K_-(\tau) d\tau = -\frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^0 e^{i(E-H)\tau/\hbar} d\tau \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{i\hbar} \int_0^{+\infty} e^{i(E-H-i\epsilon)\tau/\hbar} d\tau = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{E-H-i\epsilon} \\ &= \mathcal{P}\left(\frac{1}{E-H}\right) + i\pi \delta(E-H) \end{aligned} \quad (\text{II-26})$$

- Finalement, on a établi la formule très simple :

$$\boxed{G_{\pm}(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{E-H \pm i\epsilon}} \quad (\text{II-27})$$

Remarque. Prenons les éléments de matrice des 2 membres de (II-23) et (II-25) entre $\langle \Psi_n |$ et $|\Psi_n\rangle$ ou $|\Psi_n\rangle$ est un état propre de H de valeur propre E_n . En utilisant (II-19), (II-20) et (II-27) on obtient :

$$\pm \theta(\pm\tau) e^{-iE_n\tau/\hbar} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \frac{e^{-iE\tau/\hbar}}{E-E_n \pm i\epsilon} \quad (\text{II-28})$$

Il est intéressant de vérifier directement par la méthode des résidus que l'intégrale du 2^{ème} membre de (II-28) redonne bien le 1^{er}. Un tel calcul permet de bien comprendre l'importance des $+i\epsilon$ et $-i\epsilon$.

③ Ré-solvante $G(z)$ de H

Définition

La formule (II-27) suggère d'introduire l'opérateur $G(z)$ fonction de la variable complexe z et défini par :

$$\boxed{G(z) = \frac{1}{z-H}} \quad (\text{II-29})$$

On a

$$G_{\pm}(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} G(E \pm i\epsilon) \quad (\text{II-30})$$

Lien entre $U(\tau)$ et $G(z)$

En portant (II-23) et (II-25) dans (II-22), et en utilisant (II-30), on obtient la relation suivante entre $U(\tau)$ et $G(z)$

$$\boxed{U(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+ + C_-} G(z) e^{-iz\tau/\hbar} dz} \quad (\text{II-31})$$

où $C_+ + C_-$ est le contour du plan complexe représenté sur la figure 9

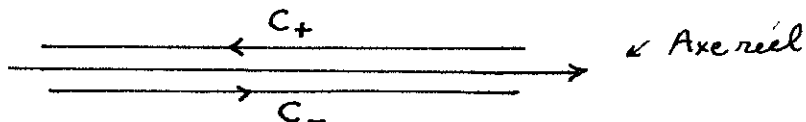


Fig 9

Pour $\tau > 0$, la contribution de C_- est nulle.

Pour $\tau < 0$, " " " C_+ est nulle.

Liens entre G(z) et G_0(z)

Si $H = H_0 + V$ (II-32)

on pose $G_0(z) = \frac{1}{z - H_0}$ $G(z) = \frac{1}{z - H}$ (II-33)

De l'identité opératoirelle :

$\frac{1}{A} = \frac{1}{B} + \frac{1}{B} (B - A) \frac{1}{A}$ (II-34)

on déduit, en posant $A = z - H$ $B = z - H_0$ (on a $B - A = z - H_0 - z + H_0 + V = V$).

$G(z) = G_0(z) + G_0(z) V G(z)$ (II-35)

relation exacte que l'on peut itérer pour obtenir un développement perturbatif :

$G = G_0 + G_0 V G_0 + G_0 V G_0 V G_0 + \dots$ (II-36)

Propriétés analytiques de $G_u(z) = \langle u | G(z) | u \rangle$ ($|u\rangle$: état normé)

Dans le cas général, l'hamiltonien H possède un spectre continu partant de E_0 et un spectre discret E_n (dont une partie peut éventuellement être superposée au spectre continu).

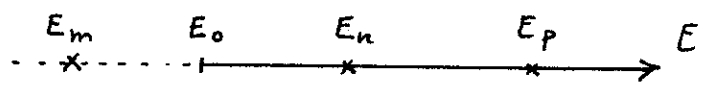


Fig 10

Relation de fermeture :

$\sum_n |E_n\rangle \langle E_n| + \iint d\gamma dE \rho(\gamma, E) |\gamma, E\rangle \langle \gamma, E| = 1$ (II-37)

$G_u(z) = \langle u | \frac{1}{z - H} | u \rangle = \sum_n \frac{|\langle E_n | u \rangle|^2}{z - E_n} + \iint d\gamma dE' \rho(\gamma, E') \frac{|\langle \gamma, E' | u \rangle|^2}{z - E'}$ (II-38)

(i) $G_u(z)$ est analytique en dehors de l'axe réel

Il suffit de montrer que $G_u(z)$ et $G'_u(z)$ sont bornés quand z est hors de l'axe réel.

$|z - E_n|$ et $|z - E|$ sont majorés par la distance δ de z à l'axe réel.

On déduit alors de (II-37) et (II-38) que :

$|G_u(z)| \leq \frac{1}{\delta}$ (II-39)

On démontrerait de même que $G'_u(z)$ est borné.

(ii) $G_u(z)$ a des poles aux valeurs propres discrètes de H.

Quand z tend vers une valeur propre discrète E_n de H, le terme prépondérant (de II-38) est $\frac{|\langle E_n | u \rangle|^2}{z - E_n}$. $G_u(z)$ a donc un pole en $z = E_n$, de résidu $|\langle E_n | u \rangle|^2$.

(iii) $G_u(z)$ a une coupure le long de la portion d'axe réel correspondant au spectre continu de H.

Montrons que la limite de $G_u(z)$ lorsque z tend vers une valeur propre E du spectre continu n'est pas la même suivant que z tend vers E par au dessus ($z = E + i\epsilon$, $\epsilon \rightarrow 0_+$), ou par au dessous ($z = E - i\epsilon$, $\epsilon \rightarrow 0_+$). De (II-38), on déduit :

$$G_u(E \pm i\epsilon) = \sum_n \frac{|\langle E_n | u \rangle|^2}{E \pm i\epsilon - E_n} + \int_{E_0}^{\infty} dE' \frac{f_u(E')}{E - E' \pm i\epsilon} \quad (\text{II-40})$$

ou $f_u(E') = \int d\gamma \rho(\gamma, E') |\langle \gamma, E' | u \rangle|^2$ (II-41)

Le 1^{er} terme de (II-40) tend, quand $\epsilon \rightarrow 0$, vers une valeur réelle $\sum_n \frac{|\langle E_n | u \rangle|^2}{E - E_n}$.

Quant au 2^{em} terme, il tend vers :

$$\int_{E_0}^{+\infty} \mathcal{P}\left(\frac{1}{E-E'}\right) f_u(E') dE' \mp i\pi f_u(E) \quad (\text{II-42})$$

Les limites de $G_u(E+i\epsilon)$ et $G_u(E-i\epsilon)$ pour $\epsilon \rightarrow 0_+$ existent donc mais ne sont pas les mêmes. Elle diffèrent de $-2i\pi f_u(E)$

Remarque

$G_u(z)$ est analytique dans le demi-plan supérieur. On peut faire un prolongement analytique au delà de la coupure dans le demi-plan inférieur (2^{em} feuillet de Riemann). La valeur prise par la fonction prolongée est différente de la valeur prise au même point par la détermination initiale puisque la coupure introduit justement une discontinuité dans cette détermination.

Alors que la 1^{er}e détermination de $G_u(z)$ ne possède pas de pôle en dehors du spectre discret de H, mais ne s'oppose que à ce que la fonction prolongée possède des pôles en dehors de l'axe réel (état instables)

Bibliographie

- (1) V.F. WEISSKOPF and E. WIGNER Z. Phys. 63, 54 (1930)
Article original
- (2) C. COHEN-TANNOUJJI, B. DIU, F. LALOE, Mécanique Quantique Hermann Paris 1973
Complément D_{XIII} p. 1332. Etude simple de la décroissance exponentielle (par la méthode de l'équation intégrodifférentielle)
- (3) W. HEITLER, The Quantum Theory of Radiation, 3rd edition, Oxford University Press (1954)
§ 16 : Utilise la méthode consistant à prendre la Transformée de Fourier du système d'équations différentielles équivalent à l'équation de Schrödinger (dans le cas d'un modèle plus compliqué que celui considéré ici : plusieurs niveaux atomiques)

Références sur la résolvante :

- (4) A. MESSIAH, Mécanique Quantique Dunod Paris 1964 Nouveau tirage
Chap XVI §§ 15 et 16, Chap XXI, § 13
- (5) M.L. GOLDBERGER and K.M. WATSON, Collision Theory Wiley, New-York (1964) Chap. 8