

Applications de l'équation pilote

II - Emission spontanée d'un moment cinétique

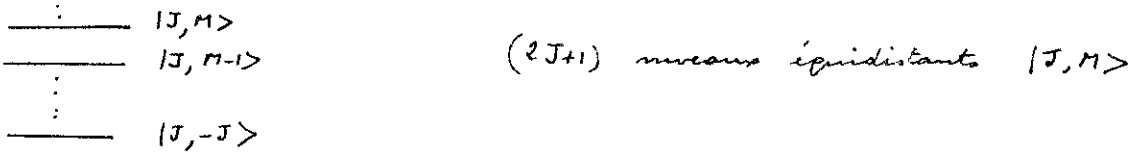
① Hamiltonien - Notations

- A : moment cinétique \vec{J} plongé dans un champ magnétique \vec{B}_0 parallèle à Oz

$$H_A = \omega_0 J_z \quad (XIII-1)$$

$$\omega_0 = -\gamma B_0 \quad \text{Fréquence de Larmor} \quad (XIII-2)$$

Fig 1



- R : champ électromagnétique. Modes α $b_\alpha b_\alpha^\dagger$

$$H_R = \sum_\alpha \hbar \omega_\alpha b_\alpha^\dagger b_\alpha \quad (XIII-3)$$

Etat initial de R : vide $\sigma_R(0) = |0\rangle\langle 0| \quad (XIII-4)$

- Couplage $V_{AR} = \sum_\alpha g_\alpha (J_+ b_\alpha + J_- b_\alpha^\dagger) \quad (XIII-5)$

A gagne (ou perd) un quantum $\hbar \omega_\alpha$ aux dépens (ou au profit) de R. (On ne garde pas de termes du type $J_+ b_\alpha^\dagger$ ou $J_- b_\alpha$).

② Equations pilote.

- Nous écrivons ici l'équation pilote sous forme explicite (bien qu'il soit également possible, comme pour l'oscillateur harmonique, de l'écrire sous forme opératoire compacte).

- Comme R est dans l'état fondamental, les seules transitions possibles sont celles où R gagne de l'énergie et A en perd. Donc, A ne peut que tomber vers des niveaux d'énergie de plus en plus bas :

$$\Gamma_{N \leftarrow M} = 0 \quad \text{si} \quad N > M \quad (XIII-6)$$

- Comme V est proportionnel à J_+ et J_- , on a forcément $N = M - 1$. Enfin, $\Gamma_{N \leftarrow M}$ est proportionnel au carré de l'élément de matrice de J_- entre $|M\rangle$ et $|M-1\rangle$, de sorte que

$$\Gamma_{N \leftarrow M} = \Gamma \delta_{N, M-1} [J(J+1) - M(M-1)] \quad (XIII-7)$$

où Γ est une constante dépendant des g_α .

- De plus, comme V n'a pas d'éléments diagonaux, vaut en ce qui concerne A que R, tous les Γ sont nuls. Finalement, en plus des $\Gamma_{N \leftarrow M}$, seuls interviennent les coefficients de transfert (voir X-32)

$$\Gamma_{P \leftarrow NM} = \Gamma \delta_{P, N-1} \delta_{P, M-1} \left\{ [J(J+1) - N(N-1)] [J(J+1) - M(M-1)] \right\}^{1/2} \quad (XIII-8)$$

- En réalité, il faut également calculer le déplacement Δ_M de chaque niveau M. Nous les supposons réintégrés dans

l'hamiltonien H_A . Notons cependant, qu'à la différence de ce qui se passe pour l'oscillateur harmonique, les niveaux d'énergie de la figure 1 ne restent plus équidistants lorsqu'on tient compte des Δ_M .

- Equations d'évolution des populations :

$$\dot{\sigma}_{MM} = -\Gamma_{M-1 \leftarrow M} \sigma_{MM} + \Gamma_{M \leftarrow M+1} \sigma_{M+1 M+1} \quad (\text{XIII-9})$$

- Equations d'évolution des éléments non-diagonaux de σ .

$$\dot{\sigma}_{MN} = -\left[\frac{1}{2}(\Gamma_{M-1 \leftarrow M} + \Gamma_{N-1 \leftarrow N}) + i(\Delta_M - \Delta_N) \right] \sigma_{MN} + \Gamma_{MN \leftarrow M+1 N+1} \sigma_{M+1 N+1} \quad (\text{XIII-10})$$

③ Problème étudié dans ce paragraphe.

(i) Hypothèses.

- On suppose J très grand : $J \gg 1$ (XIII-11)

- On part initialement d'un opérateur densité $\sigma(0)$ de la forme :

$$\sigma(0) = \sum_{M=-J}^{+J} p(M,0) |JM\rangle \langle JM| \quad (\text{XIII-12})$$

où $p(M,0)$ est une distribution "quasiclassique" ayant la forme suivante :

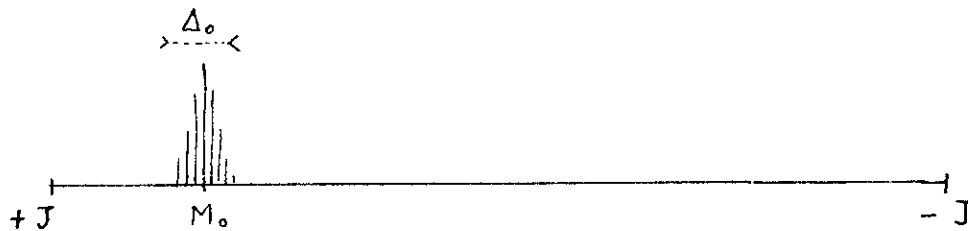


Fig 2

• $p(M,0)$ a la forme d'une courbe en cloche centrée en M_0 . On suppose M_0 très voisin de J

$$J - M_0 \ll J \quad (\text{XIII-13})$$

• La largeur Δ_0 de $p(M,0)$ est très grande en valeur absolue

$$\Delta_0 \gg 1 \quad (\text{XIII-14})$$

et très faible en valeur relative

$$\frac{\Delta_0}{J - M_0} \ll 1 \quad (\text{XIII-15})$$

Le caractère quasiclassique de la distribution $p(M,0)$ est lié aux 2 dernières conditions (XIII-14) et (XIII-15) [analogie avec les états cohérents d'un oscillateur harmonique].

(ii) Ce que l'on s'en va étudier.

L'évolution ultérieure de la distribution de la fig. 2 qui décrit comment A perd de l'énergie au profit de R. En particulier, l'énergie rayonnée par unité de temps à l'instant t s'écrit :

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\sum_M M \hbar \omega_0 p(M,t) \right) = -\hbar \omega_0 \frac{d}{dt} \langle J_z \rangle (t) \quad (\text{XIII-16})$$

(iii) Pourquoi toutes ces hypothèses sur $\sigma(0)$?

- A la différence de ce qui se passe pour l'oscillateur harmonique, la quantité à laquelle on s'intéresse, $\langle J_z \rangle(t)$, n'est pas un vecteur propre de l'équation piloté XIII-9.
 - Nous montrons plus loin que la distribution quasi-classique initiale de la figure 2 garde son caractère quasi-classique à tout instant ultérieur t (à savoir distribution de largeur grande en valeur absolue, faible en valeur relative), pourvu que les conditions (XIII-13), (XIII-14) et (XIII-15) soient remplies.
- Nous pourrions alors obtenir une équation d'évolution approchée pour le centre $\langle J_z \rangle(t)$ de la distribution quasi-classique qui nous donnera une idée de la variation au cours du temps de l'énergie rayonnée par le système.

(iv) Pourquoi étudier un tel problème?

On peut montrer que, dans certaines conditions, le problème de l'émission spontanée de rayonnement par un système de $2N$ atomes à 2 niveaux initialement tous excités dans leur état supérieur peut être ramené, en première approximation, à celui de l'émission spontanée d'un moment cinétique $J = 2N$ préparé initialement dans l'état $|J, J\rangle$.

(Le moment cinétique $J = 2N$ est obtenu en comptant les $2N$ spins fictifs $1/2$ associés à chacun des $2N$ atomes. Si ces $2N$ atomes sont tous initialement excités, ce moment cinétique J est dans l'état $|JJ\rangle$).

L'étude de dW/dt présentée dans ce paragraphe nous permettra de donner une première idée simple des caractéristiques de l'émission superradiante.

Remarques

- On peut se demander pourquoi on n'a pas pris $\sigma(0) = |JJ\rangle\langle JJ|$ (XIII-17)

C'est que la distribution $p(M, t)$ obtenue à partir d'un tel état initial un instant t après n'est plus quasi-classique: elle a une largeur très grande en valeur relative.

Or l'évolution de $\langle J_z \rangle$ est, comme nous le verrons plus loin, couplée à celle de $\langle J_z^2 \rangle$, celle de $\langle J_z^2 \rangle$ à celle de $\langle J_z^3 \rangle$, ... et si la distribution $p(M, t)$ a une largeur relative trop grande, on ne peut plus écrire $\langle J_z^2 \rangle \approx \langle J_z \rangle^2$, $\langle J_z^3 \rangle \approx \langle J_z \rangle^3$... de sorte qu'il devient très difficile d'obtenir une équation d'évolution simple pour $\frac{d}{dt} \langle J_z \rangle$.

- L'idée de superradiance a été introduite initialement par Dicke (R.H. DICKE, Phys. Rev. 93, 99 (1954)) en considérant $2N$ atomes à 2 niveaux contenus dans un volume petit devant λ_0^3 (où λ_0 est la longueur d'onde du rayonnement émis par les atomes)

L'hamiltonien d'interaction de chaque spin $1/2$, \vec{S}_i , associé à chacun des $2N$ atomes, avec le champ de rayonnement

s'écrit alors à l'approximation dipolaire électrique ($e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}_i} \ll 1$; on prend l'origine des coordonnées à l'intérieur du petit volume contenant les atomes):

$$\sum_{\alpha} g_{\alpha} (S_i^+ b_{\alpha} + S_i^- b_{\alpha}^+) \tag{XIII-18}$$

En sommant (XIII-18) sur i , on retrouve (XIII-5) à condition de poser:

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^{2N} \vec{S}_i$$

Comme l'état initial $|+++...+\rangle = |J=2N, M=J=2N\rangle$ est complètement symétrique et que l'hamiltonien d'interaction (XIII-5) est symétrique par rapport aux permutations des $2N$ spins, le système évolue en restant dans le sous-espace $J=2N$ et le problème semble bien se ramener à celui de l'émission spontanée d'un moment cinétique $J=2N$.

En réalité il a été montré par R. FRIEDBERG, S.R. HARTMANN et J.T. MANASSAH (Phys. Lett. A 40, 365 (1972)) [voir aussi R. FRIEDBERG et S. HARTMANN, Phys. Rev. A 10, 1728 (1974)] qu'une telle situation (beaucoup d'atomes dans λ_0^3) se prêtait difficilement à l'observation de la superradiance à cause du potentiel d'interaction important (et anisotrope) existant entre les divers atomes [cf cours XIV de l'an dernier où l'on montre qu'à courte distance, le potentiel d'interaction entre 2 atomes, l'un excité, l'autre fondamental, est beaucoup plus grand que la probabilité d'émission d'un photon par unité de temps]. Physiquement, la fréquence d'un atome donné est déplacée de manière importante par suite des interactions avec les autres atomes; il s'en suit une largeur inhomogène très grande, très supérieure à l'inverse du temps de superradiance.

Le modèle décrit dans ce § s'appliquerait plutôt à l'émission d'un grand nombre d'atomes contenus dans un volume allongé dans une direction donnée avec une densité suffisamment faible pour qu'il y ait très peu d'atomes dans λ_0^3 [cf N.E. REHLER et J.H. EBERLY Phys. Rev. A 3, 1735 (1971) R. BONIFACIO, P. SCHWENDIMANN, et F. HAAKE Phys. Rev. A 4, 302 (1971) et Phys. Rev. A 4, 854 (1971)].

④ Evolution de $\langle J_z \rangle$. Discussion qualitative

- La figure 3 montre l'allure des variations avec M de la probabilité de transition $\frac{1}{\Gamma} \Gamma_{M-1 \leftarrow M} = J(J+1) - M(M-1)$ qui est en quelque sorte la vitesse de dérive vers la droite de la distribution de la figure 2. ($-J \leq M \leq +J$)
- Cette courbe est une parabole.
- Pour $M=J$ on a $\frac{1}{\Gamma} \Gamma_{J-1 \leftarrow J} = 2J$, ce qui montre que même pour $M=J$ l'émission spontanée fait partir le système vers la droite. Au voisinage de $M=J$ la courbe a

l'allure d'une droite $2J + 2J(J-M)$

le maximum est atteint pour $M \approx 0$ et vaut $J^2 \gg J$ (comme nous supposons $J \gg 1$)

Enfin pour $M = -J$, $\Gamma = 0$: le système s'arrête en $-J$.

$$\frac{1}{\Gamma} \Gamma_{M \leftarrow M}$$

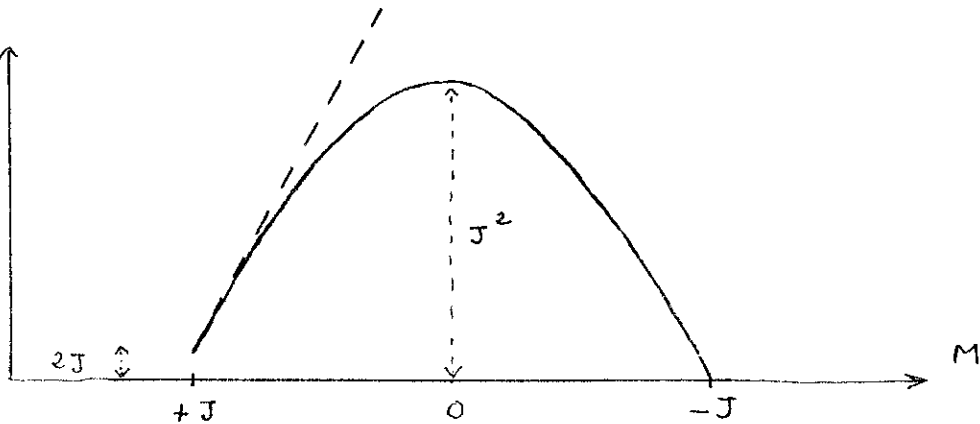


Fig 3

- le système partant au voisinage de $+J$ (cf figure 2) se déplace tout vers la droite de plus en plus rapidement, la vitesse maximale étant atteinte en $M = 0$. Puis il se ralentit et s'arrête en $-J$.

L'évolution de $\langle J_3 \rangle$ a donc la forme représentée sur la figure 4 : variation de $+J$ à $-J$ avec une vitesse maximale (en module) au voisinage de 0. Par suite l'énergie rayonnée, proportionnelle à $-\frac{d}{dt} \langle J_3 \rangle$ d'après XII-16 s'obtient en prenant la dérivée de la courbe 4 (avec le signe -) et la forme d'une impulsion très brève et très intense (cf figure 5)

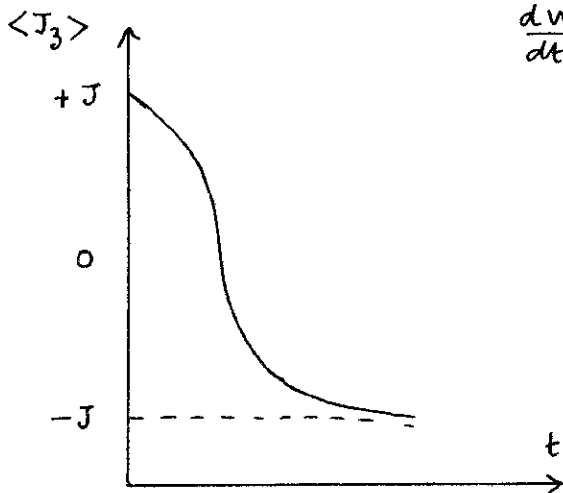


Fig 4

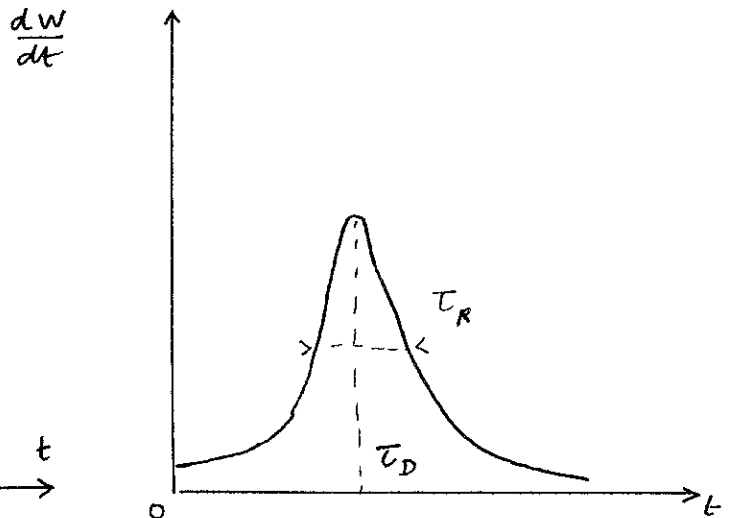


Fig 5

- Nous désirons maintenant calculer de manière un peu plus précise l'abscisse t_0 , l'ordonnée du maximum et la largeur de l'impulsion.

Nous établissons pour cela à partir de (XIII-9) l'équation d'évolution de $\langle J_3 \rangle$.

⑤ Equations d'évolution de $\langle J_3 \rangle$ (i) Equation rigoureuse

Multiplicons (XIII-9) par M et sommons sur M . On obtient (XIII-19)

$$\frac{d}{dt} \langle J_3 \rangle = \frac{d}{dt} \sum_M M \sigma_{MM} = - \sum_M \Gamma_{M-1 \leftarrow M} M \sigma_{MM} + \sum_M \Gamma_{M \leftarrow M+1} M \sigma_{M+1 M+1}$$

Remplaçons M par $M-1$ dans la 2^{ème} sommation. On obtient alors

$$\frac{d}{dt} \langle J_3 \rangle = - \sum_M \sigma_{MM} \Gamma_{M-1 \leftarrow M} [M - (M-1)] = - \sum_M \sigma_{MM} \Gamma_{M-1 \leftarrow M} \quad (\text{XIII-20})$$

Utilisons alors l'expression (XIII-7) de $\Gamma_{M-1 \leftarrow M}$. On obtient

$$\frac{d}{dt} \langle J_3 \rangle = - \Gamma J(J+1) \underbrace{\sum_M \sigma_{MM}}_1 - \Gamma \underbrace{\sum_M M \sigma_{MM}}_{\langle J_3 \rangle} + \Gamma \underbrace{\sum_M M^2 \sigma_{MM}}_{\langle J_3^2 \rangle} \quad (\text{XIII-21})$$

c-à-d encore :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \langle J_3 \rangle = - \Gamma J(J+1) - \Gamma \langle J_3 \rangle + \Gamma \langle J_3^2 \rangle} \quad (\text{XIII-22})$$

Comme annoncé plus haut, l'évolution de $\langle J_3 \rangle$ est couplée à celle de $\langle J_3^2 \rangle$.

(ii) Approximation quasi-classique

Si la largeur relative de la distribution $p(M, t)$ est suffisamment faible, on peut approximer $\langle J_3^2 \rangle$ par $\langle J_3 \rangle^2$ et remplacer l'équation exacte (XIII-22) par l'équation approchée :

$$\frac{d}{dt} \langle J_3 \rangle = - \Gamma J(J+1) - \Gamma \langle J_3 \rangle + \Gamma \langle J_3 \rangle^2 \quad (\text{XIII-23})$$

Conditions de validité d'une telle approximation

- Remplaçons la courbe de la fig. 3 par sa tangente au point d'abscisse J . En procédant ainsi, on surestime l'étalement de la distribution. En effet avec la vraie valeur de $\Gamma_{M-1 \leftarrow M}$ (courbe en traits pleins de la fig. 3), l'aile droite de la distribution $p(M, t)$ subit une accélération moins grande que l'aile gauche (avant toutefois que le point d'abscisse $M=0$ soit atteint) alors qu'avec la courbe en traits tirillés cette accélération est la même. Si l'on montre donc qu'avec la courbe en traits tirillés de la fig. 3, la distribution reste quasi-classique, cette propriété sera a fortiori vraie pour la courbe en traits pleins.

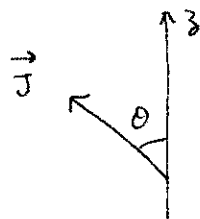
- L'intérêt d'introduire la droite en traits tirillés de la figure 3 est qu'on peut alors calculer exactement le centre $\bar{M}(t)$ de la distribution et sa largeur $\Delta(t)$. Un calcul simple que nous ne reproduisons pas montre alors que $\frac{\Delta(t)}{J - \bar{M}(t)}$ reste inférieur à $\frac{1}{1 + J - M_0}$.

Or les 2 conditions XIII-14 et XIII-15 impliquent que $J - M_0 \gg 1$. On en conclut que la largeur relative de la distribution (par rapport à son abscisse $J - \bar{M}(t)$) reste toujours très petite et qu'on a bien le droit d'appliquer l'approximation quasi-classique. Ceci ne serait pas valable si l'on prenait $M_0 = J$.

(iii) Changement de variables

Posons $\langle J_3 \rangle = J u$ (XIII-24)

où $-1 \leq u \leq 1$ (XIII-25)



u peut être considéré comme le cosinus de l'angle θ que forme le moment cinétique (quadrivecteur) \vec{J} avec l'axe O_3 .

L'équation (XIII-23) se réécrit alors sous la forme

$$\boxed{\frac{du}{dt} = -\Gamma J(1-u^2) - \Gamma(1+u)} \quad (\text{XIII-26})$$

(iv) Condition initiale

Si l'on pose $J - M_0 = k_0$ (XIII-27)

on obtient : $u_0 = 1 - \frac{k_0}{J}$ (XIII-28)

La condition (XIII-14) et (XIII-15) entraînent que $J \gg k_0 \gg 1$ (XIII-29)

Donc u_0 est très voisin de 1.

(6) Résolution de l'équation d'évolution

- On peut mettre $(1+u)$ en facteur au 2^{ème} membre de XIII-26 et réécrire cette équation sous la forme :

$$\frac{du}{(1+u)(1+\frac{1}{J}-u)} = -\Gamma J dt \quad (\text{XIII-30})$$

que l'on peut encore transformer en

$$du \left[\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1+\frac{1}{J}-u} \right] = -(2J+1)\Gamma dt \quad (\text{XIII-31})$$

- L'équation (XIII-31) s'intègre alors immédiatement pour donner (en posant $u(0) = u_0$) :

$$\log \frac{1+\frac{1}{J}-u_0}{1+u_0} \frac{1+u}{1+\frac{1}{J}-u} = -(2J+1)\Gamma t \quad (\text{XIII-32})$$

Si l'on pose $\lambda_0 = \frac{1+\frac{1}{J}-u_0}{1+u_0}$ (XIII-33)

on obtient

$$u = \frac{(1+\frac{1}{J})e^{-(2J+1)\Gamma t} - \lambda_0}{\lambda_0 + e^{-(2J+1)\Gamma t}} \quad (\text{XIII-34})$$

- D'après l'expression (XIII-28) de u_0 et l'inégalité XIII-29, on a

$$\lambda_0 \simeq \frac{k_0}{2J} \quad (\text{XIII-35})$$

de sorte que u peut être encore écrit sous la forme (on néglige

$\frac{1}{J}$ devant 1 dans $(1 + \frac{1}{J})$:

XIII-8

$$u = \frac{2J - k_0 e^{2J\Gamma t}}{2J + k_0 e^{2J\Gamma t}} \quad (\text{XIII-36})$$

- On déduit alors immédiatement de (XIII-16) et (XIII-36) l'expression de l'énergie rayonnée

$$\frac{dW}{dt} = 8J^3 \Gamma k_0 \frac{e^{2J\Gamma t}}{(2J + k_0 e^{2J\Gamma t})^2} \quad (\text{XIII-37})$$

⑦ Caractéristiques de l'impulsion rayonnée

(i) Délai τ_D

C'est l'abscisse du maximum de la courbe de la figure 5.
(temps séparant l'instant initial du maximum de l'impulsion)

Le maximum de $\frac{dW}{dt}$ est le maximum de $-J \frac{du}{dt}$,
c-à-d le zéro de $\frac{d^2u}{dt^2}$.

En dérivant les 2 membres de (XIII-26) par rapport à t , on obtient

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \Gamma \left[2Ju \frac{du}{dt} - \frac{du}{dt} \right] = \Gamma \frac{du}{dt} (2Ju - 1) \quad (\text{XIII-38})$$

Le zéro de $\frac{d^2u}{dt^2}$ correspond donc à

$$u = \frac{1}{2J} \approx 0 \quad (\text{XIII-39})$$

On en déduit d'après (XIII-36) que l'abscisse τ_D du maximum de $\frac{dW}{dt}$ satisfait à

$$2J = k_0 e^{2J\Gamma \tau_D} \quad (\text{XIII-40})$$

ce qui donne

$$\tau_D = \frac{1}{\Gamma} \frac{1}{2J} \text{Log} \frac{2J}{k_0} \quad (\text{XIII-41})$$

Comme, pour le problème de la superradiance, J est proportionnel à N (nombre d'atomes), on en conclut que le délai est en $\frac{\text{Log} N}{N}$.

(ii) Energie rayonnée maximale

En reportant (XIII-40) dans (XIII-37), on obtient immédiatement:

$$\left(\frac{dW}{dt} \right)_{\text{max}} = \Gamma J^2 \quad (\text{XIII-42})$$

Dans le problème de la superradiance, le maximum de l'impulsion superradiante est donc en N^2 .

(iii) Largeur de l'impulsion τ_R

Par suite de la conservation de l'énergie, l'aire totale sous la courbe de la figure 5 est en J . Comme le maximum est en J^2 , on en déduit que la largeur τ_R de l'impulsion est en $\frac{1}{J}$.

$$\tau_R \sim \frac{1}{\Gamma} \frac{1}{J} \quad (\text{XIII-43})$$

Dans le problème de la superradiance, la largeur de l'impulsion est en $\frac{1}{N}$. Comme $N \gg 1$, $\log N > 1$ et on en déduit que $\tau_D > \tau_R$

le délai est plus long que la largeur de l'impulsion si $N \gg 1$.

References sur l'équation pilote (liste non exhaustive).

- A. ABRAGAM : Principles of nuclear magnetism
R.K. WANGSNESS and F. BLOCH Phys. Rev 89, 728 (1953)
- Technique des operateurs de projection
R.W. ZWANZIG in Lectures in Theoretical Physics Vol III
W.E. BRITTIN (ed.) New York, John Wiley 1961
Physica 33, 119 (1964)
- voir aussi
F. HAAKE Statistical Treatment of Open Systems by Generalized Master equation
in Quantum Statistics 1973
Springer Tracts in Modern Physics vol 66 Springer Verlag
- G.S. AGARWAL Quantum statistical theories of spontaneous emission and their relations to other approaches in Quantum Optics
Springer Tracts in Modern Physics vol 70 Springer Verlag 1974
- Traitement quantique de l'oscillateur harmonique amorti
W.H. LOUISELL and J.H. MARBURGER I.E.E.E. Journ. of Quant. Electronics 3, 348 (1967)
- Theoreme de regression quantique
M. LAX Phys. Rev 172, 350 (1968)