Applications de l'équation pilote

I : Oscillateur harmonique amorti.

① Description du modèle.

- Système S : oscillateur harmonique de fréquence ω_0
  Opérateurs de création et d'annihilation : a, a^+

$$H_A = \omega_0 a^+ a \qquad (XII-1)$$

- Réservoir R : Ensemble d'oscillateurs harmoniques α de fréquences ω_α
  Opérateurs : b_α, b_α^+

$$H_R = \sum_\alpha \omega_\alpha b_\alpha^+ b_\alpha \qquad (XII-2)$$

- Etat initial de R : équilibre thermodynamique à la température T

$$\sigma_R(0) = \prod_\alpha \sigma_\alpha = \prod_\alpha . \frac{e^{-\hbar\omega_\alpha b_\alpha^+ b_\alpha / kT}}{Tr\, e^{-\hbar\omega_\alpha b_\alpha^+ b_\alpha / kT}} \qquad (XII-3)$$

- Couplage V_{AR}

$$V_{AR} = \sum_\alpha g_\alpha (a b_\alpha^+ + a^+ b_\alpha) \qquad (XII-4)$$

g_α : constante de couplage entre S et l'oscillateur α

V_{AR} décrit des transitions où S gagne (ou perd) un quantum d'énergie $\hbar\omega_0$ aux dépends (ou au profit) d'un oscillateur α.

(Nous ne gardons pas de termes du type $a b_\alpha$ ou $a^+ b_\alpha^+$ car ils sont forcément très antirésonants)

- Que peut-on décrire avec un tel modèle ?

  (i) Comment un oscillateur matériel chargé (S) évolue-t-il par interaction avec tous les modes du champ électromagnétique (oscillateurs b_α) ? Si $T=0$, $\sigma_R(0)$ correspond au vide de photons et on étudie alors l'émission spontanée de (S). Si $T \neq 0$, on a également des processus d'absorption et d'émission induite.

  (ii) Comment un mode propre d'une cavité électromagnétique (oscillateur S) s'amortit-il par suite du couplage avec des oscillateurs matériels (oscillateurs b_α) contenus dans les parois de la cavité qui est à la température T ?

② Etablissement de l'équation pilote.

Le modèle est suffisamment simple pour que l'on puisse obtenir une forme opératorielle de l'équation pilote. On a en effet les relations simples :

$$\left\{\begin{aligned} \tilde{a}(-\tau) &= e^{-iH_A\tau/\hbar}\, a\, e^{iH_A\tau/\hbar} = e^{i\omega_0\tau} a \\ \tilde{a}^+(-\tau) &= e^{-i\omega_0\tau} a^+ \\ \tilde{b}_\alpha(-\tau) &= e^{i\omega_\alpha\tau} b_\alpha \\ \tilde{b}_\alpha^+(-\tau) &= e^{-i\omega_\alpha\tau} b_\alpha^+ \end{aligned}\right. \qquad (XII-5)$$

Nous utiliserons donc la forme (X-38) de l'équation pilote.

a) Fonctions de corrélation de R

– Le couplage V_{AR} donné par XII-4 peut être réécrit sous la forme :

$$V = a B^+ + a^+ B \qquad (XII-6)$$

avec

$$B = \sum_\alpha g_\alpha b_\alpha \qquad B^+ = \sum_\alpha g_\alpha b_\alpha^+ \qquad (XII-7)$$

– Par suite de la forme (XII-3) de $\sigma_R(0)$ on a :

$$\langle B \tilde{B}(-\tau)\rangle = \langle \tilde{B}^+(-\tau) B^+\rangle = \langle B^+ \tilde{B}^+(-\tau)\rangle = \langle \tilde{B}(-\tau) B\rangle = 0 \qquad (XII-8)$$

(La valeur moyenne dans une matrice densité diagonale d'un produit de 2 opérateurs de création ou de 2 opérateurs d'annihilation est nulle).

L'équation (X-38) s'écrit donc :

$$\frac{d}{dt}\sigma_A = -i\omega_0 [a^+a, \sigma_A] - \frac{1}{\hbar^2}\int_0^\infty d\tau \times \Big\{$$

$$\left[a a^+ e^{-i\omega_0\tau}\langle B^+ \tilde{B}(-\tau)\rangle + a^+ a\, e^{i\omega_0\tau}\langle B \tilde{B}^+(-\tau)\rangle\right]\sigma_A$$

$$+ \sigma_A \left[a^+a\, e^{-i\omega_0\tau}\langle \tilde{B}(-\tau) B^+\rangle + a a^+ e^{i\omega_0\tau}\langle \tilde{B}^+(-\tau) B\rangle\right]$$

$$- a\sigma_A a^+ e^{i\omega_0\tau}\langle B\tilde{B}^+(-\tau)\rangle - a^+\sigma_A a\, e^{-i\omega_0\tau}\langle B^+\tilde{B}(-\tau)\rangle$$

$$- a\sigma_A a^+ e^{-i\omega_0\tau}\langle \tilde{B}(-\tau) B^+\rangle - a^+\sigma_A a\, e^{i\omega_0\tau}\langle \tilde{B}^+(-\tau) B\rangle \Big\} \qquad (XII-9)$$

– Il suffit donc de calculer les fonctions de corrélation :

$$\langle B\tilde{B}^+(-\tau)\rangle = \langle \tilde{B}(-\tau) B^+\rangle^* = \sum_{\alpha,\alpha'} g_\alpha g_{\alpha'}\, e^{-i\omega_\alpha\tau}\langle b_\alpha b_{\alpha'}^+\rangle$$

$$= \sum_\alpha g_\alpha^2 e^{-i\omega_\alpha\tau}(\langle n_\alpha\rangle + 1) \qquad (XII-10)$$

En effet, $\langle b_\alpha b_{\alpha'}^+\rangle = \langle b_\alpha b_\alpha^+\rangle \delta_{\alpha\alpha'} = \langle b_\alpha^+ b_\alpha + 1\rangle\delta_{\alpha\alpha'} = (\langle n_\alpha\rangle + 1)\delta_{\alpha\alpha'}$ (XII-11)

où

$$\langle n_\alpha\rangle = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_\alpha}{kT}} - 1} \qquad (XII-12)$$

On voit de même apparaître :

$$\langle B^+\tilde{B}(-\tau)\rangle = \langle \tilde{B}^+(-\tau) B\rangle = \sum_{\alpha\alpha'} g_\alpha g_{\alpha'}\langle b_\alpha^+ b_{\alpha'}\rangle e^{+i\omega_\alpha\tau} = \sum_\alpha g_\alpha^2\langle n_\alpha\rangle e^{i\omega_\alpha\tau} \qquad (XII-13)$$

– En fait, il faut d'après (XII-9) calculer des intégrales sur τ faisant intervenir ces fonctions de corrélation. Ce calcul ne présente pas de difficultés. Par exemple :

$$\frac{1}{\hbar^2}\int_0^\infty d\tau \sum_\alpha g_\alpha^2(\langle n_\alpha\rangle + 1)\, e^{i(\omega_0-\omega_\alpha)\tau} = \frac{1}{\hbar^2}\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty d\tau \sum_\alpha g_\alpha^2(\langle n_\alpha\rangle+1)\, e^{i(\omega_0-\omega_\alpha+i\epsilon)\tau}$$

$$= \frac{i}{\hbar^2}\sum_\alpha g_\alpha^2 \frac{\langle n_\alpha\rangle + 1}{\omega_0 - \omega_\alpha + i\epsilon} = \frac{\pi}{\hbar^2}\sum_\alpha g_\alpha^2(\langle n_\alpha\rangle+1)\,\delta(\omega_0-\omega_\alpha)$$

$$+ \frac{i}{\hbar^2}\sum_\alpha \mathcal{P}\frac{1}{\omega_0-\omega_\alpha}\, g_\alpha^2(\langle n_\alpha\rangle + 1) \qquad (XII-14)$$

Les sommations sur α sont remplacées par des intégrales car on suppose qu'il y a une infinité continue d'oscillateurs α.

- Finalement, on trouve que les 2 seules quantités qui apparaissent dans l'équation pilote (après l'intégration sur τ) sont :

$$\gamma = \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_\alpha g_\alpha^2 \, \delta(\omega_0 - \omega_\alpha) \qquad (XII-15)$$

$$\delta = \frac{1}{\hbar^2} \sum_\alpha \mathcal{P} \frac{1}{\omega_0 - \omega_\alpha} \, g_\alpha^2 \qquad (XII-16)$$

ainsi que le nombre moyen $\langle n_0 \rangle$ de quanta correspondant aux oscillateurs de fréquence $\omega_\alpha = \omega_0$

$$\langle n_0 \rangle = \frac{1}{e^{\hbar\omega_0/kT} - 1} \qquad (XII-17)$$

b) Forme explicite de l'équation pilote.

Après avoir effectué, comme en (XII-14), les diverses intégrales sur τ apparaissant dans (XII-9), on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sigma_A = & -i(\omega_0+\delta)\left[a^+a, \sigma_A\right] \\ & + \frac{\gamma}{2}\left[-a^+a\,\sigma_A - \sigma_A\, a^+a + 2\, a\,\sigma_A\, a^+\right] \\ & + \gamma\langle n_0\rangle\left[-a^+a\,\sigma_A - \sigma_A\, a a^+ + a\,\sigma_A\, a^+ + a^+\sigma_A\, a\right] \end{aligned}} \qquad (XII-18)$$

c) Interprétation physique

- 1ère ligne de XII-18

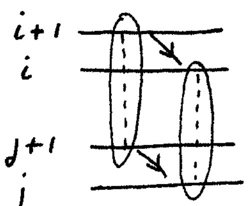
On voit que la fréquence ω_0 de l'oscillateur S est déplacée par le couplage de ω_0 à $\omega_0 + \delta$ où δ est donné par (XII-16).
Chaque niveau n de S est déplacé d'une quantité proportionnelle à n et à δ_0, de sorte que l'écart entre 2 niveaux consécutifs augmente de δ_0

- 2ème ligne de XII-18

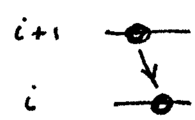
Existe même pour $T = 0$ ($\langle n_0 \rangle = 0$). Cette ligne décrit donc l'amortissement de S par émission spontanée.

Les 2 premiers termes, $-\frac{\gamma}{2} a^+a\,\sigma_A$ et $-\frac{\gamma}{2}\sigma_A\, a^+a$ couplent $\dot\sigma_{ij}$ à lui même et décrivent un amortissement de σ_{ij} de constante d'amortissement $-\gamma\,\frac{n_i+n_j}{2}$ ($\frac{1}{2}$ somme des probabilités de quitter i et j)

Le 3ème terme $\gamma\, a\,\sigma_A\, a^+$ couple $\dot\sigma_{ij}$ à $\sigma_{i+1\, j+1}$.
Il décrit le transfert par émission spontanée d'une partie de la cohérence $\sigma_{i+1,j+1}$ (ou de la population $\sigma_{i+1,i+1}$) vers la cohérence σ_{ij} (ou la population σ_{ii})



Transfert de cohérence



Transfert de population

C'est l'existence de ce terme qui fait que σ_{ij} n'est pas un vecteur propre de l'équation pilote, de valeur propre $-\gamma\frac{(n_i+n_j)}{2}$, et que, par suite, la largeur de la raie émise par un oscillateur ne dépend pas de son excitation.

Nous étudions plus loin quelques vecteurs propres de l'équation pilote.

- 3ème ligne de XII-18

Décrit l'évolution de l'oscillateur sous l'effet des processus d'absorption et d'émission induite associés aux photons résonnants présents dont le nombre est $\langle n_0 \rangle$.

Les 2 premiers termes décrivent un amortissement supplémentaire de σ_{ij} dû à des processus d'absorption ($i \to i+1$ $j \to j+1$) ou d'émission induite ($i \to i-1$, $j \to j-1$)

Le 3e terme décrit un transfert de cohérence (ou de population) par émission induite $i+1, j+1 \to i, j$ (ou $i+1, i+1 \to i, i$)

Le 4ème terme décrit un transfert de cohérence (ou de population) par absorption $i-1, j-1 \to i, j$ (ou $i-1, i-1 \to i, i$)

Notons qu'à la différence de ce qui se passe pour un atome, il n'y a pas de déplacement de fréquence du système S associé à l'absorption et à l'émission induite de photons de R.

d) Etude de l'évolution de la valeur moyenne de quelques observables.

Soit φ une observable de S. Pour calculer $\frac{d}{dt}\langle \varphi \rangle = \frac{d}{dt} Tr(\sigma_A \varphi) = Tr \frac{d}{dt}(\sigma_A \varphi)$, il suffit de multiplier les 2 membres de (XII-18) et de prendre la trace. On utilise ensuite l'invariance d'une trace lors d'une permutation circulaire et les propriétés de commutation de φ avec a et a^+

(i) 1er exemple : évolution de $\langle a \rangle$

- Calculons en détail la contribution de la 2ème ligne de (XII-18)

$$\frac{\gamma}{2} Tr \left\{ -a^+ a \sigma_A a - \sigma_A a^+ a a + 2 a \sigma_A a^+ a \right\} \qquad \text{(XII-19)}$$

Faisons des permutations circulaires de manière à amener σ_A à l'extrême droite. (XII-19) devient

$$\frac{\gamma}{2} Tr \left\{ -a a^+ a \sigma_A - a^+ a a \sigma_A + 2 a^+ a a \sigma_A \right\} =$$

$$\frac{\gamma}{2} Tr \left[\underbrace{-a a^+}_{=-a^+a-1} - a^+ a + 2 a^+ a \right] a \sigma_A = -\frac{\gamma}{2} Tr\, a\sigma_A = -\frac{\gamma}{2}\langle a \rangle \qquad \text{(XII-20)}$$

- On calcule de même la contribution de la 1ère ligne

qui vaut $-i(\omega_0+\delta)\langle a\rangle$, et celle de la 3ème ligne qui est nulle.
de sorte que finalement :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\langle a\rangle = -i(\omega_0+\delta)\langle a\rangle - \frac{\gamma}{2}\langle a\rangle} \qquad \text{(XII-21)}$$

Le couplage avec R amortit donc le dipole de S avec une constante $-\frac{\gamma}{2}$ indépendante de $\langle n_0\rangle$. Il déplace également sa fréquence d'une quantité δ_0.

2 points sont à noter : On retrouve tout d'abord que l'amortissement du dipôle et donc la largeur de la raie émise sont indépendants de l'état initial de S, ce qui montre toute l'importance du terme de transfert $a\sigma_A a^+$ de (XII-18). On voit aussi que l'amortissement et le déplacement du dipole sont indépendants du nombre de photons de R présents (ce qui ne serait pas le cas si le système S était un atome et non un oscillateur harmonique)

(ii) 2ème exemple : évolution de $\langle a^+a\rangle$

Des calculs très semblables aux précédents conduisent à

$$\boxed{\frac{d}{dt}\langle a^+a\rangle = -\gamma(\langle a^+a\rangle - \langle n_0\rangle)} \qquad \text{(XII-22)}$$

$\langle a^+a\rangle$ tend vers la valeur d'équilibre thermodynamique $\langle n_0\rangle$ avec une constante de temps $1/\gamma$.

③ Equation pilote écrite dans la base des états cohérents.

a) Rappel de quelques formules établies l'an dernier. (cours III et IV)

– Etat cohérent
$$|\alpha\rangle = e^{-\alpha\alpha^*/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \qquad \text{(XII-23)}$$

Comme
$$|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \qquad \text{(XII-24)}$$

on a aussi
$$|\alpha\rangle = e^{-\alpha\alpha^*/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}(a^+)^n|0\rangle \qquad \text{(XII-25)}$$

c-à-d encore
$$|\alpha\rangle = e^{-\alpha\alpha^*/2}\, e^{\alpha a^+}|0\rangle \qquad \text{(XII-26)}$$

et par suite
$$\boxed{|\alpha\rangle\langle\alpha| = e^{-\alpha\alpha^*}\, e^{\alpha a^+}|0\rangle\langle 0|\, e^{\alpha^* a}} \qquad \text{(XII-27)}$$

– Représentation $P(\alpha)$ de σ_A

$$\boxed{\sigma_A = \int d^2\alpha\; P(\alpha)\,|\alpha\rangle\langle\alpha|} \qquad \text{(XII-28)}$$

$P(\alpha)$ est une densité de "quasi probabilité" dont nous rappelons quelques propriétés importantes :

(i) $P(\alpha)$ est réel (mais non nécessairement > 0)

(ii) $P(\alpha)$ est normé $\qquad \int d^2\alpha \; P(\alpha) = 1 \qquad$ (XII-29)

(iii) $P(\alpha)$ permet de calculer très simplement les valeurs moyennes d'opérateurs mis sous forme normale (tous les opérateurs de création à gauche des opérateurs d'annihilation).

$$< (a^+)^\ell (a)^m > = \mathrm{Tr}\, \sigma_A \, a^{+\ell} a^m = \int d^2\alpha \; P(\alpha) \, \mathrm{Tr}\, |\alpha\rangle\langle\alpha| \, a^{+\ell} a^m$$

$$= \int d^2\alpha \; P(\alpha) \langle\alpha| a^{+\ell} a^m |\alpha\rangle = \int d^2\alpha \; P(\alpha) \, \alpha^{*\ell} \alpha^m \qquad \text{(XII-30)}$$

On a utilisé pour établir (XII-30) les 2 relations fondamentales

$$\boxed{a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle} \qquad \boxed{\langle\alpha| a^+ = \alpha^* \langle\alpha|} \qquad \text{(XII-31)}$$

(iv) La densité $P(\alpha)$ associé à un opérateur densité σ_A en équilibre thermodynamique à la température T est

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi \langle n_0 \rangle} \, e^{-\alpha\alpha^* / \langle n_0 \rangle} \qquad \text{(XII-32)}$$

gaussienne centrée en $\alpha = \alpha^* = 0$, de largeur $\sqrt{\langle n_0 \rangle}$

b) <u>Problème étudié dans ce §</u>.

Quelle est l'équation d'évolution de la densité de quasi-probabilité $P(\alpha, t)$, sachant que σ_A obéit à l'équation pilote (XII-18) ?

c) <u>Etablissement de quelques autres formules utiles</u>.

- Lorsqu'on porte (XII-28) dans (XII-18), on peut utiliser (XII-31) pour calculer $a|\alpha\rangle\langle a|$ ou $|\alpha\rangle\langle\alpha| a^+$. Mais on tombe également sur $a^+|\alpha\rangle\langle\alpha|$ ou $|\alpha\rangle\langle\alpha| a$ qui sont moins évidents. Nous établissons ci-dessous 2 formules intéressantes concernant ces 2 quantités.

- Au lieu de considérer comme variables indépendantes $\mathrm{Re}\,\alpha$ et $\mathrm{Im}\,\alpha$, il sera plus simple de considérer α et α^*. Dérivons alors par rapport à α ou α^* l'expression (XII-27) :

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha| = -\alpha^* |\alpha\rangle\langle\alpha| + a^+ |\alpha\rangle\langle\alpha| \qquad \text{(XII-33)}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha^*} |\alpha\rangle\langle\alpha| = -\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| + |\alpha\rangle\langle\alpha| a \qquad \text{(XII-34)}$$

On en déduit :

$$\boxed{a^+|\alpha\rangle\langle\alpha| = \left(\alpha^* + \frac{\partial}{\partial\alpha}\right)|\alpha\rangle\langle\alpha|} \qquad \text{(XII-35)}$$

$$\boxed{|\alpha\rangle\langle\alpha| a = \left(\alpha + \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right)|\alpha\rangle\langle\alpha|} \qquad \text{(XII-36)}$$

d) <u>Principe du calcul de l'équation d'évolution de $P(\alpha, t)$</u>

(i) On porte (XII-28) dans (XII-18).

(ii) grâce à (XII-31), (XII-35), (XII-36) on remplace tous les opérateurs

a, a^+ par des nombres α, α^* ou des opérateurs différentiels $\frac{\partial}{\partial\alpha}, \frac{\partial}{\partial\alpha^*}$ agissant sur $|\alpha\rangle\langle\alpha|$

(iii) Dans l'intégrale sur $d^2\alpha$, on fait une intégration par parties qui permet de faire agir $\frac{\partial}{\partial\alpha}$ et $\frac{\partial}{\partial\alpha^*}$ non plus sur $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ mais sur $P(\alpha)$ (multiplié éventuellement par des α et α^*). Le terme tout intégré obtenu lors de cette intégration par parties est nul car on suppose que $P(\alpha,\alpha^*,t)$ tend vers 0 suffisamment vite pour $|\alpha| = |\alpha^*| \to \infty$.

(iv) On égale alors les coefficients de $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ dans les intégrales qui figurent des 2 côtés du signe =, ce qui donne $\frac{\partial}{\partial t} P(\alpha,\alpha^*,t) = \text{-----}$

<u>1er exemple d'illustration</u> : Contribution du terme $-\frac{\gamma}{2} a^+ a\,\sigma_A$ de la 2ème ligne de XII-18

$$-\frac{\gamma}{2}\int d^2\alpha\; P(\alpha)\; a^+ a\,|\alpha\rangle\langle\alpha| = -\frac{\gamma}{2}\int d^2\alpha\;\alpha\, P(\alpha)\; a^+|\alpha\rangle\langle\alpha| \quad \leftarrow \text{d'après XII-31}$$

d'après XII-35 →
$$= -\frac{\gamma}{2}\int d^2\alpha\;\alpha\alpha^*\, P(\alpha)\,|\alpha\rangle\langle\alpha| - \frac{\gamma}{2}\int d^2\alpha\;\alpha\, P(\alpha)\,\frac{\partial}{\partial\alpha}|\alpha\rangle\langle\alpha| \qquad (XII-37)$$

Intégration par partie du dernier terme :

$$\text{Terme tout intégré nul} \;+\; \frac{\gamma}{2}\int d^2\alpha \left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha P(\alpha)\right)\right]|\alpha\rangle\langle\alpha| \qquad (XII-38)$$

D'où finalement

$$-\frac{\gamma}{2} a^+ a\,\sigma_A \longrightarrow -\frac{\gamma}{2}\int d^2\alpha\left[\alpha\alpha^* P(\alpha) - \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha P(\alpha)\right)\right]|\alpha\rangle\langle\alpha| \qquad (XII-39)$$

<u>2ème exemple</u> : Terme $\gamma\langle n_0\rangle a^+\sigma_A a$ de la 3ème ligne de XII-18

$$\int d^2\alpha\;\gamma\langle n_0\rangle P(\alpha)\; a^+|\alpha\rangle\langle\alpha| a = \int d^2\alpha\;\gamma\langle n_0\rangle P(\alpha)\left[\left(\alpha^* + \frac{\partial}{\partial\alpha}\right)|\alpha\rangle\langle\alpha|\right] a \qquad (XII-40)$$

Comme l'opérateur a ne dépend pas du nombre α on peut faire entrer a dans le crochet du dernier terme de (XII-40). En utilisant alors (XII-36), on obtient pour (XII-40) :

$$\gamma\langle n_0\rangle\int d^2\alpha\; P(\alpha)\left(\alpha^* + \frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\left(\alpha + \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right)|\alpha\rangle\langle\alpha| \qquad (XII-41)$$

On fait alors une intégration par parties, simple pour les 2 termes en $\frac{\partial}{\partial\alpha}|\alpha\rangle\langle\alpha|$ et $\frac{\partial}{\partial\alpha^*}|\alpha\rangle\langle\alpha|$, double pour le terme $\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\alpha^*}|\alpha\rangle\langle\alpha|$ et on obtient pour (XII-41) :

$$\gamma\langle n_0\rangle\int d^2\alpha\left[\alpha\alpha^* P(\alpha) + P(\alpha) - \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\left(\alpha^* P(\alpha)\right) - \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha P(\alpha)\right) + \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\alpha^*}P(\alpha)\right]|\alpha\rangle\langle\alpha| \qquad (XII-42)$$

c) <u>Forme explicite de l'équation d'évolution de $P(\alpha,\alpha^*,t)$</u>

Tous les termes de (XII-18) étant ainsi calculés, on obtient finalement en posant $\tilde{\omega}_0 = \omega_0 + \delta$

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial t} = \left(\frac{\gamma}{2} + i\tilde{\omega}_0\right)\frac{\partial}{\partial \alpha}(\alpha P) + \left(\frac{\gamma}{2} - i\tilde{\omega}_0\right)\frac{\partial}{\partial \alpha^*}(\alpha^* P) + \gamma \langle n_0 \rangle \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha \, \partial \alpha^*}} \quad (XII-43)$$

Ecrite dans la base des états propres $|\varphi_i\rangle$ de H_R, l'équation pilote donnait un ensemble d'équations différentielles linéaires couplées. Lorsqu'on l'écrit dans la base des états $|\alpha\rangle$ on obtient une équation aux dérivées partielles qui a la structure d'une équation de Fokker-Planck.

f) Interprétation simple des divers termes de l'équation de Fokker-Planck.

- Raisonnons pour simplifier sur une équation à une seule variable réelle x :

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial}{\partial x}(x P) + \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} P \qquad (XII-44)$$

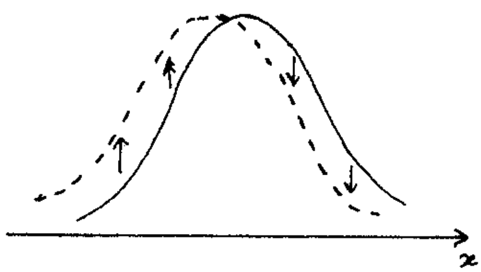
où λ et μ sont 2 constantes.

- 1er terme : $\lambda \frac{\partial}{\partial x}(x P)$

Si la largeur en x de $P(x,t)$ est faible, la forme de la courbe $\lambda x P(x,t)$ est très voisine de celle de $P(x,t)$ (courbe en traits pleins de la fig 1).

Le 1er terme de XII-44, $\lambda \frac{\partial}{\partial x}(xP)$, fait varier $P(x,t)$ au point x d'une quantité proportionnelle à dérivée par rapport à x de $\lambda x P(x,t)$. Le signe de cette dérivée est représenté par une flèche sur la figure 1 ($\uparrow$ si >0, $\downarrow$ si <0) de manière à indiquer le sens de la déformation de $P(x,t)$ due au 1er terme de (XII-44)

Fig 1



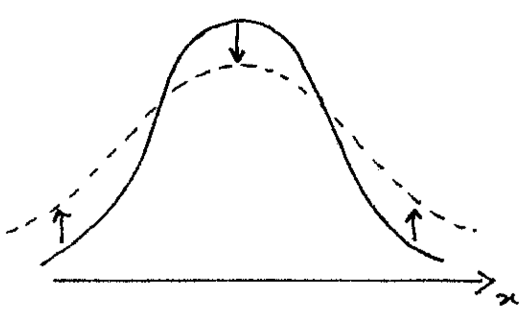
La nouvelle courbe obtenue un instant dt après est representée en traits tirétés sur la fig. 1. On voit qu'elle correspond à un déplacement de la courbe $P(x,t)$ à gauche si $\lambda x > 0$, à droite si $\lambda x < 0$

Le terme $\lambda \frac{\partial}{\partial x}(xP)$ de l'équation de Fokker-Planck correspond donc à un drift de la densité de probabilité P dans la direction $-\lambda x$

- 2ème terme : $\mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} P$

La vitesse de variation due au 2ème terme de (XII-44), $\mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} P$, est proportionnelle à la dérivée seconde de P. Son signe est représenté par des flèches sur la figure 2 : il est négatif au sommet de la courbe (courbure <0 de P), positif sur les ailes. On voit que ce terme tend à élargir la courbe $P(x,t)$.

Fig 2



Le dernier terme de l'équation de Fokker-Planck décrit donc un élargissement par diffusion de la densité de probabilité

g) Fonction de Green de l'équation de Fokker-Planck.

– On vérifie aisément par substitution que la fonction :

$$P(\alpha t | \alpha' 0) = \frac{1}{\pi \langle n_0 \rangle (1 - e^{-\gamma t})} \exp\left\{ - \frac{\left[\alpha - \alpha' e^{-(\frac{\gamma}{2} + i\tilde{\omega}_0)t}\right]\left[\alpha^* - \alpha'^* e^{-(\frac{\gamma}{2} - i\tilde{\omega}_0)t}\right]}{\langle n_0 \rangle (1 - e^{-\gamma t})} \right\} \qquad (XII-45)$$

est une solution de (XII-43)

– C'est une gaussienne, centrée au point $\alpha' e^{-(\frac{\gamma}{2} + i\tilde{\omega}_0)t}$, de largeur $\sqrt{\langle n_0 \rangle (1 - e^{-\gamma t})}$, dont l'aire totale est égale à 1

$$\int d^2\alpha \; P(\alpha t | \alpha' 0) = 1 \qquad (XII-46)$$

– Quand $t \to 0_+$, la largeur de la gaussienne tend vers 0. Comme son intégrale reste toujours égale à 1, on en déduit

$$\lim_{t \to 0_+} P(\alpha t | \alpha' 0) = \delta^{(2)}(\alpha - \alpha') = \delta(\alpha - \alpha')\, \delta(\alpha^* - \alpha'^*) \qquad (XII-47)$$

$P(\alpha t | \alpha' 0)$ est donc la fonction de Green de l'équation de Fokker-Planck. On en déduit que la solution de (XII-45) correspondant à la condition initiale $P(\alpha, 0) = \phi(\alpha)$ s'écrit :

$$P(\alpha, t) = \int d^2\alpha' \; P(\alpha t | \alpha' 0)\, \phi(\alpha') \qquad (XII-48)$$

– Quand $t \to \infty$, on a :

$$\lim_{t \to \infty} P(\alpha t | \alpha' 0) = \frac{1}{\pi \langle n_0 \rangle} e^{-\alpha\alpha^* / \langle n_0 \rangle} \qquad (XII-49)$$

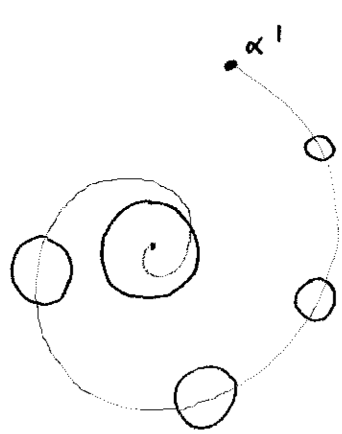
On retrouve la densité (XII-32) correspondant à 1 oscillateur en équilibre thermodynamique à la température T.

– La fonction de Green (XII-45) permet d'étudier ce qui se passe en fonction du temps lorsqu'on part à $t = 0$ du système S dans un état cohérent $|\alpha'\rangle$. La fonction $P(\alpha)$ est alors $\delta^{(2)}(\alpha - \alpha')$.

A un instant ultérieur, la fonction $P(\alpha)$ est devenue une gaussienne centrée au point $\alpha' e^{-(\frac{\gamma}{2} + i\tilde{\omega}_0)t}$ (ce point décrit une spirale logarithmique) et dont la largeur croît au cours du temps.

Au bout d'un temps très long, $P(\alpha)$ a atteint un régime stationnaire et coïncide avec la distribution d'équilibre thermodynamique.

Fig 3



Remarque : Même dans un état cohérent les observables de S ne peuvent être déterminées simultanément avec une précision infinie (l'état $|\alpha\rangle$ est un état minimal). En plus de cette incertitude quantique fondamentale, le couplage de S avec R fait apparaître une incertitude supplémentaire qui se traduit par la largeur finie de $P(\alpha, t)$

On voit d'ailleurs que cet élargissement n'existe que si $\langle n_0 \rangle \neq 0$. Il est donc dû aux photons présents dans R. Si l'on se limite à l'émission spontanée ($\langle n_0 \rangle = 0$), S évolue en restant dans un état cohérent.