V - Hamiltonien d'interaction

A - Expression de l'hamiltonien d'interaction.

- Dans l'expression (I-22) de l'hamiltonien total du système charges + champs,

$$\mathbb{H} = \sum_\alpha \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{P}_\alpha - e_\alpha \vec{A}(\vec{R}_\alpha)\right]^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\alpha>\beta}\frac{e_\alpha e_\beta}{|\vec{R}_\alpha - \vec{R}_\beta|} + \sum_i \hbar\omega_i\left(a_i^+ a_i + \frac{1}{2}\right) \qquad (V\text{-}1)$$

regroupons les termes qui dépendent des seules variables atomique, des seules variables de rayonnement, des 2 types de variables à la fois. On obtient :

$$\mathbb{H} = \underbrace{H_A + H_R}_{H_0} + H_I \qquad (V\text{-}2)$$

$$H_A = \sum_\alpha \frac{1}{2m_\alpha}\vec{P}_\alpha^{\,2} + \sum_{\alpha>\beta}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e_\alpha e_\beta}{|\vec{R}_\alpha - \vec{R}_\beta|} \qquad (V\text{-}3)$$

$$H_R = \sum_i \hbar\omega_i\left(a_i^+ a_i + \frac{1}{2}\right) \qquad (V\text{-}4)$$

$$H_I = \underbrace{-\sum_\alpha \frac{e_\alpha}{2m_\alpha}\left(\vec{P}_\alpha\cdot\vec{A}(\vec{R}_\alpha) + \vec{A}(\vec{R}_\alpha)\cdot\vec{P}_\alpha\right)}_{H_{I1}} + \underbrace{\sum_\alpha \frac{e_\alpha^2}{2m_\alpha}\vec{A}^2(\vec{R}_\alpha)}_{H_{I2}} \qquad (V\text{-}5)$$

Lorsqu'on prend le développement en ondes planes progressives, H_{I1} et H_{I2} s'écrivent :

$$H_{I1} = -\sum_\alpha\sum_{i\lambda}\frac{e_\alpha}{2m_\alpha}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_i L^3}}\left[a_i\left(\vec{e}_\lambda\cdot\vec{P}_\alpha\, e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{R}_\alpha} + e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{R}_\alpha}\,\vec{e}_\lambda\cdot\vec{P}_\alpha\right) + \text{c.h.}\right] \qquad (V\text{-}6)$$

$$H_{I2} = \sum_\alpha\sum_{\substack{ij\\ \lambda\lambda'}}\frac{e_\alpha^2}{2m_\alpha}\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 L^3\sqrt{\omega_i\omega_j}}\left[a_i a_j e^{i(\vec{k}_i+\vec{k}_j)\cdot\vec{R}_\alpha}\,\vec{e}_\lambda\cdot\vec{e}_{\lambda'} + a_i a_j^+ e^{i(\vec{k}_i-\vec{k}_j)\cdot\vec{R}_\alpha}\,\vec{e}_\lambda\cdot\vec{e}_{\lambda'}^{\,*} + \text{c.h.}\right] \qquad (V\text{-}7)$$

Comme $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$, on peut dans H_{I1} faire commuter $\vec{P}_\alpha$ et $\vec{A}(\vec{R}_\alpha)$ et écrire $2\,\vec{A}(\vec{R}_\alpha)\cdot\vec{P}_\alpha$ au lieu de $\vec{A}(\vec{R}_\alpha)\cdot\vec{P}_\alpha + \vec{P}_\alpha\cdot\vec{A}(\vec{R}_\alpha)$.

H_{I1}, linéaire en a_i et a_i^+ décrit des processus à 1 photon : absorptions (a_i) ou émissions (a_i^+)

H_{I2} contient des termes en $a_i a_j$ (absorption de 2 photons), $a_i^+ a_j^+$ (émission de 2 photons), $a_j^+ a_i$ (diffusion d'un photon du mode i au mode j).

H_I est l'hamiltonien d'interaction car il contient à la fois a_i, a_i^+, $\vec{R}_\alpha$, $\vec{P}_\alpha$.

- Cas de particules ayant un spin.

Si une particule α a un spin $\vec{S}_\alpha$ et un moment magnétique de spin $\vec{M}_\alpha = g_\alpha \mu_B \vec{S}_\alpha/\hbar$ (g_α facteur g, μ_B magnéton de Bohr), on peut montrer qu'il faut ajouter à H_{I1} :

$$H_{I1}' = -\sum_\alpha \vec{M}_\alpha\cdot\vec{\mathbb{B}}(\vec{R}_\alpha) \qquad (V\text{-}8)$$

où $\vec{\mathbb{B}}(\vec{R}_\alpha)$ est l'opérateur champ magnétique pris au point $\vec{R}_\alpha$ où se trouve la particule α. En utilisant (I-19), on obtient :

$$H_{I1}' = -\sum_\alpha\sum_{i\lambda}\frac{i\,g_\alpha\mu_B}{\hbar}\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_i L^3}}\left[a_i(\vec{k}_i\times\vec{e}_\lambda)\cdot\vec{S}_\alpha\, e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{R}_\alpha} + \text{c.h.}\right] \qquad (V\text{-}9)$$

Etude d'un cas simple : système de 2 particules de charges opposées à l'approximation dipolaire électrique

- Transformation de H_A
  - Masse totale M_G $\qquad M_G = m_1 + m_2$ (V-10)
  - Masse réduite m $\qquad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ (V-11)
  - Variables $\vec{R}_G$ et $\vec{P}_G$ du centre de masse
$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{R}_G = \dfrac{m_1 \vec{R}_1 + m_2 \vec{R}_2}{m_1 + m_2} & \text{(V-12)} \\ \vec{P}_G = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 & \text{(V-13)} \end{array} \right.$$
  - Variable $\vec{R}$ et $\vec{P}$ de la "particule relative"
$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{R} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2 & \text{(V-14)} \\ \dfrac{\vec{P}}{m} = \dfrac{\vec{P}_1}{m_1} - \dfrac{\vec{P}_2}{m_2} & \text{(V-15)} \end{array} \right.$$

Un calcul bien connu donne :
$$H_A = \underbrace{\frac{\vec{P}_G^{\,2}}{2M_G}}_{\substack{\text{Energie du centre de masse} \\ \text{(degrés de liberté externes)}}} + \underbrace{\frac{\vec{P}^{\,2}}{2m} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e_1 e_2}{|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|}}_{\substack{\text{Energie dans le système du centre de masse} \\ \text{(degrés de liberté internes)}}} \qquad \text{(V-16)}$$

- Transformation de H_I.

Comme $\vec{R}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$ commute avec $\vec{R}_G$, on peut écrire :
$$e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{R}_\alpha} = e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{R}_G}\; e^{i\vec{k}_i\cdot(\vec{R}_\alpha - \vec{R}_G)} \qquad \text{(V-17)}$$
Si on la considère l'interaction d'un atome avec des photons optiques ou hertziens, on a : $\quad \vec{k}_i\cdot(\vec{R}_\alpha - \vec{R}_G) \ll 1$ (V-18)

car $\quad \frac{1}{k_i}$ = longueur d'onde du ray^t $\gg |\vec{R}_\alpha - \vec{R}_G| \sim$ dimensions atomique

On peut donc dans ce cas écrire (approximation dipolaire électrique) :
$$e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{R}_\alpha} \simeq e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{R}_G} \quad \text{ou encore} \quad \vec{A}(\vec{R}_\alpha) \simeq \vec{A}(\vec{R}_G) \qquad \text{(V-19)}$$
Comme par ailleurs $\qquad e_1 = -e_2 = e$ (V-20)

on voit que (cf V-15) : $\quad \sum_\alpha \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\vec{P}_\alpha = e\left(\frac{\vec{P}_1}{m_1} - \frac{\vec{P}_2}{m_2}\right) = \frac{e}{m}\vec{P}$ (V-21)

Finalement, on a pour H_{I1}, H_{I2}, H_{I1}'
$$\begin{aligned} H_{I1} &\simeq -\frac{e}{m}\,\vec{P}\cdot\vec{A}(\vec{R}_G) \\ &= -\frac{e}{m}\sum_{i\lambda}\left[a_i(\vec{e}_\lambda\cdot\vec{P})\,e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{R}_G} + a_i^+(\vec{e}_\lambda^{\,*}\cdot\vec{P})\,e^{-i\vec{k}_i\cdot\vec{R}_G}\right] \end{aligned} \qquad \text{(V-22)}$$
$$H_{I2} \simeq \frac{e^2}{2m}\left(\vec{A}(\vec{R}_G)\right)^2 \qquad \text{(V-23)}$$
$$H_{I1}' \simeq -\vec{M}\cdot\vec{\mathbb{B}}(\vec{R}_G) \qquad \text{avec} \quad \vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \qquad \text{(V-24)}$$

Ordres de grandeur relatifs de H_{I1}, H_{I2}, H_{I1}'

- $$\frac{H_{I2}}{H_{I1}} \sim \frac{\frac{e^2A^2}{m}}{\frac{eAp}{m}} \sim \frac{\frac{eAp}{m}}{\frac{p^2}{m}} \sim \frac{H_{I1}}{H_A} \qquad \text{(V-25)}$$

Si $H_{I1} \ll H_A$ (faible intensités de rayonnement, ou encore intensité du champ de rayonnement $\ll$ champ intraatomique, par exemple le champ coulombien du noyau), on a d'après V-25 $H_{I2} \ll H_{I1}$.

Il ne faut pas oublier cependant que si l'on étudie un processus à 2 photons (par exemple, diffusion Rayleigh ou Raman), H_{I1} n'intervient qu'au 2° ordre de perturbation (H_{I1} est linéaire en a_i et a_i^+) alors que H_{I2} qui est quadratique en a_i et a_i^+ intervient dès le 1er ordre. Les contributions de H_{I1} (de l'ordre de $\frac{(H_{I1})^2}{H_A}$) et de H_{I2} (de l'ordre de H_{I2}) sont alors d'après (V-25) comparables.

- $$H'_{I1} \simeq \vec{M}.\vec{B} \simeq \frac{e\hbar}{m} B \qquad (V-26)$$

or $$\vec{B} = \vec{\nabla} \times A \implies B \sim k A \sim \frac{A}{\lambda_R} \qquad (V-27)$$

Donc $$\frac{H'_{I1}}{H_{I1}} \sim \frac{\frac{e\hbar A}{m\lambda_R}}{\frac{eAp}{m}} \sim \frac{\hbar/p}{\lambda_R} = \frac{\lambda_A}{\lambda_R} \ll 1 \qquad (V-28)$$

car λ_A (longueur d'onde de De Broglie des électrons atomiques) $\ll \lambda_R$ (longueur d'onde du rayonnement)

Il n'est donc pas cohérent de garder H_{I1}' si l'on se contente de faire l'approximation dipolaire électrique sur H_{I1}.

B_ Conservation de l'impulsion globale.

- L'impulsion globale du système charges + champs

$$\vec{\mathbb{P}} = \sum_\beta \vec{P_\beta} + \sum_j \hbar \vec{k_j}\, a_j^+ a_j \qquad (V-29)$$

commute avec $H_I = H_{I1} + H_{I2} + H_{I1}'$. En fait, $\vec{\mathbb{P}}$ commute séparément avec H_{I1}, H_{I2}, H_{I1}'. Montrons le pour H_{I1} par exemple. Pour cela, il suffit d'utiliser :

$$\left[\vec{P_\beta} , F(\vec{R_\alpha}) \right] = -i\hbar \frac{\partial F}{\partial \vec{R_\beta}} \qquad (V-30)$$

$$[a_j^+ a_j , a_i] = -\delta_{ij}\, a_i \qquad [a_j^+ a_j , a_i^+] = \delta_{ij}\, a_i^+ \qquad (V-31)$$

De (V-6) et (V-31), on tire en effet :

$$\left[\sum_j \hbar \vec{k_j} a_j^+ a_j , H_{I1} \right] = -\sum_\alpha \sum_{i\lambda} \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_i L^3}} \left[-\hbar\vec{k_i}\, a_i (\vec{e_\lambda}.\vec{P_\alpha}) e^{i\vec{k_i}.\vec{R_\alpha}} + \hbar\vec{k_i}\, a_i^+ (\vec{e_\lambda}^*.\vec{P_\alpha}) e^{-i\vec{k_i}.\vec{R_\alpha}} \right] \qquad (V-32)$$

Par ailleurs, de (V-6) et (V-30), on déduit :

$$\left[\sum_\beta \vec{P_\beta} , H_{I1} \right] = -\sum_\alpha \sum_{i\lambda} \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_i L^3}} \left[a_i (-i\hbar)(i\vec{k_i})(\vec{e_\lambda}.\vec{P_\alpha}) e^{i\vec{k_i}.\vec{R}} + a_i^+ (-i\hbar)(-i\vec{k_i})(\vec{e_\lambda}^*.\vec{P_\alpha}) e^{-i\vec{k_i}.\vec{R_\alpha}} \right] \qquad (V-33)$$

On voit aisément que (V-32) et (V-33) sont opposés, ce qui montre bien que $\vec{\mathbb{P}}$ et H_{I1} commutent.

- Par ailleurs, H_0 commute aussi avec $\vec{\mathbb{P}}$. (Ceci est évident pour H_R ; pour H_A, il suffit de remarquer que l'énergie d'interaction électrostatique entre les charges est invariante par translation globale de l'ensemble des charges). On peut donc trouver des états propres de H_0 qui soient aussi états propres de $\vec{\mathbb{P}}$.

Le fait que $[H_I, \vec{\mathbb{P}}] = 0$ entraîne la propriété importante suivante.

H_I n'a pas d'élément de matrice entre 2 états propres de H_0 correspondant à des impulsions globales différentes.

- Exemple

$|\hbar \vec{K}_e, \varphi_e ; 0\rangle$ $\begin{cases} \text{Atome dans l'état interne } |\varphi_e\rangle \\ \text{Impulsion du centre de masse } \hbar \vec{K}_e \\ 0 \text{ photon} \end{cases}$ (V-34)

$|\hbar \vec{K}_f, \varphi_f ; \vec{k}\lambda\rangle$ $\begin{cases} \text{Atome dans l'état interne } |\varphi_f\rangle \\ \text{Impulsion du centre de masse } \hbar \vec{K}_f \\ 1 \text{ photon d'impulsion } \hbar\vec{k} \text{ et de polarisation } \vec{\varepsilon}_\lambda \end{cases}$ (V-35)

(V-34) et (V-35) sont 2 états propres communs à H_0 et $\vec{\mathbb{P}}$. H_I ne peut les relier que si :

$$\hbar \vec{K}_e = \hbar \vec{K}_f + \hbar \vec{k} \qquad (V-36)$$

Remarques

(i) On peut aussi montrer que H_I commute avec le moment cinétique total du système global charges + champs.
La façon la plus simple de mener le calcul consiste à utiliser le développement en ondes multipolaires étudié l'an dernier et les opérateurs a_{kJMn} et a^+_{kJMn} de destruction et de création d'un photon multipolaire.

(ii) Les expressions approchées de H_{I1} H_{I2} et H'_{I1} établies en V-22, V-23 et V-24 pour un système de 2 particules de charges opposées à l'approximation dipolaire électrique commutent elles aussi avec $\vec{\mathbb{P}}$. Pour le voir il suffit d'utiliser le fait que

$$[\vec{P}_1 + \vec{P}_2 , \vec{A}(\vec{R}_G)] = [\vec{P}_G , \vec{A}(\vec{R}_G)] = -i\hbar \frac{\partial \vec{A}(\vec{R}_G)}{\partial \vec{R}_G} \qquad (V-37)$$

Le calcul se poursuit alors de manière très analogue à celui qui conduit à (V-32) et (V-33).

(iii) Si l'on part à un certain instant d'un état propre de H_0 et qu'on attend suffisamment longtemps, on ne peut sous l'effet de H_I qu'aboutir qu'à d'autres états propres de H_0 de même énergie (Conservation de l'énergie globale lors d'un processus réel).
Par exemple, lors de l'émission réelle d'un photon par un atome, on a, en utilisant des notations ≡ à celles de V-34 et V-35, et en désignant par E_e et E_f les énergies internes des états $|\varphi_e\rangle$ et $|\varphi_f\rangle$, par M la masse totale de l'atome.

$$\frac{\hbar^2 K_e^2}{2M} + E_e = \frac{\hbar^2 K_f^2}{2M} + E_f + \hbar c k \qquad (V-38)$$

La résolution simultanée des équations (V-36) et (V-38) est très connue. Elle montre que l'énergie $h\nu = \hbar c k$ du photon émis diffère de l'énergie $E_e - E_f$ de la transition atomique par un terme dépendant de la vitesse atomique (effet Doppler) et par un autre terme indépendant de cette vitesse (effet de recul)

C - Autres expressions équivalentes de H_{I1} et H'_{I1}.

- Supposons pour simplifier le noyau infiniment lourd et placé à l'origine des coordonnées. On est alors ramenés à l'étude d'un ensemble d'électrons plongés dans un potentiel central.

- Soit $\{|\varphi_b\rangle\}$ une base orthonormée de l'espace des états atomiques. En mettant 2 fois la relation de fermeture à droite et à gauche de H_{I1}, on obtient à partir de (V-5) :

$$H_{I1} = -\sum_\alpha \sum_{bc} |\varphi_b\rangle\langle\varphi_b| \frac{e_\alpha}{2m_\alpha}\left(\vec{P}_\alpha \cdot \vec{\mathbb{A}}(\vec{R}_\alpha) + \vec{\mathbb{A}}(\vec{R}_\alpha)\cdot\vec{P}_\alpha\right)|\varphi_c\rangle\langle\varphi_c| \qquad (V-39)$$

On peut toujours dans l'élément de matrice qui figure dans (V-39) remplacer $\vec{R}_\alpha$ par $\vec{r}$, à condition de multiplier par $\delta(\vec{r}-\vec{R}_\alpha)$ et d'intégrer sur $\vec{r}$. Il vient ainsi :

$$H_{I1} = -\sum_b \sum_c |\varphi_b\rangle\langle\varphi_c| \int d^3r \; \vec{J}^{\,cond}_{bc}(\vec{r}) \cdot \vec{\mathbb{A}}(\vec{r}) \qquad (V-40)$$

avec

$$\vec{J}^{\,cond}_{bc}(\vec{r}) = e\langle\varphi_b|\sum_\alpha \left(\frac{\vec{P}_\alpha}{2m_\alpha}\delta(\vec{r}-\vec{R}_\alpha) + \delta(\vec{r}-\vec{R}_\alpha)\frac{\vec{P}_\alpha}{2m_\alpha}\right)|\varphi_c\rangle \qquad (V-41)$$

On reconnait dans l'élément de matrice de (V-41) l'expression de l'opérateur courant de probabilité au point $\vec{r}$ de l'ensemble des électrons. Comme le tout est multiplié par la charge e de l'électron, on voit que $\vec{J}^{\,cond}_{bc}(\vec{r})$ est un courant de conduction électronique associé à la transition $b \leftrightarrow c$: élément de matrice entre $|\varphi_c\rangle$ et $\langle\varphi_b|$ de l'opérateur courant électronique au point $\vec{r}$.

Notons bien que dans (V-40) l'opérateur atomique est $|\varphi_b\rangle\langle\varphi_c|$. Les 3 composantes du vecteur $\vec{J}^{\,cond}_{bc}(\vec{r})$ sont des nombres et non des opérateurs (les 3 composantes de $\vec{\mathbb{A}}(\vec{r})$ sont des opérateurs en ce qui concerne le rayonnement, des nombres en ce qui concerne les atomes)

- On peut de même mettre H'_{I1} sous la forme

$$H'_{I1} = -\sum_\alpha \sum_{bc} |\varphi_b\rangle\langle\varphi_b| g_\alpha \mu_B \vec{S}_\alpha \cdot \vec{\mathbb{B}}(\vec{R}_\alpha)|\varphi_c\rangle\langle\varphi_c| \qquad (V-42)$$

La même transformation que plus haut donne :

$$H'_{I1} = -\sum_b \sum_c |\varphi_b\rangle\langle\varphi_c| \int d^3r \; \vec{M}_{bc}(\vec{r}) \cdot \vec{\mathbb{B}}(\vec{r}) \qquad (V-43)$$

où

$$\vec{M}_{bc}(\vec{r}) = \langle\varphi_b|\sum_\alpha g_\alpha \mu_B \vec{S}_\alpha \,\delta(\vec{r}-\vec{R}_\alpha)|\varphi_c\rangle \qquad (V-44)$$

est un vecteur magnétisation de spin au point $\vec{r}$

Transformons l'intégrale sur $\vec{r}$ de (V-43)

$$\int d^3r \; \vec{M}_{bc}(\vec{r}) \cdot \vec{\mathbb{B}}(\vec{r}) = \int d^3r \; M^i_{bc}(\vec{r})\, \mathbb{B}_i(\vec{r}) \qquad (V-45)$$

en utilisant $\vec{\mathbb{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbb{A}}$, c-à-d :

$$\mathbb{B}_i = \varepsilon_{ijk}\, \partial_j \mathbb{A}_k \qquad (V-46)$$

$$\int d^3r\, M^i_{bc}\, \mathbb{B}_i = \int d^3r\, \varepsilon_{ijk}\, M^i_{bc}\, \partial_j \mathbb{A}_k$$

$$= \underbrace{\int d^3r\, \partial_j \left(\varepsilon_{ijk}\, M^i_{bc}\, \mathbb{A}_k\right)}_{\text{Transformations en une intégrale de surface } \to 0} - \int d^3r\, \mathbb{A}_k\, \varepsilon_{ijk}\, \partial_j M^i_{bc}$$

$$= \int d^3r\, \mathbb{A}_k\, \varepsilon_{kji}\, \partial_j M^i_{bc} = \int d^3r\, \vec{\mathbb{A}}(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \times \vec{M}_{bc}(\vec{r}) \qquad (V\text{-}47)$$

Si l'on pose :
$$\vec{J}^{\,mag}_{bc}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{M}_{bc}(\vec{r}) \qquad (V\text{-}48)$$

on voit que :
$$H'_{I1} = -\sum_{bc} |\varphi_b\rangle\langle\varphi_c| \int d^3r\, \vec{J}^{\,mag}_{bc}(\vec{r}) \cdot \vec{\mathbb{A}}(\vec{r}) \qquad (V\text{-}49)$$

$\vec{J}^{\,mag}_{bc}(\vec{r})$ est un courant de magnétisation associé à la densité de magnétisation $\vec{M}_{bc}(\vec{r})$.

Finalement si
$$\vec{J}_{bc}(\vec{r}) = \vec{J}^{\,cond}_{bc}(\vec{r}) + \vec{J}^{\,mag}_{bc}(\vec{r}) \qquad (V\text{-}50)$$

est le courant total associé à la transition $b \leftrightarrow c$, on a :

$$H_{I1} + H_{I1}' = \sum_b \sum_c |\varphi_b\rangle\langle\varphi_c| \int d^3r\, \vec{J}_{bc}(\vec{r}) \cdot \vec{\mathbb{A}}(\vec{r}) \qquad (V\text{-}51)$$

- Si l'on utilise le développement en ondes planes progressives de $\vec{\mathbb{A}}(\vec{r})$ on obtient

$$H_{I1} + H_{I1}' = \sum_b \sum_c \sum_{i\lambda} \underbrace{|\varphi_b\rangle\langle\varphi_c|\, a_i}\ \underbrace{\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_i L^3}} \int d^3r\, \vec{e}_\lambda \cdot \vec{J}_{bc}(\vec{r})\, e^{i\vec{k}_i\cdot\vec{r}}} + c.h. \qquad (V\text{-}52)$$

Toute la partie opérateur de V-52 est dans la 1ère accolade

a_i détruit un photon $\vec{k}_i\, \vec{e}_\lambda$

$|\varphi_b\rangle\langle\varphi_c|$ fait passer de l'état $|\varphi_c\rangle$ à l'état $|\varphi_b\rangle$ (agissant sur $|\varphi_c\rangle$, cet opérateur donne $|\varphi_b\rangle$; sur n'importe quel autre état, il donne 0)

La 2e accolade est un nombre qui est la composante sur le mode $\vec{k}_i\, \vec{e}_\lambda$ du courant total $\vec{J}_{bc}(\vec{r})$ associé à la transition $\varphi_b \to \varphi_c$

- Si l'on utilise le développement en ondes multipolaires pour $\vec{\mathbb{A}}(\vec{r})$, on obtient (cf équation XII-41 du cours de l'an dernier)

$$H_{I1} + H_{I1}' = \sum_b \sum_c \int dk_0 \sum_{JM\Pi} |\varphi_b\rangle\langle\varphi_c|\, a_{k_0 JM\Pi} \int \vec{\mathbb{A}}_{k_0 JM\Pi}(\vec{r}) \cdot \vec{J}_{bc}(\vec{r})\, d^3r + c.h. \qquad (V\text{-}53)$$

L'intégrale sur r est un nombre qui est la composante sur l'onde multipolaire $k_0 JM\Pi$ du courant $\vec{J}_{bc}(\vec{r})$.

- les expressions (V-52) et (V-53) sont très utiles pour justifier les expressions semi-classiques des diagrammes de rayonnement, ainsi que nous le verrons plus loin.