7.1.75

Etats quantiques du champ électromagnétique libre (suite et fin)

G - Représentation $P(\alpha)$ pour l'opérateur densité.

① Définition de la représentation $P(\alpha)$.

- Développement d'un vecteur ou d'un opérateur sur la base non orthonormée et "surcomplète" des états $|\alpha\rangle$.

A partir de la relation de fermeture (III - 36), on obtient :

$$|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\ |\alpha\rangle\langle\alpha|\psi\rangle \qquad (IV-1)$$

$$A = \mathbb{1}A\mathbb{1} = \frac{1}{\pi^2}\int d^2\alpha\, d^2\beta\, |\alpha\rangle\langle\alpha|\rho|\beta\rangle\langle\beta|$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int d^2\alpha\, d^2\beta\ \langle\alpha|\rho|\beta\rangle\ |\alpha\rangle\langle\beta| \qquad (IV-2)$$

- Le développement IV-2 d'un opérateur A n'est pas unique. Ainsi, en prenant $A = \mathbb{1}$, on a par exemple :

$$\mathbb{1} = \frac{1}{\pi^2}\int d^2\alpha\, d^2\beta\ \underbrace{\langle\alpha|\beta\rangle}_{\neq 0 \text{ car } |\alpha\rangle \text{ et } |\beta\rangle \text{ ne sont pas } \perp}\ |\alpha\rangle\langle\beta| \qquad (IV-3)$$

mais on a aussi, d'après (III - 36)

$$\mathbb{1} = \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\ |\alpha\rangle\langle\alpha| \qquad (IV-4)$$

- Nous verrons plus loin que, dans de très nombreux cas, on peut prendre pour A des développements ne faisant intervenir que des projecteurs $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ (et non des opérateurs de la forme $|\alpha\rangle\langle\beta|$ avec $\beta\neq\alpha$).

En particulier, pour l'opérateur densité ρ, on peut très souvent écrire :

$$\boxed{\rho = \int d^2\alpha\ P(\alpha)\ |\alpha\rangle\langle\alpha|} \qquad (IV-5)$$

(IV-5) définit la représentation $P(\alpha)$ de ρ. Nous indiquerons plus loin des manières de calculer $P(\alpha)$ lorsque cette quantité existe.

② Propriétés de $P(\alpha)$ - Ressemblances avec une densité de probabilité.

- ρ est hermitique ($\rho = \rho^+$), de même que $|\alpha\rangle\langle\alpha|$. Donc

$$P(\alpha) \quad \text{réel} \qquad (IV-6)$$

- ρ est normé : $\text{Tr}\,\rho = 1$. Donc :

$$\int d^2\alpha\ P(\alpha)\ \text{Tr}\,|\alpha\rangle\langle\alpha| = \int d^2\alpha\ P(\alpha)\ \langle\alpha|\alpha\rangle = \int d^2\alpha\ P(\alpha) = 1 \qquad (IV-7)$$

On a utilisé pour démontrer IV-7, le théorème suivant très utile :

$$\text{Tr}\ A|\varphi\rangle\langle\psi| = \langle\psi|A|\varphi\rangle. \qquad (IV-8)$$

En effet :

$$\text{Tr}\ A|\varphi\rangle\langle\psi| = \sum_n \langle u_n|A|\varphi\rangle\langle\psi|u_n\rangle = \sum_n \langle\psi|u_n\rangle\langle u_n|A|\varphi\rangle = \langle\psi|A|\varphi\rangle$$

- Valeur moyenne d'une fonction de a et a^+ mise sous forme <u>normale</u>, c-à-d où tous les a sont à droite des a^+ :

$$\langle(a^+)^l a^m\rangle = \text{Tr}\,\rho\, a^{+l} a^m = \int d^2\alpha\ P(\alpha)\ \text{Tr}\ a^{+l}a^m|\alpha\rangle\langle\alpha|$$

En utilisant (IV-8), on obtient :

$$\langle a^{+\ell} a^m \rangle = \int d^2\alpha \; P(\alpha) \underbrace{\langle \alpha | a^{+\ell}}_{\alpha^{*\ell}\langle\alpha|} \underbrace{a^m | \alpha \rangle}_{\alpha^m|\alpha\rangle} = \int d^2\alpha \; P(\alpha) \alpha^{*\ell} \alpha^m \qquad (IV-9)$$

La réalité de $P(\alpha)$, sa normalisation à 1 (cf IV-7), le fait que le calcul de $\langle a^{+\ell} a^m \rangle$ se ramène à l'intégrale sur α du produit de $\alpha^{*\ell}\alpha^m$ par $P(\alpha)$, font que $P(\alpha)$ ressemble à une densité de probabilité de la variable complexe α.

③ <u>$P(\alpha)$ n'est pas une densité de probabilité, mais plutôt une densité de "quasiprobabilité"</u>

- $P(\alpha)$ ne peut être interprété comme une densité de probabilité pour que le système soit dans l'état cohérent $|\alpha\rangle$.
  En effet, les états $|\alpha\rangle$ ne sont pas $\perp$. Donc, dans IV-5, on ne somme pas sur des probabilités exclusives (le fait d'être dans l'état $|\alpha\rangle$ n'exclut pas d'être dans l'état $|\beta\rangle$ avec $\beta \neq \alpha$).

- α est la valeur propre d'un opérateur non hermitique a dont les parties réelle et imaginaire (qui ne sont autres que X et P) ne commutent pas. Il est impossible de mesurer simultanément ces parties réelle et imaginaire, ou encore le module et l'argument de α. La densité de probabilité de la variable α n'est donc pas accessible à la mesure, et par suite n'a pas de sens.

- On peut trouver des ρ pour lesquels $P(\alpha)$ prend dans certaines régions du plan complexe des valeurs négatives, ce qui est exclu pour une densité de probabilité.
  On peut encore dire qu'on ne peut considérer ρ, défini par IV-5, comme un mélange statistique d'états $|\alpha\rangle$ avec des "poids" $P(\alpha)$.

En résumé, $P(\alpha)$ ressemble beaucoup à une densité de probabilité mais n'en est pas réellement une. C'est une densité de "quasiprobabilité" (d.q-p), qui tend vers une vraie densité de probabilité à la limite classique ($|\alpha| \gg 1$).

L'intérêt de $P(\alpha)$ est de conduire à des formules simples comme (IV-9). Nous verrons également plus tard son intérêt pour l'étude de l'évolution de ρ. A l'équation "pilote" qui donne $\frac{d}{dt}\rho$ correspond très souvent une équation aux dérivées partielles pour $P(\alpha)$ qui a la structure d'une <u>"équation de Fokker-Planck"</u>, bien comme en mécanique statistique classique.

④ <u>Une première manière de calculer $P(\alpha)$ connaissant ρ.</u>

Supposons ρ mis sous forme <u>antinormale</u>, c-à-d sous forme d'une fonction de a et a^+ où tous les a^+ sont à droite des a.

$$\rho = \sum_{k,\ell} f_{k\ell}\, a^k a^{+\ell} \qquad (IV-10)$$

Dans IV-10, introduisons entre a^k et $a^{+\ell}$, l'opérateur $\mathbb{I}$ donné par IV-4 :

$$\rho = \sum_{k,\ell} f_{k\ell} \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \; a^k |\alpha\rangle\langle\alpha| a^{+\ell}$$

$$= \int d^2\alpha \, |\alpha\rangle\langle\alpha| \left(\frac{1}{\pi} \sum_{k,\ell} f_{k\ell}\, \alpha^k \alpha^{*\ell} \right) \qquad (IV-11)$$

On en déduit immédiatement

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi} \sum_{k,l} f_{kl} \, \alpha^k \alpha^{*l} \qquad \text{(IV-12)}$$

Au facteur $\frac{1}{\pi}$ près, $P(\alpha)$ s'obtient donc en remplaçant dans la forme anti-normale de ρ, a par α et a^+ par α^*

H - Autres exemples de densités de quasi-probabilité.

① Rappels sur la fonction caractéristique associée à une variable aléatoire classique.

- x, p : variables aléatoires classiques

  $f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$: probabilité de trouver x entre ξ, $\xi + d\xi$ et p entre η et $\eta + d\eta$.

- Fonction caractéristique : T.F. de la densité de probabilité $f(\xi,\eta)$

$$C(u,v) = \int f(\xi,\eta)\, e^{-i(u\xi + v\eta)} d\xi\, d\eta = \overline{e^{-i(ux+vp)}} \qquad \text{(IV-13)}$$

($\overline{}$: valeur moyenne classique, $<\ >$: valeur moyenne quantique)

- Intérêt pour le calcul des "moments".

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial(-iu)^k \partial(-iv)^l} C(u,v)\Big|_{u=v=0} = \int \xi^k \eta^l f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = \overline{x^k p^l} \qquad \text{(IV-14)}$$

② Introduction pour un mode du champ électromagnétique quantifié de 3 fonctions ressemblant à des fonctions caractéristiques.

- ρ étant l'opérateur densité, λ une constante complexe, posons :

$$\boxed{C_S(\lambda) = \mathrm{Tr}\, \rho\, e^{(\lambda a^+ - \lambda^* a)}} \qquad \text{(IV-15)}$$

Comme $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + iP)$ et $a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - iP)$, il vient si l'on pose $\lambda = \frac{v - iu}{\sqrt{2}}$ avec v et u réels :

$$C_S(\lambda) = \mathrm{Tr}\, \rho\, e^{-i(uX + vP)} = \langle e^{-i(uX+vP)} \rangle \qquad \text{(IV-16)}$$

Ressemblance avec (IV-13).

- D'après la formule de Glauber (cf III-25), on a :

$$e^{(\lambda a^+ - \lambda^* a)} = e^{\lambda a^+} e^{-\lambda^* a} e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} = e^{-\lambda^* a} e^{\lambda a^+} e^{\frac{1}{2}|\lambda|^2} \qquad \text{(IV-17)}$$

Introduisons maintenant 2 autres fonctions de λ qui sont par définition :

$$\boxed{\begin{aligned} C_N(\lambda) &= \mathrm{Tr}\, \rho\, e^{\lambda a^+} e^{-\lambda^* a} \qquad \text{(IV-18)} \\ C_A(\lambda) &= \mathrm{Tr}\, \rho\, e^{-\lambda^* a} e^{\lambda a^+} \qquad \text{(IV-19)} \end{aligned}}$$

D'après (IV-17), on a :

$$C_S(\lambda) = e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2} C_N(\lambda) = e^{\frac{1}{2}|\lambda|^2} C_A(\lambda) \qquad \text{(IV-20)}$$

- Calcul des moments de fonctions de a et a^+ à partir de C_S, C_N, C_A.

  Evaluons les dérivées partielles de C_N, C_A, C_S par rapport à λ et λ^* en $\lambda = \lambda^* = 0$. Par exemple, prenons k fois la dérivée par rapport à λ, l fois la dérivée par rapport à $-\lambda^*$.

$$\frac{\partial^3}{\partial\lambda\,\partial(-\lambda^*)^2}\,C_N(\lambda) = \mathrm{Tr}\,\rho\, a^+a^2 = \langle a^+a^2\rangle \qquad \text{(IV-21)}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial\lambda\,\partial(-\lambda^*)^2}\,C_A(\lambda) = \mathrm{Tr}\,\rho\, a^2a^+ = \langle a^2a^+\rangle \qquad \text{(IV-22)}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial\lambda\,\partial(-\lambda^*)^2}\,C_S(\lambda) = \mathrm{Tr}\,\rho\,\frac{a^+a^2+aa^+a+a^2a^+}{3} = \frac{1}{3}\langle a^+a^2+aa^+a+a^2a^+\rangle \qquad \text{(IV-23)}$$

Pour établir (IV-23), on développe dans (IV-15) $e^{(\lambda a^+-\lambda^*a)}$ en puissances de $\lambda a^+-\lambda^*a$, et on recherche le coefficient de $\lambda(-\lambda^*)^2$.

On voit que, suivant que l'on prend C_N, C_A, ou C_S, on obtient le moment d'une expression de a et a^+ qui est mise sous forme, normale, antinormale ou symétrique, d'où l'origine des indices N, A, S.

③ Transformées de Fourier de C_N, C_A, C_S

a - Transformée de Fourier de $C_N(\lambda)$.

- Supposons que la représentation $P(\alpha)$ de ρ existe. En portant (IV-5) dans (IV-18), on obtient:

$$C_N(\lambda) = \int d^2\alpha\; P(\alpha)\,\mathrm{Tr}\, e^{\lambda a^+}e^{-\lambda^*a}|\alpha\rangle\langle\alpha| \qquad \text{(IV-24)}$$

c-à-d d'après IV-8

$$C_N(\lambda) = \int d^2\alpha\; P(\alpha)\,\langle\alpha|e^{\lambda a^+}e^{-\lambda^*a}|\alpha\rangle = \int d^2\alpha\; P(\alpha)\,e^{\lambda\alpha^*-\lambda^*\alpha} \qquad \text{(IV-25)}$$

Si l'on pose $\alpha = \frac{x+ip}{\sqrt{2}}$, $\lambda = \frac{v-iu}{\sqrt{2}}$, il vient

$$C_N(u,v) = \frac{1}{2}\int dx\,dy\; P(x,y)\,e^{-i(ux+vp)} \qquad \text{(IV-26)}$$

$2C_N(\lambda)$ est donc la T.F. de $P(\alpha)$.

- En inversant (IV-26) si c'est possible, on obtient :

$$P(\alpha) = \frac{2}{(2\pi)^2}\int du\,dv\; C_N(u,v)\,e^{i(ux+vp)} = \frac{1}{\pi^2}\int d^2\lambda\; C_N(\lambda)\,e^{\lambda^*\alpha-\lambda\alpha^*} \qquad \text{(IV-27)}$$

- Discussion sur l'existence de $P(\alpha)$

$C_S(\lambda)$ étant, d'après (IV-15), la valeur moyenne d'un opérateur unitaire, on a : $|C_S(\lambda)| \leq 1$ et donc, d'après (IV-20), $|C_N(\lambda)| \leq e^{+\frac{1}{2}|\lambda|^2}$.
Cette borne de $|C_N(\lambda)|$ n'est pas très restrictive et on peut trouver des ρ pour lesquels $|C_N(\lambda)|$ croît suffisamment vite avec $|\lambda|$ pour que la T.F. de $C_N(\lambda)$ n'existe pas (au sens des distributions tempérées).

Donc, $P(\alpha)$ n'existe pas toujours. Klauder et Sudarshan ont réussi à définir $P(\alpha)$ dans tous les cas, en introduisant des distributions plus générales que les distributions tempérées. Mais ces objets sont très singuliers. La représentation $P(\alpha)$ n'est intéressante que si $P(\alpha)$ n'est pas trop singulier. Autrement, il vaut mieux revenir à IV-2.

En conclusion, quand $P(\alpha)$ existe, c'est la T.F. de $C_N(\lambda)$.

b - Transformée de Fourier de $C_A(\lambda)$.

- Dans la définition (IV-19) de $C_A(\lambda)$ introduisons $\mathbb{1}$ (formule IV-4) entre $e^{-\lambda^*a}$ et $e^{\lambda a^+}$.

$$C_A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\;\mathrm{Tr}\,\rho\, e^{-\lambda^*a}|\alpha\rangle\langle\alpha|e^{\lambda a^+} = \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\; e^{-\lambda^*\alpha+\lambda\alpha^*}\,\mathrm{Tr}\,\rho\,|\alpha\rangle\langle\alpha| \qquad \text{(IV-28)}$$

c-a-d encore, d'après (IV-8)

$$C_A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\;\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle\, e^{\lambda\alpha^*-\lambda^*\alpha} \qquad \text{(IV-29)}$$

$C_A(\lambda)$ est donc (au facteur $\frac{1}{\pi}$ près) la T.F. de $\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle$.

- Il est toujours possible d'inverser (IV-29) car d'après (IV-20), $|C_A(\lambda)| \leqslant e^{-\frac{1}{2}|\lambda|^2}$

On a :

$$\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2\lambda \; C_A(\lambda)\, e^{\lambda^*\alpha - \lambda\alpha^*} \qquad \text{(IV-30)}$$

c) Transformée de Fourier de $C_S(\lambda)$.

Elle existe toujours car, comme nous l'avons dit en a, $|C_S(\lambda)| \leqslant 1$.
On obtient en fait la "fonction de distribution de Wigner" introduite par Wigner en 1932 : $W(\alpha) = W(x,p)$

$$W(\alpha) = W(x,p) = \frac{1}{\pi}\int d^2\lambda \; C_S(\lambda)\, e^{\lambda^*\alpha - \lambda\alpha^*} = \frac{1}{2\pi}\int du\,dv\; C_S(u,v)\, e^{i(ux+vp)} \qquad \text{(IV-31)}$$

On peut inversement écrire

$$C_S(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha \; W(\alpha)\, e^{\lambda\alpha^* - \lambda^*\alpha} \qquad \text{(IV-32)}$$

$$\boxed{\rho \; \begin{cases} \nearrow \; \mathrm{Tr}\,\rho\, e^{\lambda a^+ - \lambda^* a} = C_S(\lambda) \xrightarrow{\text{T.F.}} W(x,p) & \text{Fonction de Wigner.} \\ \rightarrow \; \mathrm{Tr}\,\rho\, e^{-\lambda^* a} e^{\lambda a^+} = C_A(\lambda) \xrightarrow{\text{TF}} \langle\alpha|\rho|\alpha\rangle & \text{Elément diagonal de } \rho \text{ dans la base } \{|\alpha\rangle\}. \\ \searrow \; \mathrm{Tr}\,\rho\, e^{\lambda a^+} e^{-\lambda^* a} = C_N(\lambda) \xrightarrow{\text{TF}} P(\alpha) & \text{Représentation } P(\alpha) \text{ de } \rho. \end{cases}}$$

Tableau récapitulatif. (IV-33)

$C_S(\lambda)$, $C_A(\lambda)$ et $C_N(\lambda)$ ne sont pas des vraies fonctions caractéristiques car x et p (ou a et a^+) ne commutent pas. Leurs transformées de Fourier $W(\alpha)$, $\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle$, $P(\alpha)$ ne sont pas des vraies densités de probabilité mais des d.q-p.

④ Intérêt de $W(\alpha)$, $\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle$, $P(\alpha)$

Partons des relations (IV-25), (IV-29) et (IV-32). Comme α et α^* sont des nombres,

$$\frac{\partial^3}{\partial\lambda\,\partial(-\lambda^*)^2} C_N(\lambda) = \int d^2\alpha \;\alpha^*\alpha^2\, P(\alpha) \qquad \text{(IV-34)}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial\lambda\,\partial(-\lambda^*)^2} C_A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha \;\alpha^*\alpha^2\, \langle\alpha|\rho|\alpha\rangle \qquad \text{(IV-35)}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial\lambda\,\partial(-\lambda^*)^2} C_S(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha \;\alpha^*\alpha^2\, W_S(\alpha) \qquad \text{(IV-36)}$$

En utilisant par ailleurs (IV-21), (IV-22) et (IV-23), on voit que :

$$\begin{cases} \langle a^+a^2\rangle = \int d^2\alpha \;\alpha^*\alpha^2\; P(\alpha) & \text{(IV-37)} \\ \langle a^2a^+\rangle = \int d^2\alpha \;\alpha^* a^2\; \frac{1}{\pi}\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle & \text{(IV-38)} \\ \frac{1}{3}\langle a^2a^+ + aa^+a + a^+a^2\rangle = \int d^2\alpha\;\alpha^*\alpha^2\;\frac{1}{\pi}\, W(\alpha) & \text{(IV-39)} \end{cases}$$

On voit ainsi que, pour calculer des moments de fonction de a et a^+ mises sous forme normale, antinormale ou symétrique, on peut oublier le caractère opératoriel de a et a^+ et calculer les moments correspondants de α et α^* en utilisant respectivement les d.q-p $P(\alpha)$, $\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle/\pi$ et $W(\alpha)/\pi$.

$P(\alpha)$ est adapté à tous les problèmes où l'on utilise par exemple des photodetecteurs pour étudier le rayonnement. De tels instruments commencent en effet par absorber des photons et mesurent donc des opérateurs mis sous forme normale.

Si l'on utilisait des détecteurs basés sur l'émission induite (sensibles donc à des opérateurs mis sous forme antinormale), il vaudrait mieux utiliser $\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle$.

Dans des problèmes de M.Q. où l'on s'intéresse à des observables symétrisées en a et a^+ ou en x et p, c'est la fonction de Wigner $W(x,p)$ qui est la mieux adaptée.

Remarque.

De $\frac{\partial^{(0)}}{\partial\lambda^0\,\partial(\lambda^*)^0}\, C_{N,A,S}(\lambda) = \mathrm{Tr}\,\rho = 1$, on déduit :

$$\int d^2\alpha\; P(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\,\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\; W(\alpha) = 1 \qquad (IV-40)$$

qui est la relation de normalisation des 3 d.q-p.

⑤ Relations entre $P(\alpha)$, $\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle$ et $W(\alpha)$

– Partons de (IV-20). On en déduit par exemple

$$C_A(\lambda) = C_N(\lambda)\, e^{-|\lambda|^2} \qquad (IV-41)$$

La T.F. transforme le produit ordinaire en produit de convolution de sorte que l'on a :

$$\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle = \int d^2\beta\; P(\beta)\, e^{-|\alpha-\beta|^2} \qquad (IV-42)$$

ce que l'on peut d'ailleurs obtenir directement en remplaçant dans $\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle$ ρ par $\int d^2\beta\; P(\beta)\,|\beta\rangle\langle\beta|$ (cf IV-5)

$$\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle = \int d^2\beta\; P(\beta)\,\langle\alpha|\beta\rangle\langle\beta|\alpha\rangle = \int d^2\beta\; P(\beta)\, e^{-|\alpha-\beta|^2}$$

– On montrerait de même que :

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int d^2\beta\; P(\beta)\, e^{-2|\alpha-\beta|^2} \qquad (IV-43)$$

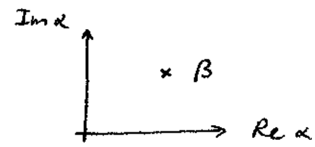
– Le même état quantique est décrit par des fonctions de + en + régulières quand on passe de la d.q-p $P(\alpha)$ à $W(\alpha)$ puis à $\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle$

Ainsi à l'état cohérent $|\beta\rangle$ correspondent les 3 d.q-p.

$$P(\alpha) = \delta^2(\beta-\alpha)$$
$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi}\, e^{-2|\beta-\alpha|^2}$$
$$\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle = e^{-|\beta-\alpha|^2}$$

⑥ Calcul de la d.q-p. correspondant à quelques états du champ.

a) Etat cohérent $|\beta\rangle$



$$P(\alpha) = \delta^{(2)}(\beta-\alpha) \qquad (IV-44)$$

Fonction δ dans le plan complexe

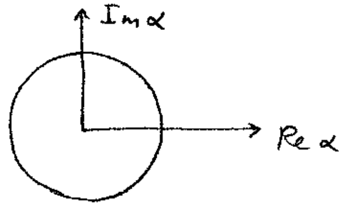
b) Mélange statistique d'états cohérents correspondant à une même amplitude r_0 et à une phase équipartie entre 0 et 2π.

$$\alpha = r_0\, e^{i\theta}$$

$$\rho = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\; |r_0 e^{i\theta}\rangle\langle r_0 e^{i\theta}| = \frac{1}{2\pi r_0}\iint r\,dr\,d\theta\; |\alpha\rangle\langle\alpha|\;\delta(|\alpha|-r_0) \qquad (IV-44)$$

On en déduit

$$P(\alpha) = \frac{1}{2\pi r_0}\,\delta(|\alpha| - r_0) \qquad \text{(IV-45)}$$



Fonction δ sur un cercle de rayon r_0.

c) Rayonnement thermique caractérisé par $\langle N \rangle$.

- Commençons par calculer $\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle$. Comme, d'après (II-27)

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle N\rangle^n}{(1+\langle N\rangle)^{n+1}} |n\rangle\langle n| \qquad \text{(IV-46)}$$

on a :

$$\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle N\rangle^n}{(1+\langle N\rangle)^{n+1}} \underbrace{\langle\alpha|n\rangle\langle n|\alpha\rangle}_{= e^{-|\alpha|^2}\frac{(|\alpha|^2)^n}{n!}} = \frac{1}{1+\langle N\rangle} e^{-|\alpha|^2} e^{\frac{\langle N\rangle|\alpha|^2}{1+\langle N\rangle}}$$

$$= \frac{1}{1+\langle N\rangle} e^{-\frac{|\alpha|^2}{1+\langle N\rangle}} \qquad \text{(IV-47)}$$

- On en déduit, en prenant la T.F. de (IV-47) que

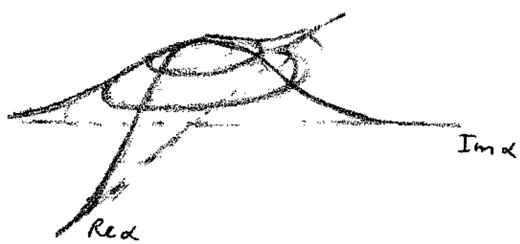
$$C_A(\lambda) = e^{-(1+\langle N\rangle)|\lambda|^2} \qquad \text{(IV-48)}$$

- Il s'ensuit d'après (IV-20) que

$$C_N(\lambda) = e^{|\lambda|^2} C_A(\lambda) = e^{-\langle N\rangle|\lambda|^2} \qquad \text{(IV-49)}$$

- En prenant la T.F. de (IV-49), on obtient finalement

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi\langle N\rangle} e^{-|\alpha|^2/\langle N\rangle} \qquad \text{(IV-50)}$$



On obtient une gaussienne centrée à l'origine et de largeur $\sqrt{\langle N\rangle}$