

D. Aspect ondulatoire du champ.

① Importance des éléments non-diagonaux de l'opérateur densité.

a_i et a_i^\dagger ne commutent pas avec $a_i^\dagger a_i$. Donc les opérateurs champs et potentiels \vec{A}, \vec{E} et \vec{B} ne commutent pas avec l'énergie totale \mathcal{H}_R et l'impulsion totale \vec{P}_R , et ne peuvent être mesurés simultanément avec ces grandeurs.

On trouve aisément que, dans un état propre de \mathcal{H}_R , $|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle$, la valeur moyenne d'un opérateur champ est nulle (aussi grands d'ailleurs que soient les n_i)

$$\langle n_1, n_2, \dots, n_i, \dots | \vec{E}(\vec{r}) | n_1, n_2, \dots, n_i, \dots \rangle = 0 \quad \forall n_1, n_2, \dots, n_i \quad (\text{III-1})$$

Il y a donc incertitude sur la valeur du champ quand on connaît parfaitement le nombre de photons.

On ne peut obtenir des valeurs moyennes non-nulles pour le champ, et par suite retrouver l'aspect ondulatoire du champ, qu'en prenant des superpositions linéaires d'états correspondant à des nombres de photons différents. L'aspect ondulatoire ne peut être précisé qu'au prix d'une incertitude sur le nombre de photons.

Raisonnons pour simplifier sur un vecteur d'état du type :

$$|\psi\rangle = \left(\sum_{n_i=0}^{\infty} c_{n_i} |n_i\rangle \right) \otimes |\varphi\rangle_{\text{autres modes}} \quad (\text{III-2})$$

A partir de l'expression de $\vec{E}(\vec{r}, t)$ (dans le point de vue de Heisenberg) :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{i\lambda} \sqrt{\frac{\hbar \omega_i}{2\epsilon_0 L^3}} i a_i \vec{e}_\lambda e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)} + h.c. \quad (\text{III-3})$$

on obtient pour la contribution du mode $i\lambda$ à $\langle \vec{E}(\vec{r}, t) \rangle$:

$$\langle \psi | \vec{E}(\vec{r}, t) | \psi \rangle = \sum_{n_i} \sqrt{\frac{\hbar \omega_i}{2\epsilon_0 L^3}} i c_{n_i-1}^* c_{n_i} \sqrt{n_i} \vec{e}_\lambda e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c. \quad (\text{III-4})$$

$\langle \vec{E}(\vec{r}, t) \rangle$ a bien un comportement d'onde plane progressive (aspect ondulatoire). On voit d'autre part que $\langle \vec{E}(\vec{r}, t) \rangle$ n'est sensible qu'à des termes croisés du type $c_{n_i-1}^* c_{n_i}$. Pour que $\langle \vec{E} \rangle$ soit $\neq 0$, il faut donc que l'état du mode i soit une superposition linéaire d'au moins 2 états $|n_i\rangle$ et $|n_i-1\rangle$.

Dans le cas plus général où l'état du rayonnement est décrit, non par un vecteur d'état comme en III-2, mais par un opérateur densité ρ d'éléments $\langle n_1, n_2, \dots, n_i, \dots | \rho | n_1, n_2, \dots, n_i, \dots \rangle$, on voit aisément que la contribution du mode i à $\langle \vec{E}(\vec{r}, t) \rangle = \text{Trace } \rho \vec{E}$ n'est sensible qu'à des éléments non diagonaux de ρ du type :

$$\langle n_1, n_2, \dots, n_i \mp 1, \dots | \rho | n_1, n_2, \dots, n_i, \dots \rangle \quad (\text{III-5})$$

Raisonné uniquement en termes de photons revient à ne conserver de la matrice densité du rayonnement que les termes diagonaux dans la base $\{|n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle\}$. L'aspect ondulatoire est contenu dans les termes non-diagonaux qu'il ne faut donc pas négliger.

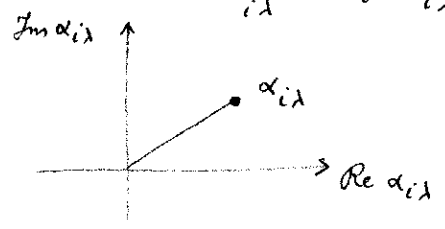
② "Etats quasi-classiques" du champ (on envoie "état cohérents")

- Essayons de construire des états quantiques du champ qui, compte tenu des contraintes imposées par la non-commutation des a_i et a_i^\dagger (relations d'incertitude), reproduisent le plus fidèlement possible les propriétés d'un champ classique.

- Un état du champ classique est parfaitement défini par la donne des coefficients $\alpha_{i\lambda}$ (qui sont des nombres complexes) intervenant dans le développement en ondes planes progressives de ce champ. On a par exemple

$$\vec{A}_{cl}(\vec{r}, t) = \sum_{i\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_i L^3}} \alpha_{i\lambda} \vec{e}_\lambda e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)} + c.c. \quad (III-6)$$

$$\mathcal{H}_{cl} = \sum_{i\lambda} \hbar \omega_i \alpha_{i\lambda}^* \alpha_{i\lambda} \quad (III-7)$$



Le module du nombre complexe $\alpha_{i\lambda}$ représente, à un facteur près, l'amplitude de l'oscillation du champ classique dans le mode $i\lambda$.

L'argument de $\alpha_{i\lambda}$ représente la phase de cette oscillation.

- Comme les opérateurs quantique $\vec{A}(\vec{r}, t)$ et \mathcal{H}_R ne commutent pas, il est impossible de trouver un vecteur propre commun à ces 2 opérateurs avec des valeurs propres égales aux grandeurs classiques (III-6) et (III-7) (les aspects corpusculaire et ondulatoire sont complémentaires).

- Essayons alors de réaliser un compromis entre ces 2 aspects corpusculaire et ondulatoire en recherchant s'il existe un état $|\psi\rangle$ du champ tels que les valeurs moyennes des opérateurs $\vec{A}(\vec{r}, t)$ et \mathcal{H}_R (dans le p^e de vue de Heisenberg) dans cet état $|\psi\rangle$ soient égales à (III-6) et (III-7)

Existe-t-il $|\psi\rangle$ tel que

$$\begin{cases} \langle \psi | \vec{A}(\vec{r}, t) | \psi \rangle = \vec{A}_{cl}(\vec{r}, t) & (III-8-a) \\ \langle \psi | \mathcal{H}_R | \psi \rangle = \mathcal{H}_{cl} & (III-8-b) \end{cases} ?$$

L'expression de $\vec{A}(\vec{r}, t)$ s'obtient en remplaçant dans (III-6) les nombre $\alpha_{i\lambda}$ par les opérateurs $a_{i\lambda}$. En reportant ce développement dans (III-8-a), on obtient :

$$\langle \psi | a_{i\lambda} | \psi \rangle = \alpha_{i\lambda} \quad (III-9-a)$$

qui est strictement équivalent à (III-8-a).

De même, comme l'opérateur \mathcal{H}_R est donné par II-1 ou encore par,

$$\mathcal{H}_R = \sum_{i\lambda} \hbar \omega_i (a_{i\lambda}^\dagger a_{i\lambda} + \frac{1}{2}) \quad (III-10)$$

on obtient en reportant (III-10) dans (III-8-b) :

$$\langle \psi | a_{i\lambda}^\dagger a_{i\lambda} | \psi \rangle = \alpha_{i\lambda}^* \alpha_{i\lambda} - \frac{1}{2} \quad (III-9-b)$$

qui est strictement équivalent à (III-8-b).

- Nous allons montrer qu'il est possible de résoudre simultanément (III-9-a) et (III-9-b) à condition de négliger le terme $-\frac{1}{2}$ au 2^{ème} membre de (III-9-b), c-à-d à condition de remplacer (III-9-b) par :

$$\langle \psi | a_{i\lambda}^\dagger a_{i\lambda} | \psi \rangle = \alpha_{i\lambda}^* \alpha_{i\lambda} \quad (III-9-c)$$

Négliger le terme $-\frac{1}{2}$ dans (III-9-b), ou encore le terme $\frac{1}{2}$ dans (III-10), revient à repérer toutes les énergies du champ quantique par rapport au vide, ce que nous avons déjà fait plus haut.

Posons

$$b_{i\lambda} = a_{i\lambda} - \alpha_{i\lambda} \quad (III-11)$$

En reportant (III-11) dans (III-9-a) et (III-9-c), on obtient le système de 2 équations :

$$\begin{cases} \langle \psi | b_{i\lambda} | \psi \rangle = 0 \\ \langle \psi | b_{i\lambda}^\dagger b_{i\lambda} | \psi \rangle = 0 \end{cases} \quad (\text{III-12})$$

dont la solution est (le carré de la norme de $b_{i\lambda} | \psi \rangle$ ne peut être nul comme l'exige la 2^e équation III-12 que si ce vecteur est lui-même nul) :

$$b_{i\lambda} | \psi \rangle = 0 \quad (\text{III-13})$$

c-à-d encore d'après (III-11) :

$$a_{i\lambda} | \psi \rangle = \alpha_{i\lambda} | \psi \rangle \quad (\text{III-14})$$

$| \psi \rangle$ doit donc être ket propre de l'opérateur d'annihilation $a_{i\lambda}$ avec la valeur propre $\alpha_{i\lambda}$. Si l'on pose :

$$a_{i\lambda} | \alpha_{i\lambda} \rangle = \alpha_{i\lambda} | \alpha_{i\lambda} \rangle \quad (\text{III-15})$$

on voit finalement que $| \psi \rangle$ doit être de la forme (III-14 doit être vérifié pour tous les modes) :

$$| \psi \rangle = | \alpha_1 \rangle | \alpha_2 \rangle \dots | \alpha_i \rangle \dots \quad (\text{III-16})$$

On trouve donc pour $| \psi \rangle$ un produit d'états propres des opérateurs d'annihilation de chaque mode, les valeurs propres correspondantes étant les coefficients α_i qui interviennent dans le développement en ondes planes progressives du champ classique que l'on essaie de reproduire quantiquement le mieux possible.

E - Etude de quelques propriétés des états cohérents.

On étudie quelques propriétés des états propres de l'opérateur d'annihilation a d'un mode du champ électromagnétique.

① Développement sur les états propres $\{ |n\rangle \}$ de \mathcal{H} .

$$a | \alpha \rangle = \alpha | \alpha \rangle \rightarrow \underbrace{\langle n-1 | a | \alpha \rangle}_{\sqrt{n} \langle n | \alpha \rangle} = \alpha \langle n-1 | \alpha \rangle \quad (\text{III-17})$$

$$\sqrt{n} \langle n | \alpha \rangle = \alpha \langle n-1 | \alpha \rangle \quad (\text{III-18})$$

Relation de récurrence qui donne $\langle n | \alpha \rangle$ en fonction de $\langle 0 | \alpha \rangle$. Si l'on impose à $| \alpha \rangle$ d'être normé, et si l'on convient de prendre $\langle 0 | \alpha \rangle$ réel > 0 , on obtient

$$| \alpha \rangle = e^{-\frac{1}{2} |\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} | n \rangle \quad (\text{III-19})$$

② Valeur moyenne et écart quadratique moyen du nombre N de photons dans l'état cohérent $| \alpha \rangle$.

- Probabilité d'avoir n photons. D'après (III-19), on a :

$$\mathcal{P}(n) = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \quad (\text{III-20})$$

- Nombre moyen $\langle N \rangle$ de photons

$$\langle N \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n \mathcal{P}(n) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} n = e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(|\alpha|^2)^{n-1}}{(n-1)!} = |\alpha|^2 \quad (\text{III-21})$$

En utilisant (III-21), on peut réécrire (III-20) sous la forme :

$$\mathcal{P}(n) = \frac{e^{-\langle N \rangle} (\langle N \rangle)^n}{n!} \quad (\text{III-22})$$

Loi de Poisson

- Ecart quadratique moyen ΔN

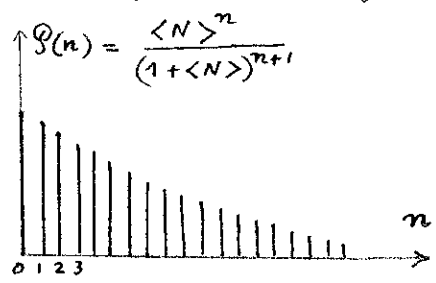
$$\langle N^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \mathcal{P}(n) = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[n(n-1) + n]}{n!} (|\alpha|^2)^n = e^{-|\alpha|^2} \left[|\alpha|^4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(|\alpha|^2)^{n-2}}{(n-2)!} + |\alpha|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(|\alpha|^2)^{n-1}}{(n-1)!} \right]$$

$$= |\alpha|^4 + |\alpha|^2 = \langle N \rangle^2 + \langle N \rangle \quad (\text{III-23})$$

On en déduit

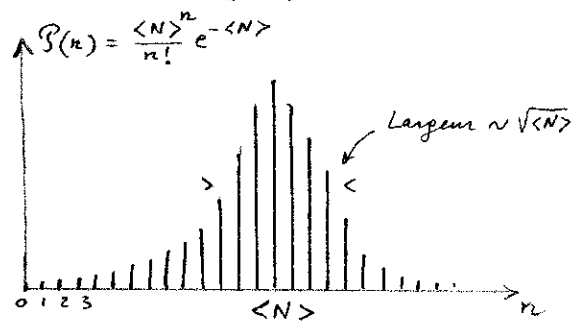
$$(\Delta N)^2 = \langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \langle N \rangle \quad (\text{III-24})$$

- Comparaisons entre les lois de distribution de Bose (rayonnement Hermique) et Poisson (état cohérent)



Loi de distribution de Bose

- $\mathcal{P}(n)$ décroît toujours avec n
- $\Delta N = \sqrt{\langle N \rangle^2 + \langle N \rangle}$ est de l'ordre de $\langle N \rangle$ pour $\langle N \rangle$ grand et de l'ordre de $\sqrt{\langle N \rangle}$ pour $\langle N \rangle$ petit



Loi de distribution de Poisson

- $\mathcal{P}(n)$ passe par un maximum au voisinage de $n = \langle N \rangle$ (pour $\langle N \rangle$ suffisamment grand)
- $\Delta N = \sqrt{\langle N \rangle} \ll \langle N \rangle$

Pour $\langle N \rangle \ll 1$ les 2 distributions sont très voisines. On a $\mathcal{P}(0) \approx 1$ et $\mathcal{P}(n \neq 0) \ll 1$.
 Pour $\langle N \rangle \gg 1$, c-à-d à la limite classique, les 2 distributions sont très \neq .

La distribution de Bose est très large: $\Delta N \approx \langle N \rangle$. La largeur de la distribution de Poisson, tout en étant très grande en valeur absolue ($\Delta N \approx \sqrt{\langle N \rangle} \gg 1$), est très petite en valeur relative ($\frac{\Delta N}{\langle N \rangle} \approx \frac{1}{\sqrt{\langle N \rangle}} \ll 1$). C'est ce qui permet aux états cohérents de reproduire très bien à la limite $\langle N \rangle \gg 1$, à la fois l'aspect ondulatoire (d'après III-19, on superpose linéairement un très grand nombre d'états de n différents) et l'aspect corpusculaire (le nombre de photons est très bien défini en valeur relative).

③ Les états cohérents peuvent être obtenus à partir du vide par une transformation unitaire.

- Formule de Glauber

Si A et B commutent avec $[A, B]$

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A, B]} \quad (\text{III-25})$$

- Considérons l'opérateur $D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}$ (III-26)

Il est unitaire car $D^\dagger(\alpha) = e^{\alpha^* a - \alpha a^\dagger} = e^{-(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)} = D^{-1}(\alpha)$ (III-27)

On peut appliquer (III-25) à (III-26) car $[\alpha^* a, -\alpha a^\dagger] = -|\alpha|^2$ commute avec αa^\dagger et $\alpha^* a$

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} = e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \quad (\text{III-28})$$

- Calculons $D(\alpha)|0\rangle$

$$e^{-\alpha^* a} |0\rangle = \left(1 - \alpha^* a + \frac{(\alpha^*)^2 a^2}{2!} + \dots \right) |0\rangle = |0\rangle \quad (\text{III-29})$$

On en déduit d'après (III-28):

$$D(\alpha) |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} (a^\dagger)^n |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (\text{III-30})$$

En comparant avec (III-19), on voit que :

$$|\alpha\rangle = D(\alpha) |0\rangle \quad (\text{III-31})$$

④ Produit scalaire et relation de fermeture.

- $\langle \beta | \alpha \rangle$ n'est pas nul quand $\beta \neq \alpha$. D'après (III-19), on a en effet :

$$\langle \beta | \alpha \rangle = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta^*)^n \alpha^n}{n!} = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} e^{\alpha \beta^*} \quad (\text{III-32})$$

d'où l'on tire :

$$|\langle \beta | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \beta|^2} \quad (\text{III-33})$$

- Relation de fermeture. Montrons que :

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = 1 \quad (\text{III-34})$$

où $d^2\alpha = d\text{Re}\alpha d\text{Im}\alpha = p dp d\theta$ avec $\alpha = p e^{i\theta}$. En effet, d'après (III-19)

ona :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty p dp |\alpha\rangle \langle \alpha| = \frac{1}{\pi} \sum_{m,n} |m\rangle \langle n| \int_0^\infty \frac{p^{m+n}}{\sqrt{m!n!}} e^{-p^2} p dp \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta$$

$$= \sum_m |m\rangle \langle m| \int_0^\infty \frac{(p^2)^m}{m!} e^{-p^2} dp^2 \quad (\text{III-35})$$

On montre aisément par une suite d'intégrations par parties que l'intégrale en p^2 est égale à 1.

Finalement,

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = \sum_m |m\rangle \langle m| = 1 \quad (\text{III-36})$$

⑤ Caractère "minimal" des états cohérents $|\alpha\rangle$.

- Considérons l'oscillateur harmonique fictif à 1 dimension associé au mode étudié. On peut introduire les observables position et impulsion de cet oscillateur qui peuvent s'écrire, avec un choix convenable d'unités :

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{2}} (a + a^\dagger) \\ P = -\frac{i}{\sqrt{2}} (a - a^\dagger) \end{cases} \quad (\text{III-37})$$

Comme $[X, P] = i$, la valeur minimale du produit des écarts quadratique ΔX et ΔP de X et P est $1/2$

$$\Delta X \cdot \Delta P \leq 1/2 \quad (\text{III-38})$$

- On vérifie aisément que si $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$

$$\langle \alpha | X | \alpha \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha + \alpha^*) \quad \langle \alpha | P | \alpha \rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}} (\alpha - \alpha^*)$$

$$\langle \alpha | X^2 | \alpha \rangle = \frac{1}{2} \langle \alpha | a^2 + a^{\dagger 2} + 2a^\dagger a + 1 | \alpha \rangle = \frac{1}{2} (\alpha + \alpha^*)^2 + \frac{1}{2} = \langle X \rangle^2 + \frac{1}{2}$$

$$\langle \alpha | P^2 | \alpha \rangle = -\frac{1}{2} \langle \alpha | a^2 + a^{\dagger 2} - 2a^\dagger a - 1 | \alpha \rangle = -\frac{1}{2} (\alpha - \alpha^*)^2 + \frac{1}{2} = \langle P \rangle^2 + \frac{1}{2} \quad (\text{III-39})$$

d'où l'on déduit

$$(\Delta X)^2 = \frac{1}{2} \quad (\Delta P)^2 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \Delta X \cdot \Delta P = \frac{1}{2} \quad (\text{III-40})$$

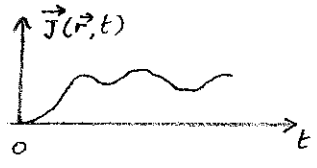
Les états cohérents sont donc les états pour lesquels $\Delta X \cdot \Delta P$ prend la valeur minimale compatible avec les relations d'incertitude de Heisenberg.

- En représentation $\{|x\rangle\}$, la fonction d'onde associée à $|\alpha\rangle$ est une gaussienne, obtenue à partir de la gaussienne associée à l'état fondamental $|0\rangle$ par une translation (interprétation géométrique de l'opérateur $D(\alpha)$).

Au cours du temps, le paquet d'ondes associé à $|\alpha\rangle$ oscille sur l'axe des x sans se déformer.

F - Exemple d'états cohérents : états quantiques du champ rayonné par des sources classiques.

① Problème



On part initialement (à $t=0$) du vide de rayonnement. On brasse des sources classiques caractérisées par des densités de courant et de charge $\vec{J}(\vec{r}, t)$ et $\rho(\vec{r}, t)$ qui sont des fonctions classiques et dont la dépendance temporelle est donnée a priori (on néglige la réaction du champ sur ces sources).
Comment va évoluer l'état quantique du champ ?

② Hamiltonien du champ

(Il n'y a pas de variables dynamiques à associer aux sources puisque ce sont des fonctions données du temps).

- Hamiltonien classique (dans la jauge de Coulomb)

$$\mathcal{H} = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r [E_{\perp}^2(\vec{r}, t) + c^2 B^2(\vec{r}, t)] - \int d^3r \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (\text{III-41})$$

(III-41) peut aisément être établi à partir des résultats de l'an dernier. Plus simplement, on peut vérifier que les équations de Hamilton-Jacobi écrites à partir de (III-41) ne sont autres que les équations de Maxwell pour les champs E_{\perp} et B en présence des sources \vec{J} et ρ [Dans la jauge de Coulomb, E_{\parallel} est le champ électrostatique instantané produit par ρ].

- Hamiltonien quantique

Il s'obtient en remplaçant dans (III-41), $\vec{A}(\vec{r}, t), E_{\perp}(\vec{r}, t), B(\vec{r}, t)$ par les opérateurs $\vec{A}(\vec{r}), E_{\perp}(\vec{r}), B(\vec{r})$ (quantification canonique), dont les développements en ondes planes progressives sont donnés en (I-17, 18, 19)

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r [E_{\perp}^2(\vec{r}) + c^2 B^2(\vec{r})] - \int d^3r \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{A}(\vec{r}) \\ &= \sum_i \hbar \omega_i [a_i^{\dagger} a_i + \frac{1}{2}] - \hbar \sum_i [\beta_i(t) a_i^{\dagger} + \beta_i^*(t) a_i] \end{aligned} \quad (\text{III-42})$$

avec $\hbar \beta_i(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_i L^3}} \int_{L^3} d^3r \vec{e}_{\lambda}^* \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k}_i \cdot \vec{r}}$

$\hbar \beta_i(t)$ n'est autre que la composante du courant $\vec{J}(\vec{r}, t)$ sur le mode $i\lambda$.

(III-42) apparaît comme l'hamiltonien d'un ensemble d'oscillateurs harmoniques indépendants, chaque oscillateur étant soumis à une force classique caractérisée par $\beta_i(t)$ [par exemple, oscillateur chargé plongé dans un champ électrique uniforme dépendant du temps].

③ Etude de l'évolution du système dans le point de vue de Heisenberg

- Le problème précédent, caractérisé par l'hamiltonien (III-42), est exactement soluble. Les calculs sont plus simples à mener dans le point de vue de Heisenberg.

Tableau comparatif entre les 2 points de vue

	<u>Schrödinger</u>	Transf. unitaire $U^{-1}(t, 0)$	<u>Heisenberg</u>
<u>Etats</u>	$ \Psi^S(t)\rangle = U(t, 0) \Psi^S(0)\rangle$ $i\hbar \frac{d}{dt} U(t, 0) = H^S U(t, 0) \quad (\text{III-43-a})$ $i\hbar \frac{d}{dt} \Psi^S(t)\rangle = H^S \Psi^S(t)\rangle$		$ \Psi^H(t)\rangle = U^{-1}(t, 0) \Psi^S(t)\rangle = \Psi^S(0)\rangle = \Psi^H\rangle$ Indépendant du temps (III-43-b)
<u>Observables</u>	$G^S(t) = G^S$ Indépendant du temps (III-44-a)		$G^H(t) = U^{-1}(t, 0) G^S U(t, 0)$ $i\hbar \frac{d}{dt} G^H(t) = [H^H, G^H(t)] \quad (\text{III-44-b})$

- Evolution de $a_i^H(t)$
$$i\hbar \frac{d}{dt} a_i^H(t) = [H^H, a_i^H(t)] \quad (III-45)$$

H^H étant l'hamiltonien dans le p^r de vue Heisenberg obtenu en remplaçant dans (III-42), $a_i = a_i^S$ et $a_i^\dagger = a_i^{S\dagger}$ par $a_i^H(t)$ et $a_i^{\dagger H}(t)$. A cause du dernier terme de (III-42), $a_i^H(t)$ n'est pas simplement égal à $a_i^H(0) e^{-i\omega_i t}$ comme c'est le cas pour un rayonnement libre (sans sources).

Notons également que les relations de commutation canoniques entre a_i et a_j^\dagger restent valables dans le point de vue de Heisenberg à condition de considérer des commutateurs entre opérateurs pris à un même instant t .

$$[a_i^S, a_j^{S\dagger}] = \delta_{ij} \quad \text{Transf. unitaire } U^{-1}(t,0) \quad [a_i^H(t), a_j^{\dagger H}(t)] = \delta_{ij} \quad (III-46)$$

Par contre, on ne peut rien dire a priori de $[a_i^H(t), a_j^{\dagger H}(t')]$ avec $t' \neq t$

- (III-45) s'écrit grâce à (III-42)

$$\frac{d}{dt} a_i^H(t) = -i\omega_i \underbrace{[a_i^H(t), a_i^{\dagger H}(t) a_i^H(t)]}_{= a_i^H(t)} + i \underbrace{[a_i^H(t), \beta_i(t) a_i^{\dagger H}(t) + \beta_i^*(t) a_i^H(t)]}_{\beta_i(t)} \quad (III-47)$$

soit encore

$$\frac{d}{dt} a_i^H(t) = -i\omega_i a_i^H(t) + i \beta_i(t) \quad (III-48)$$

équation très simple qui s'intègre immédiatement pour donner :

$$a_i^H(t) = a_i^H(0) e^{-i\omega_i t} + i \int_0^t dt' \beta_i(t') e^{-i\omega_i(t-t')} \quad (III-49)$$

On vérifie bien que si $\beta_i \equiv 0$, $a_i^H(t) = a_i^H(0) e^{-i\omega_i t}$.

④ Interprétation du résultat.

- Initialement (avant le branchement des sources à $t=0$), le rayonnement est dans l'état $|0\rangle$ qui est un état cohérent particulier correspondant à $\alpha_i = 0$. Donc

$$a_i^H(0) |\psi^H\rangle = a_i^H(0) |0\rangle = 0 \quad (III-50)$$

Appliquons les 2 membres de (III-49) à $|\psi^H\rangle$ et utilisons (III-50). Il vient

$$a_i^H(t) |\psi^H\rangle = \alpha_i(t) |\psi^H\rangle \quad (III-51)$$

avec
$$\alpha_i(t) = i \int_0^t dt' \beta_i(t') e^{-i\omega_i(t-t')} \quad (III-52)$$

$|\psi^H\rangle$ reste toujours état propre de l'opérateur d'annihilation $a_i^H(t)$

- Revenons au p^r de vue de Schrödinger. En utilisant $a_i^H(t) = U^{-1}(t,0) a_i^S U(t,0)$ et $|\psi^H\rangle = U^{-1}(t,0) |\psi^S(t)\rangle$, on obtient à partir de (III-51) :

$$a_i^S |\psi^S(t)\rangle = \alpha_i(t) |\psi^S(t)\rangle \quad (III-53)$$

L'état du rayonnement évolue donc au cours du temps en restant constamment un état cohérent caractérisé par $\alpha_1(t)$ $\alpha_2(t)$...

$$|\psi^S(t)\rangle = |\alpha_1(t)\rangle |\alpha_2(t)\rangle \dots |\alpha_i(t)\rangle \dots \quad (III-54)$$

On vérifie aisément d'ailleurs que $\alpha_i(t)$ donné par (III-52) est la solution de l'équation
$$\dot{\alpha}_i(t) = -i\omega_i \alpha_i(t) + i \beta_i(t) \quad (III-55)$$

avec la condition initiale $\alpha_i(0) = 0$

C'est l'équation d'un oscillateur classique initialement au repos et soumis à la "force" $\beta_i(t)$

L'état quantique des champs est l'état "minimal" qui suit le mieux possible le mouvement de cet oscillateur classique.