3/12/74

Rappel de quelques résultats établis l'an dernier

Développement du champ électromagnétique classique en ondes planes progressives ou en ondes multipolaires.

On a montré tout d'abord que la solution la plus générale des équations de Maxwell (en l'absence de sources) pouvait être développée en ondes planes progressives, de vecteur d'onde $\vec{k}$, de pulsation $\omega = c|\vec{k}|$, et de polarisation transverse, c-à-d perpendiculaire à $\vec{k}$.

Ce développement fait apparaître très naturellement une fonction vectorielle transverse de $\vec{k}$, $\vec{\alpha}(\vec{k})$, qui est très analogue à la fonction d'onde, dans l'espace des $\vec{k}$, d'une particule de spin 1, le photon. Les expressions qui donnent l'énergie totale, l'impulsion totale, le moment cinétique total du champ apparaissent en effet comme la valeur moyenne dans cette fonction d'onde des opérateurs quantiques associés à ces diverses grandeurs physiques : $H = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, $\vec{P} = \hbar \vec{k}$, $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ avec $\vec{L} = \frac{\hbar}{i} \vec{k} \times \vec{\nabla}_k$, $\vec{S}$: opérateurs de spin d'une particule de spin 1.

On a ensuite recherché l'expression générale, dans l'espace des $\vec{k}$, des fonctions propres $\vec{\alpha}(\vec{k})$ du moment cinétique total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Les harmoniques sphériques vectorielles ont été ainsi introduites de même que leurs combinaisons linéaires qui tiennent compte du caractère transversal du champ et que l'on peut classer par leur parité. Ce caractère transversal du champ entraîne d'ailleurs que $\vec{L}$ et $\vec{S}$ ne sont pas séparément des observables du champ. Seul $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ est observable.

Les résultats ainsi obtenus ont permis alors d'étudier en détail la structure des ondes multipolaires électriques et magnétiques, c-à-d des ondes électromagnétiques correspondant à des photons d'énergie, de moment cinétique et de parité bien définis. Les formules permettant de passer de la base des ondes planes à celle des ondes multipolaires (et réciproquement) ont été établies.

On a ensuite montré que le champ rayonné à grande distance par des sources caractérisées par leur densité de charge, de courant et de magnétisation, pouvait être analysé en ondes multipolaires, l'amplitude de chacune de ces ondes étant reliée à un paramètre caractéristique des sources, que l'on appelle moment multipolaire, et dont on a établi l'expression exacte.

Nous rappelons maintenant quelques formules importantes relatives au développement en ondes planes progressives (dans la jauge de Coulomb : $\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$, $U = 0$)

Potentiel vecteur.

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_\lambda \int d^3k \; N(k) \left[a_{\vec{k}\lambda} \, \vec{e}_\lambda \, e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} + a^*_{\vec{k}\lambda} \, \vec{e}_\lambda^{\,*} \, e^{-i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \right] \quad (\text{I-1})$$

$$= \vec{A}^{(+)}(\vec{r},t) + \vec{A}^{(-)}(\vec{r},t)$$

$\sum_\lambda$: somme sur 2 vecteurs normés et orthogonaux $\vec{e}_\lambda$ et $\vec{e}_{\lambda'}$ tous 2 perpendiculaires à $\vec{k}$ (si $\vec{e}_\lambda$ complexe, polarisation circulaire ou elliptique).

$N(k)$: coefficient de normalisation choisi de manière à rendre aussi simple que possible l'expression des grandeurs physiques (voir I-5 et I-6 ci dessous).

$$N(k) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega (2\pi)^3}} \quad (\text{I-2})$$

$\vec{A}^{(+)}(\vec{r},t)$: composante de fréquence >0 de $\vec{A}(\vec{r},t)$, c-a-d somme de tous les termes en $e^{-i\omega t}$

$\vec{A}^{(-)}(\vec{r},t)$: composante de fréquence <0 de $\vec{A}(\vec{r},t)$ (termes en $e^{i\omega t}$)

$a_{\vec{k}\lambda}$: coefficient du développement relatif à l'onde plane progressive $\vec{e}_\lambda \, e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}$

Champs électrique et magnétique.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} = \sum_\lambda \int d^3k \; N(k) \, i\omega \, a_{\vec{k}\lambda} \, \vec{e}_\lambda \, e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} + \text{c.c.} \quad (\text{I-3})$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r},t) = \sum_\lambda \int d^3k \; N(k) \, i \, a_{\vec{k}\lambda} \, \vec{k} \times \vec{e}_\lambda \, e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} + \text{c.c.} \quad (\text{I-4})$$

Energie totale et impulsion totale.

$$\mathcal{H}_R = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \left[\vec{E}^{\,2} + c^2 \vec{B}^{\,2} \right] = \sum_\lambda \int d^3k \; \hbar\omega \, a^*_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda} \quad (\text{I-5})$$

$$\vec{\mathcal{P}} = \varepsilon_0 \int d^3r \; \vec{E} \times \vec{B} = \sum_\lambda \int d^3k \; \hbar\vec{k} \, a^*_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda} \quad (\text{I-6})$$

Remarques

(i) $\hbar$ est introduit ici de manière artificielle dans $N(k)$, de manière à faire apparaître $\hbar\omega$ et $\hbar\vec{k}$ dans (I-5) et (I-6).
En théorie classique $a^*_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}\lambda}$ peut varier continûment entre 0 et $+\infty$. En théorie quantique, cette quantité deviendra un opérateur ne pouvant prendre que des valeurs entières et $\hbar\omega$ représentera un quantum élémentaire d'énergie.

(ii) $\vec{A}(\vec{r},t)$ ne peut être considéré comme la fonction d'onde du photon dans l'espace des $\vec{r}$. Nous verrons plus loin comment décrire l'état du champ quantifié.

(iii) L'énergie totale et l'impulsion totale s'expriment simplement en fonction des coefficients $a_{\vec{k}\lambda}$ du développement en ondes planes progressives. Par contre, le moment cinétique total $\vec{J} = \varepsilon_0 \int d^3r\ \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B})$ s'exprime simplement en fonction des coefficients du développement en ondes multipolaires.

(iv) Développement sur une base discrète d'ondes planes progressives.

On enferme le champ dans un cube de coté L très grand et on impose les conditions de périodicité sur les parois du cube. Artifice pour remplacer l'intégrale sur $\vec{k}$ par une sommation sur une suite discrète de vecteurs $\vec{k}_i$ tels que

$$k_{i\,x,y,z} = \frac{2\pi}{L}\, n_{i\,x,y,z} \qquad \text{avec } n_{i\,x,y,z} = 3 \text{ entiers} \gtrless 0 \qquad (I-7)$$

Nombre de vecteurs $\vec{k}_i$ dans l'élément d^3k : $\dfrac{d^3k}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3}$

Le coefficient de normalisation $N(k)$ doit être remplacé par

$$N(k_i) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_i L^3}} \qquad (I-8)$$

et l'on a par exemple

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_\lambda \sum_i \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega_i L^3}} \left(a_{i\lambda}\, \vec{e}_\lambda\, e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t)} + c.c. \right) \qquad (I-9)$$

$$\mathcal{H}_R = \int_0^L dx \int_0^L dy \int_0^L dz\ \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\vec{E}^2 + c^2\vec{B}^2\right) = \sum_\lambda \sum_i \hbar\omega_i\, a^*_{i\lambda}\, a_{i\lambda} \qquad (I-10)$$

et des formules analogues pour $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{\mathcal{P}}$

A la fin des calculs, on fait tendre L vers $+\infty$ et l'on vérifie bien que tous les résultats physiques ne dépendent pas de L.

Description Lagrangienne et Hamiltonienne du champ électromagnétique classique.

Considérons un ensemble de particules classiques interagissant avec un champ électromagnétique classique.

Description lagrangienne

On a introduit l'an dernier un Lagrangien L dépendant

- d'une suite discrète de variables dynamiques : les coordonnées $\vec{q}_\alpha(t)$ et les vitesses $\dot{\vec{q}}_\alpha(t)$ des particules α.
- d'une suite continue de variables dynamiques : les potentiels vecteur et scalaire $\vec{A}(\vec{r},t)$, $U(\vec{r},t)$ ainsi que les "vitesses" correspondantes $\dot{\vec{A}}(\vec{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r},t)$ et $\dot{U}(\vec{r},t) = \frac{\partial U(\vec{r},t)}{\partial t}$ en chaque point $\vec{r}$ de l'espace ($\vec{r}$ doit être considéré ici, non comme une variable, mais comme un paramètre continu permettant de repérer la variable dynamique à laquelle on s'intéresse).

On a montré ensuite que les équations de Lagrange déduites de ce Lagrangien, et caractérisant les mouvements pour lesquels l'action est extrémale, ne sont autres que

- d'une part, les équations de Maxwell en présence des charges et courants associés aux particules.
- d'autre part, les équations du mouvement des particules soumises aux forces de Lorentz associées à $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

On a ainsi donné une description variationnelle de l'évolution couplée des particules et des champs (en se limitant au domaine non relativiste pour les particules). De plus, on peut déduire du Lagrangien l'expression des grandeurs physiques importantes qui se conservent lors d'un mouvement réel du système : énergie totale, impulsion totale, moment cinétique total du système particules + champs. $\mathcal{H}$, $\vec{\mathcal{P}}$, $\vec{J}$.

Description hamiltonienne.

On change de variables dynamique

$$\{\vec{q}_\alpha, \dot{\vec{q}}_\alpha\} \longrightarrow \{\vec{q}_\alpha, \vec{P}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_\alpha}\}$$

$$\{\vec{A}(\vec{r},t), \dot{\vec{A}}(\vec{r},t)\} \longrightarrow \{\vec{A}(\vec{r},t), \vec{\Pi}(\vec{r},t) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\vec{A}}(\vec{r},t)}\}$$

Cas du potentiel scalaire U

$\dot{U}$ n'apparait pas dans le Lagrangien et il est impossible de définir un moment conjugué de U qui serait $\frac{\delta L}{\delta \dot{U}}$

Les équations de Hamilton Jacobi ne déterminent pas le mouvement de U. L'ensemble de leurs solutions est plus vaste que celui des ~~équations~~ solutions des équations de Maxwell et Newton couplées. On peut montrer toutefois qu'on réobtient les équations moyennant des conditions initiales adéquates

Le fait que U n'ait pas de moment conjugué est cependant gênant si l'on veut effectuer une quantification canonique et l'on a eu alors recours à la solution suivante pour résoudre cette difficulté.

Jauge de Coulomb – Quantification.

On a montré qu'on peut choisir une jauge particulière, la jauge de Coulomb, permettant d'éliminer U du Lagrangien L, de l'hamiltonien $\mathcal{H}$ et de toutes les grandeurs physiques importantes $\vec{\mathcal{P}}$, $\vec{J}$.

Dans cette jauge, $\vec{A}$ est toujours transversal

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r},t) = 0 \quad \forall\ t \qquad \text{(I-11)}$$

et U peut être entièrement reexprimé en fonction des coordonnées $\vec{q}_\alpha$ des particules

Comme
$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} U \qquad (I-12)$$
et que $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ est transversal en jauge de Coulomb, la partie longitudinale de $\vec{E}$ se réduit à $-\vec{\nabla} U$ et peut être elle aussi réexprimée en fonction des $\vec{q}_\alpha$.

Toutes les grandeurs importantes s'expriment finalement en fonction des variables dynamique :
$$\{ \vec{q}_\alpha(t),\ \vec{P}_\alpha(t),\ \vec{A}(\vec{r},t),\ \vec{\Pi}(\vec{r},t) \}$$
On trouve d'ailleurs que $\vec{\Pi}$ est à un facteur près la partie transversale de $\vec{E}$
$$\vec{\Pi}(\vec{r},t) = -\varepsilon_0 \vec{E}_\perp(\vec{r},t) \qquad (I-13)$$
Rappelons l'expression de ces grandeurs

Hamiltonien $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = \sum_\alpha \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{P}_\alpha - e_\alpha \vec{A}(\vec{q}_\alpha)\right]^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\alpha>\beta}\frac{e_\alpha e_\beta}{|\vec{q}_\alpha - \vec{q}_\beta|}$$
$$+ \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \left[\frac{1}{\varepsilon_0^2}\vec{\Pi}^2 + c^2\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)^2\right] \qquad (I-14)$$

Impulsion totale $\vec{\mathcal{P}}$

$$\vec{\mathcal{P}} = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha + \varepsilon_0 \int d^3r \left[-\frac{\vec{\Pi}}{\varepsilon_0} \times \left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\right] \qquad (I-15)$$

Moment cinétique total

$$\vec{J} = \sum_\alpha \vec{q}_\alpha \times \vec{p}_\alpha + \varepsilon_0 \int d^3r\ \vec{r} \times \left[\left(-\frac{\vec{\Pi}}{\varepsilon_0}\right) \times \left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\right] \qquad (I-16)$$

La quantification canonique s'effectue en associant à chaque variable dynamique un opérateur hermitique, indépendant du temps dans le point de vue de Schrödinger, le commutateur de 2 variables dynamique conjuguées étant égal à $i\hbar$.

$$\vec{q}_\alpha(t) \rightsquigarrow \vec{Q}_\alpha \qquad \vec{p}_\alpha(t) \rightsquigarrow \vec{P}_\alpha \qquad \vec{A}(\vec{r},t) \rightsquigarrow \vec{\mathbb{A}}(\vec{r}) \qquad \vec{\Pi}(\vec{r},t) \rightsquigarrow \vec{\mathbb{\Pi}}(\vec{r})$$

Une petite difficulté est liée à la transversalité de $\vec{\mathbb{A}}$ et $\vec{\mathbb{\Pi}}$. Les 3 composantes $\mathbb{A}_i(\vec{r})$ et $\mathbb{\Pi}_i(\vec{r})$ des observables vectorielles $\vec{\mathbb{A}}(\vec{r})$ et $\vec{\mathbb{\Pi}}(\vec{r})$ ne sont pas indépendantes puisque, en jauge de Coulomb, $\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbb{A}} = \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbb{\Pi}} = 0$. Cette difficulté est résolue en prenant les transformées de Fourier $\vec{\mathcal{A}}(\vec{k})$ et $\vec{\pi}(\vec{k})$ de $\vec{\mathbb{A}}(\vec{r})$ et $\vec{\mathbb{\Pi}}(\vec{r})$ et en considérant comme indépendantes les composantes de $\vec{\mathcal{A}}(\vec{k})$ et $\vec{\pi}(\vec{k})$ le long de 2 directions perpendiculaires contenues toutes 2 dans le plan $\perp$ à $\vec{k}$.

On trouve ensuite qu'il est commode d'introduire à partir de $\vec{\mathcal{A}}(\vec{k})$ et $\vec{\pi}(\vec{k})$ des nouveaux opérateurs $a_{\vec{k}\lambda}$ et $a^+_{\vec{k}\lambda}$ permettant d'écrire $\vec{\mathbb{A}}(\vec{r})$, $\vec{E}_\perp(\vec{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\mathbb{\Pi}}(\vec{r})$

et $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$ sous la forme des développements suivants :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_\lambda \int d^3k \; N(k) \left[a_{\vec{k}\lambda} \, \vec{e}_\lambda \, e^{i\vec{k}.\vec{r}} + a^+_{\vec{k}\lambda} \, \vec{e}^{\,*}_\lambda \, e^{-i\vec{k}.\vec{r}} \right] \qquad (I-17)$$

$$\vec{E}_\perp(\vec{r}) = \sum_\lambda \int d^3k \; N(k) \, i\omega \left[a_{\vec{k}\lambda} \, \vec{e}_\lambda \, e^{i\vec{k}.\vec{r}} - a^+_{\vec{k}\lambda} \, \vec{e}^{\,*}_\lambda \, e^{-i\vec{k}.\vec{r}} \right] \qquad (I-18)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_\lambda \int d^3k \; N(k) \, i \left[a_{\vec{k}\lambda} \, \vec{k} \times \vec{e}_\lambda \, e^{i\vec{k}.\vec{r}} - a^+_{\vec{k}\lambda} \, \vec{e}^{\,*}_\lambda \, e^{-i\vec{k}.\vec{r}} \right] \qquad (I-19)$$

et satisfont de plus aux relations de commutation suivantes :

$$\left[a_{\vec{k}\lambda} , a_{\vec{k}'\lambda'} \right] = \left[a^+_{\vec{k}\lambda} , a^+_{\vec{k}'\lambda'} \right] = 0 \qquad (I-20)$$

$$\left[a_{\vec{k},\lambda} , a^+_{\vec{k}'\lambda'} \right] = \delta_{\lambda\lambda'} \; \delta(\vec{k} - \vec{k}') \qquad (I-21)$$

Finalement, les opérateurs quantiques $\vec{A}(\vec{r})$, $\vec{E}_\perp(\vec{r})$, $\vec{B}(\vec{r})$ se déduisent des grandeurs classiques correspondantes (I-1), (I-3), (I-4) en remplaçant les coefficients $a_{\vec{k}\lambda} \, e^{-i\omega t}$ et $a^*_{\vec{k}\lambda} \, e^{+i\omega t}$ du développement en ondes planes progressives par des opérateurs adjoints $a_{\vec{k}\lambda}$, $a^+_{k\lambda}$ indépendants du temps et satisfaisant aux relations de commutation (I-20) (I-21)

$a_{\vec{k}\lambda}$ et $a^+_{\vec{k}\lambda}$ sont appelés opérateurs de destruction et de création d'un photon $\vec{k}\,\lambda$.

En reportant les développement (I-17), (I-18) et (I-19) dans les expressions (I-14) et (I-15), ~~on obtient~~ et en prenant garde de respecter l'ordre des a et a^+, on obtient pour les opérateurs $\mathbb{H}$ et $\vec{\mathbb{P}}$ associés à $\mathcal{H}$ et $\vec{\mathcal{P}}$

$$\mathbb{H} = \sum_\alpha \frac{1}{2m_\alpha} \left[\vec{\mathbb{P}}_\alpha - e_\alpha \vec{A}(\vec{\mathcal{R}}_\alpha) \right]^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\alpha > \beta} \frac{e_\alpha \, e_\beta}{|\vec{\mathcal{R}}_\alpha - \vec{\mathcal{R}}_\beta|}$$
$$+ \sum_\lambda \int d^3k \; \frac{\hbar\omega}{2} \left(a_{\vec{k}\lambda} \, a^+_{\vec{k}\lambda} + a^+_{\vec{k}\lambda} \, a_{\vec{k}\lambda} \right) \qquad (I-22)$$

$$\vec{\mathbb{P}} = \sum_\alpha \vec{P}_\alpha + \sum_\lambda \int d^3k \; \hbar\vec{k} \; a^+_{\vec{k}\lambda} \, a_{\vec{k}\lambda} \qquad (I-23)$$