

# TABLE DES MATIÈRES

## REINTERPRETATION "QUANTIQUE" DES EQUATIONS DE MAXWELL

But de ce § .....	I-1
<b>A - Transformées de Fourier des champs <math>\vec{E}</math> et <math>\vec{B}</math> .....</b>	<b>I-1</b>
<b>B - Developpement en ondes planes progressives.....</b>	<b>I-1</b>
<b>C - Energie du champ électromagnétique <math>H_R</math> .....</b>	<b>I-3</b>
<b>D - Impulsion du champ électromagnétique <math>\vec{P}</math> .....</b>	<b>I-3</b>
<b>E - Moment cinétique du champ électromagnétique.....</b>	<b>II-1</b>
But de ce § .....	II-1
Quelques formules utiles .....	II-1
(1) Rappels de mécanique quantique.....	II-1
i) Spin 1 .....	II-1
ii) Analogie entre les 3 états $[ a\rangle]$ d'un spin 1 et les 3 vecteurs unitaires d'un trièdre trirectangle .....	II-2
iii) Fonction d'onde d'une particule de spin 1 .....	II-2
(2) Calcul de $\vec{J} = \epsilon_0 \int d^3 r \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B})$ en fonction de $\vec{\alpha}(\vec{k})$ .....	II-3
i) Calcul préliminaire en fonction de $\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$ et $\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$ .....	II-3
ii) Calcul en fonction de $\vec{\alpha}(\vec{k})$ .....	II-4
(3) $\vec{L}$ et $\vec{S}$ ne sont pas physiques alors que $\vec{J}$ l'est .....	II-4
<b>F - Fonctions d'onde correspondant à un photon de moment cinétique et de parité définis.....</b>	<b>III-1</b>
But de ce § .....	III-1
(1) Moment cinétique total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ d'une particule de spin 1 .....	III-1
i) Valeurs propres de $\vec{J}^2$ et $J_z$ .....	III-1
ii) Vecteurs propres communs à $\vec{L}^2, \vec{J}^2, J_z$ .....	III-1
iii) Valeur des coefficients de Clebsch-Gordan $\langle \ell 1 m \mu   JM \rangle$ .....	III-1
(2) Fonctions propres communes à $\vec{L}^2, \vec{J}^2, J_z$ : Harmoniques sphériques vectorielles.....	III-1
i) Fonction d'onde associée à $ \ell m\rangle$ dans l'espace des $\vec{k}$ .....	III-1
ii) Composantes de $ \mu\rangle$ dans la base $[ a\rangle]$ introduite au § 5a.....	III-1
iii) Harmoniques sphériques vectorielles.....	III-2
iv) Relation d'orthonormalisation .....	III-2
v) Parité.....	III-2
vi) Fonctions propres correspondant à une énergie et un moment cinétique bien définis.....	III-3

(3) Une autre méthode pour obtenir des fonctions propres du moment cinétique total...	III-3
i) Construction d'une fonction d'onde vectorielle à partir d'une fonction d'onde scalaire et d'un opérateur vectoriel $\vec{V}$ définis dans l'espace des $\vec{k}$ .....	III-3
ii) Action de $\vec{J}$ sur la fonction d'onde précédente.....	III-3
iii) Théorème.....	III-4
(4) Fonctions propres longitudinales et transversales de $\vec{J}^2$ et $J_z$ .....	III-4
i) Premier choix de $\vec{V}$ : opérateur multiplicateur par $\vec{n}$ .....	III-4
ii) Deuxième choix de $\vec{V}$ : opérateur $\vec{L}$ .....	III-5
iii) Troisième choix de $\vec{V}$ : opérateur gradient / $\vec{k}$ ou plus exactement $k\vec{V}$ .....	III-5
iv) Relations entre $\vec{N}_\ell^m, \vec{X}_\ell^m, \vec{Z}_\ell^m$ .....	III-6
(5) Conclusion .....	III-6

**G - Ondes Multipolaires .....** **IV-1**

But de ce § .....

(1) Regroupement des formules importantes .....	IV-1
i) Développement de $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$ .....	IV-1
ii) Expression de $\vec{\alpha}(\vec{k})$ pour un photon d'impulsion $\hbar \vec{k}_0$ et de polarisation $\vec{e}$ données .....	IV-1
iii) Expression de $\vec{\alpha}(\vec{k})$ pour un photon d'énergie $\hbar c k_0$ , de moment cinétique $(J, M)$ , de parité $(-1)^J$ .....	IV-1
iv) Expression de $\vec{\alpha}(\vec{k})$ pour un photon d'énergie $\hbar c k_0$ de moment cinétique $(J, M)$ , de parité $(-1)^{J+1}$ .....	IV-1
(2) Calcul de quelques intégrales .....	IV-2
i) Développement de $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ en harmoniques sphériques.....	IV-2
ii) Calcul de $\int d\Omega_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} Y_{J,\ell,1}^m(\vec{n})$ .....	IV-2
(3) Structure d'une onde multipolaire électrique $JM$ .....	IV-2
i) Calcul de $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$ .....	IV-2
ii) Discussion physique .....	IV-3
(4) Structure d'une onde multipolaire magnétique $JM$ .....	IV-3
(5) Passage des ondes planes aux ondes multipolaires.....	IV-4
i) Produits scalaires et relations de fermeture .....	IV-4
ii) 1 <sup>ère</sup> application : distribution angulaire du rayonnement émis dans une onde multipolaire.....	IV-4
iii) 2 <sup>ème</sup> application : développement d'une onde plane polarisée en ondes multipolaires ou en harmoniques sphériques vectorielles.....	IV-5

<b>H - Potentiels .....</b>	<b>V-1</b>
But de ce § .....	V-1
(1) Définition.....	V-1
(2) Jauges .....	V-1
(3) Choix d'une première jauge pour décrire le rayonnement libre .....	V-2
(4) Changements de jauge conservant pour $\vec{A}$ et $\vec{U}$ une structure de développement en ondes planes progressives de vitesse $c$ .....	V-2
i) Détermination de $\chi(\vec{r}, t)$ .....	V-2
ii) Ces changements de jauge conservent la condition de Lorentz.....	V-3
(5) Potentiels correspondants à divers types de photons .....	V-3
i) Photon d'impulsion $\hbar \vec{k}_0$ et de polarisation $\vec{e}$ données .....	V-3
ii) Photon multipolaire électrique $JM$ , d'énergie $\hbar c k_0$ .....	V-4
iii) Photon multipolaire magnétique $JM$ , d'énergie $\hbar c k_0$ .....	V-5
<b>I - Moments Multipolaires d'une distribution de charges, de courants et de magnétisation.....</b>	<b>VI-1</b>
(1) Equations de Maxwell en présence des sources.....	VI-1
i) Les sources.....	VI-1
ii) Equations de Maxwell .....	VI-1
iii) Régime sinusoïdal .....	VI-1
iv) Transformée de Fourier .....	VI-2
v) Parties longitudinale et transversale des termes sources .....	VI-2
(2) Développement des sources et des champs en états de moment cinétique et de parité bien définis .....	VI-2
(3) Comportement asymptotique des champs $\vec{B}(\vec{r})$ et $\vec{E}(\vec{r})$ pour $r$ grand.....	VI-3
(4) Moments multipolaires électriques.....	VI-4
i) Première expression en fonction de $\vec{J}(\vec{r}, t)$ .....	VI-4
ii) Autre expression équivalente .....	VI-4
iii) Limite des grandes longueurs d'onde (grandes devant les dimensions des sources) .....	VI-5
(5) Moments multipolaires magnétiques.....	VI-5
i) Expression en fonction de $\vec{J}(\vec{r}, t)$ .....	VI-5
ii) Limite des grandes longueurs d'onde.....	VI-5

## 2<sup>ème</sup> partie

### DESCRIPTION LAGRANGIENNE ET HAMILTONIENNE D'UN CHAMP

#### Application au champ électromagnétique

##### I – Etude d'un système simple

But de ce § .....	VII-1
<b>A - Description d'un système mécanique discret.....</b>	<b>VII-1</b>
(1) Variables dynamiques.....	VII-1
(2) Energie cinétique $T$ , potentielle $V$ , Lagrangien $L$ .....	VII-1
(3) Equations du mouvement - Vitesse d'un ébranlement de grande longueur d'onde ...	VII-1
(4) Moments conjugués – Hamiltonien.....	VII-2
(5) Relations de commutation du système quantique.....	VII-2
<b>B - Système continu obtenu par passage à la limite .....</b>	<b>VII-2</b>
(1) Conditions du passage à la limite .....	VII-2
(2) Variables dynamiques.....	VII-2
(3) Lagrangien – Densité de lagrangien .....	VII-3
(4) Equation du mouvement .....	VII-3
(5) Moments conjugués – Hamiltonien.....	VII-4
(6) Relations de commutation.....	VII-4

##### II – Notion de dérivée fonctionnelle

But de ce § .....	VII-5
<b>A - Exemple de fonctionnelle définie sur des fonctions d'une variable.....</b>	<b>VII-5</b>
(1) Définition de la fonctionnelle .....	VII-5
(2) Variation $\delta S$ correspondant à une variation $\delta u(t)$ .....	VII-5
(3) Définition de la dérivée fonctionnelle .....	VII-5
(4) Application : calcul des variations .....	VII-5
<b>B - Exemple de fonctionnelle définie sur les fonctions de plusieurs variables .....</b>	<b>VII-6</b>
(1) Définition de 2 fonctionnelles .....	VII-6
(2) Variation de $u$ , $\delta u$ .....	VII-6
(3) Calcul de $\delta L$ . Dérivées fonctionnelles de $L$ .....	VII-6
(4) Calcul de $\delta S$ . Dérivée fonctionnelle de $S$ .....	VII-6

##### III – Equations de Lagrange pour un champ classique

But de ce § .....	VIII-1
<b>A - Lagrangien du champ – Action – Principe de moindre action .....</b>	<b>VIII-1</b>
(1) "Coordonnées" du champ à l'instant $t$ .....	VIII-1
(2) Densité de lagrangien $\mathcal{L}$ .....	VIII-1

(3) Lagrangien – action .....	VIII-1
(4) Principe de moindre action.....	VIII-1
<b>B - Application au champ électromagnétique.....</b>	<b>VIII-2</b>
(1) Lagrangien du système global : charges + champ électromagnétique .....	VIII-2
(2) Discussion physique.....	VIII-3
(3) Equations du mouvement des champs .....	VIII-4
(4) Equations du mouvement des charges.....	VIII-5

#### IV – Equations de Hamilton-jacobi pour un champ classique

But de ce § .....	IX-1
<b>C - Cas général .....</b>	<b>IX-1</b>
(1) Moments conjugués .....	IX-1
(2) Densité d'hamiltonien – Hamiltonien.....	IX-1
(3) Equations de Hamilton-Jacobi .....	IX-1
(4) Quantification .....	IX-2
<b>D - Cas du champ électromagnétique.....</b>	<b>IX-2</b>
(1) Moments conjugués .....	IX-2
(2) Hamiltonien .....	IX-2
(3) Equations de Hamilton-Jacobi .....	IX-3

#### V- Lois de conservation pour un système de charges et de champs en interaction

But de ce § .....	X-1
<b>E - Impulsion totale .....</b>	<b>X-1</b>
(1) Variation de l'action lors d'une translation infinitésimale des axes de coordonnées ..	X-1
(2) Cas d'un mouvement réel du système – Définition de l'impulsion totale.....	X-3
<b>F - Moment cinétique total.....</b>	<b>X-4</b>
(1) Variation de l'action lors d'une rotation du système d'axes .....	X-4
(2) Cas d'un mouvement réel du système – Définition du moment cinétique total .....	X-5
<b>G - Energie totale.....</b>	<b>X-6</b>
(1) Variation de l'action lors d'une translation infinitésimale de l'axe des temps.....	X-6
(2) Cas d'un mouvement réel du système – Définition de l'énergie totale .....	X-7

#### VI – Choix d'une jauge particulière : la jauge de Coulomb

But de ce § .....	XI-1
-------------------	------

(3) Résultats des équations de Lagrange valables quelle que soit la jauge .....	XI-1
(4) Jauge de Coulomb .....	XI-1
(5) Pourquoi choisir la jauge de Coulomb .....	XI-2
(6) Elimination de $U$ (et $\vec{E}_{\parallel}$ ) dans le Lagrangien .....	XI-3
(7) Elimination de $U$ (et $\vec{E}_{\parallel}$ ) dans le Hamiltonien .....	XI-4
(8) Elimination de $U$ (et $\vec{E}_{\parallel}$ ) dans l'impulsion totale $\vec{P}$ .....	XI-4
(9) Elimination de $U$ (et $\vec{E}_{\parallel}$ ) dans le moment cinétique total $\vec{J}$ .....	XI-5

## VII - Quantification

But de ce § .....	XII-1
<b>H - Relations de commutation canoniques ne tenant pas compte de la transversalité des champs et potentiels en jauge de Coulomb .....</b>	<b>XII-1</b>
<b>I - Relations de commutation correctes tenant compte de la transversalité .....</b>	<b>XII-1</b>
<b>J - Opérateurs de création et d'annihilation .....</b>	<b>XII-3</b>
(1) Définition.....	XII-3
(2) Relations de commutation.....	XII-3
(3) Développement des opérateurs $\vec{A}$ , $\vec{E}_{\perp}$ , $\vec{B}$ en ondes planes .....	XII-4
(4) Lien avec la 2 <sup>ème</sup> quantification .....	XII-4
(5) Développement en ondes multipolaires .....	XII-5
(6) Grandeurs physiques .....	XII-6