26.2.74

IV - Equations de Hamilton-Jacobi pour un champ classique

But de ce §: Introduire le formalisme hamiltonien, en particulier pour le champ électromagnétique. Sert de base à la quantification.

A - Cas général (généralisation des résultats du § I).

Revenons au champ $u_i(\vec{r},t)$ décrit par la densité de lagrangien $\mathcal{L}(u_i, \dot{u}_i, \vec{\nabla} u_i)$ et le lagrangien $L = \int d^3r\, \mathcal{L}$

① Moments conjugués.

Introduisons le moment conjugué de u_i, noté π_i, par :

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} = \frac{\delta L}{\delta \dot{u}_i} \qquad (IX-1)$$

(on a utilisé VII-60)

② Densité d'hamiltonien - Hamiltonien.

- La densité d'hamiltonien est par définition :

$$\mathcal{H} = \sum_i \pi_i \dot{u}_i - \mathcal{L} \qquad (IX-2)$$

- Utilisons la relation de définition IX-1 pour exprimer $\dot{u}_i$ en fonction de u_i et π_i et exprimons $\mathcal{H}$ en fonction des variables u_i et π_i, au lieu de u_i et $\dot{u}_i$ ($\mathcal{H}$ peut dépendre aussi éventuellement de $\vec{\nabla} u_i$ et $\vec{\nabla}\pi_i$) :

$$\mathcal{H}(u_i, \pi_i, \vec{\nabla} u_i, \vec{\nabla}\pi_i) \qquad (IX-3)$$

- A partir de $\mathcal{H}$, construisons l'hamiltonien :

$$H = \int d^3r\, \mathcal{H} = \int d^3r\, \dot{u}_i \pi_i - L \qquad (IX-4)$$

③ Equations de Hamilton-Jacobi.

- A tout instant t, H est une fonctionnelle de u_i et π_i. Par définition même des dérivées fonctionnelles (voir § II), la variation δH de H correspondant à des variations δu_i et $\delta\pi_i$ de u_i et π_i s'écrit :

$$\delta H = \int d^3r \left(\frac{\delta H}{\delta u_i} \delta u_i + \frac{\delta H}{\delta \pi_i} \delta \pi_i \right) \qquad (IX-5)$$

où $\frac{\delta H}{\delta u_i}$ et $\frac{\delta H}{\delta \pi_i}$ s'obtiennent à partir de $\mathcal{H}$ par un calcul analogue à celui du § II :

$$\frac{\delta H}{\delta u_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i} - \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{\nabla} u_i} \qquad \frac{\delta H}{\delta \pi_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_i} - \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{\nabla} \pi_i} \qquad (IX-6)$$

- Calculons maintenant δH à partir de (IX-4)

$$\delta H = \int d^3r \sum_i (\pi_i \delta\dot{u}_i + \dot{u}_i \delta\pi_i) - \delta L \qquad (IX-7)$$

Or, comme L est une fonctionnelle de u_i et $\dot{u}_i$, on a d'après les résultats du § II :

$$\delta L = \int d^3r \left(\frac{\delta L}{\delta u_i} \delta u_i + \frac{\delta L}{\delta \dot{u}_i} \delta \dot{u}_i \right) \qquad (IX-8)$$

c'est à dire encore, en utilisant IX-1 :

$$\delta L = \int d^3r \left(\frac{\delta L}{\delta u_i} \delta u_i + \pi_i \delta \dot{u}_i \right) \qquad (IX-9)$$

En reportant IX-9 dans IX-7, on obtient :

$$\delta H = \int d^3r \left(\dot{u}_i \delta\pi_i - \frac{\delta L}{\delta u_i} \delta u_i \right) \qquad (IX-10)$$

Comparons (IX-10) à (IX-5). On en déduit que

$$\dot{u}_i = \frac{\delta H}{\delta \pi_i} \qquad \frac{\delta L}{\delta u_i} = -\frac{\delta H}{\delta u_i} \qquad (IX-11)$$

– Compte tenu des définitions (IX-1) et (IX-2), les égalités (IX-11) sont valables quels que soient u_i $\dot{u}_i$ π_i.

Supposons maintenant de plus que les fonctions $u_i(\vec{r},t)$, $\dot{u}_i(\vec{r},t)$, $\pi_i(\vec{r},t)$ correspondent au mouvement effectivement suivi par le champ ~~matériels~~. u_i est alors solution des équations de Lagrange (cf VIII-8) :

$$\frac{\delta L}{\delta u_i} - \frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{u}_i} = 0 \qquad (IX-12)$$

On a alors compte tenu de IX-1

$$\dot{\pi}_i = \frac{\delta L}{\delta u_i} \qquad (IX-13)$$

Reportons IX-11 dans IX-13. Il vient

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{u}_i = \dfrac{\delta H}{\delta \pi_i} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_i} - \vec{\nabla}\cdot\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{\nabla}\pi_i} \\ \dot{\pi}_i = -\dfrac{\delta H}{\delta u_i} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_i} + \vec{\nabla}\cdot\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{\nabla} u_i} \end{array}\right. \qquad (IX-14)$$

Ce sont les équations de Hamilton-Jacobi. L'état du champ à l'instant t est défini par la donnée des coordonnées u_i et des moments conjugués π_i en tout point $\vec{r}$. Les équations de Hamilton-Jacobi sont des équations du 1er ordre en t permettant de calculer l'évolution ultérieure du système.

④ Quantification.

$$\left\{\begin{array}{lll} u_i(\vec{r},t) & \longrightarrow \text{observable} & U_i(\vec{r}) \\ \pi_i(\vec{r}',t) & \longrightarrow \quad " & \Pi_i(\vec{r}') \end{array}\right.$$

En généralisant les résultats du § I, on obtient :

$$\left[U_i(\vec{r}), \Pi_j(\vec{r}') \right] = i\hbar\, \delta_{ij}\, \delta(\vec{r}-\vec{r}') \qquad (IX-15)$$

B. Cas du champ électromagnétique

① Moments conjugués.

On les calcule à partir du lagrangien VIII-13 (voir aussi VIII-14).

– M^t conjugué de $\vec{q}_\alpha$: $\vec{p}_\alpha$.

$$\vec{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_\alpha} = m_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha + e_\alpha \vec{A}(\vec{q}_\alpha, t) \qquad (IX-16)$$

– M^t conjugué de $\vec{A}(\vec{r},t)$: $\vec{\pi}(\vec{r},t)$

$$\Pi_i(\vec{r},t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_i}\frac{\partial E_i}{\partial \dot{A}_i} = -\varepsilon_0 E_i(\vec{r},t) = \varepsilon_0(\partial_i U + \dot{A}_i) \qquad (IX-17)$$

Le moment conjugué de $\vec{A}$ est donc, à un facteur $-\varepsilon_0$ près, le champ électrique $\vec{E}$

$$\vec{\Pi}(\vec{r},t) = -\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r},t) \qquad (IX-18)$$

– M^t conjugué de U

U n'a pas de moment conjugué car $\dot{U}$ ne figure pas dans $\mathcal{L}$.

② Hamiltonien

Il faut d'abord éliminer $\dot{\vec{q}}_\alpha$ et $\dot{\vec{A}}$ au profit de $\vec{p}_\alpha$ et $\vec{\Pi}$. D'après (IX-16, 17)

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{\vec{q}}_\alpha = \dfrac{1}{m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha - e_\alpha \vec{A}(\vec{q}_\alpha, t)\right] \\ \dot{\vec{A}} = -\vec{\nabla} U + \dfrac{1}{\varepsilon_0}\vec{\Pi} \end{array}\right. \qquad (IX-19)$$

Reportons IX-19 dans l'expression du hamiltonien :

$$H = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha \cdot \dot{\vec{q}}_\alpha + \int d^3r \ \vec{\Pi} \cdot \dot{\vec{A}} - L \qquad (IX-20)$$

On obtient immédiatement à partir de (VIII-13), (IX-19) :

$$H = \sum_\alpha \frac{1}{2m_\alpha} \left[\vec{p}_\alpha - e_\alpha \vec{A}(\vec{q}_\alpha, t) \right]^2 + \sum_\alpha e_\alpha \, U(\vec{q}_\alpha, t)$$
$$+ \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \left[\frac{1}{\varepsilon_0^2} \vec{\Pi}^2 + c^2 (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 \right] - \int d^3r \ \vec{\Pi} \cdot \vec{\nabla} U \qquad (IX-21)$$

H est ainsi exprimé en fonction des coordonnées $\vec{q}_\alpha$, $\vec{A}$, U et des moments conjugués $\vec{p}_\alpha$, $\vec{\Pi}$

On peut encore écrire (IX-21) sous la forme suivante, utile pour la suite :

$$H = \sum_\alpha \int d^3r \left\{ \frac{1}{2m_\alpha} \left[\vec{p}_\alpha - e_\alpha \vec{A}(\vec{r}, t) \right]^2 + e_\alpha \, U(\vec{r}, t) \right\} \delta(\vec{r} - \vec{q}_\alpha(t))$$
$$+ \varepsilon_0 \int d^3r \left\{ \frac{1}{2} \left[\vec{E}(\vec{r}, t)^2 + c^2 \vec{B}(\vec{r}, t)^2 \right] + \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} U(\vec{r}, t) \right\} \qquad (IX-22)$$

3 Equations de Hamilton-Jacobi

Particules

- La 1ère equation de H.J.

$$\dot{\vec{q}}_\alpha = \frac{\delta H}{\delta \vec{p}_\alpha} = \frac{1}{m_\alpha} \left[\vec{p}_\alpha - e_\alpha \vec{A}(\vec{q}_\alpha, t) \right] \qquad (IX-23)$$

redonne simplement IX-16

- Avant d'écrire la 2ème équation de H.J., appliquons l'égalité VIII-37 au cas $\vec{A} = \vec{p}_\alpha - e_\alpha \vec{A}(\vec{q}_\alpha, t) = \vec{B}$. On obtient, compte tenu de IX-23

$$\vec{\nabla}_\alpha \left[\vec{p}_\alpha - e_\alpha \vec{A}(\vec{q}_\alpha, t) \right]^2 = 2 m_\alpha \left(\dot{\vec{q}}_\alpha \cdot \vec{\nabla}_\alpha \right) \left(-e_\alpha \vec{A} \right) - 2 m_\alpha e_\alpha \, \dot{\vec{q}}_\alpha \times \left(\vec{\nabla}_\alpha \times \vec{A} \right) \qquad (IX-24)$$

(Dans IX-24 $\vec{\nabla}$ est l'opérateur gradient par rapport à la coordonnée $\vec{q}_\alpha$)

On a par suite, en utilisant l'expression IX-21 de H :

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{q}_\alpha} = \vec{\nabla}_\alpha H = e_\alpha (\dot{\vec{q}}_\alpha \cdot \vec{\nabla}_\alpha) \vec{A}(\vec{q}_\alpha, t) + e_\alpha \, \dot{\vec{q}}_\alpha \times \vec{B}(\vec{q}_\alpha, t) - e_\alpha \vec{\nabla}_\alpha U(\vec{q}_\alpha, t) \qquad (IX-25)$$

Par ailleurs, on a d'après IX-16 ou IX-23 :

$$\dot{\vec{p}}_\alpha = m_\alpha \ddot{\vec{q}}_\alpha + e_\alpha \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{q}_\alpha, t) + e_\alpha (\dot{\vec{q}}_\alpha \cdot \vec{\nabla}_\alpha) \vec{A}(\vec{q}_\alpha, t) \qquad (IX-26)$$

La 2ème equation de H.J., $\dot{\vec{p}}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}_\alpha}$, s'écrit donc compte tenu de (IX-25) et (IX-26)

$$m_\alpha \ddot{\vec{q}}_\alpha = e_\alpha \left(-\vec{\nabla}_\alpha U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + e_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha \times \vec{B} = e_\alpha \left[\vec{E}(\vec{q}_\alpha, t) + \dot{\vec{q}}_\alpha \times \vec{B}(\vec{q}_\alpha, t) \right] \qquad (IX-27)$$

On retrouve bien l'équation du mouvement de la particule α sous l'effet de la force de Lorentz.

Potentiel vecteur

- Comme $\mathcal{H}$ ne dépend pas de $\vec{\nabla} \Pi_i$, la 1ère equation de H.J. s'écrit.

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\delta H}{\delta \vec{\Pi}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{\Pi}} = \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{\Pi} - \vec{\nabla} U \qquad (IX-28)$$

On réobtient simplement (IX-17).

– La 2ème équation de H.J. s'écrit :

$$\dot{\Pi}_k = -\frac{\delta H}{\delta A_k} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_k} + \partial_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_j A_k)} \qquad (IX-29)$$

De (IX-22), on tire :

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_k} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left[\vec{P}_\alpha - e_\alpha \vec{A}(\vec{q}_\alpha, t)\right]_k \delta(\vec{r} - \vec{q}_\alpha(t)) = e_\alpha (\dot{\vec{q}}_\alpha)_k \, \delta(\vec{r} - \vec{q}_\alpha(t)) = J_k(t) \qquad (IX-30)$$

D'autre part, en utilisant VIII-25, on obtient

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_j A_k)} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial B_i} \frac{\partial B_i}{\partial(\partial_j A_k)} = \varepsilon_0 c^2 B_i \, \varepsilon_{ijk} \qquad (IX-31)$$

d'où l'on tire finalement en reportant IX-30 et IX-31 dans IX-29

$$\varepsilon_{kji}\, \partial_j B_i = \mu_0 J_k + \frac{1}{c^2} \dot{E}_k \qquad (IX-32)$$

qui n'est autre que l'équation de Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

Potentiel scalaire.

Comme $\dot{U}$ ne figure pas dans $\mathcal{L}$, U n'a pas pas de moment conjugué et le formalisme de Hamilton-Jacobi ne s'applique pas. 2 points de vue sont alors possibles :

1er point de vue :

On utilise le fait que H est relié à L par IX-4, et les relations générales IX-11 qui ~~s...~~ en découlent entre les dérivées fonctionnelles de L et H. On a donc dans le cas de la variable U :

$$\frac{\delta L}{\delta U} = -\frac{\delta H}{\delta U} \qquad (IX-33)$$

quelles que soient les valeurs des coordonnées des champs et des particules.

Supposons maintenant de plus que l'on remplace dans IX-33, ces dernières coordonnées par leurs valeurs correspondant à un mouvement effectivement suivi par le système, c-à-d par des fonctions solutions des équations de Lagrange. Ces équations s'écrivent pour U :

$$\frac{\delta L}{\delta U} = \frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{U}} = 0 \quad \text{car } \mathcal{L} \text{ ne dépend pas de } \dot{U} \qquad (IX-34)$$

On en déduit, grâce à IX-33 :

$$\frac{\delta H}{\delta U} = 0 \quad \text{pour un mouvement réel du système} \qquad (IX-35)$$

c-à-d encore

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\partial_i U)} = 0 \qquad (IX-36)$$

De (IX-22), on tire

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial U} = \sum_\alpha e_\alpha \delta(\vec{r} - \vec{q}_\alpha(t)) = \rho(\vec{r}, t)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial_i U} = \varepsilon_0 E_i \qquad (IX-37)$$

ce qui donne finalement, reporté dans IX-36, l'équation de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (IX-38)$$

2e point de vue.

On "oublie" le Lagrangien dont est issu H et on considère directement et uniquement l'hamiltonien H donné en IX-21 ou IX-22, ainsi que les équations de H.J. relatives aux variables conjuguées $\vec{q}_\alpha, \vec{P}_\alpha$ et $\vec{A}, \vec{\Pi}$.

Comme aucune équation ne régit alors le mouvement de U, l'ensemble des solutions des équations de H.J. relatives à $\vec{q}_\alpha, \vec{P}_\alpha$ et $\vec{A}, \vec{\Pi}$ est beaucoup plus vaste que celui obtenu plus haut. On vérifie ensuite qu'on peut se restreindre à un sous ensemble de solutions telles que l'égalité $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$ soit satisfaite à tout instant.

Pour cela, il suffit de vérifier que les équations de H.J. relatives à $\vec{q}_\alpha, \vec{P}_\alpha$ et à $\vec{A}, \vec{\Pi}$ entraînent que :

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\nabla}.\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\nabla}.\vec{\Pi} + \rho\right) = 0 \qquad \text{(IX-39)}$$

Comme les équations de H.J. sont du 1er ordre en t, si l'on choisit à l'instant initial un état tel que $\vec{\nabla}.\vec{\Pi} + \rho = 0$ à cet instant, alors, à cause de IX-39, $\vec{\nabla}.\vec{\Pi} + \rho$ restera nul à tout instant ultérieur.

Effectivement, partons de l'équation IX-32 (équation de H.J relative à $\vec{A}$ et à $\vec{\Pi} = -\varepsilon_0 \vec{E}$) et prenons la divergence des 2 membres. Comme $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$, il vient :

$$\vec{\nabla}.\dot{\vec{E}} = -\mu_0 c^2\, \vec{\nabla}.\vec{J} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\, \vec{\nabla}.\vec{J} \qquad \text{(IX-40)}$$

En utilisant l'équation de conservation de l'électricité VIII-12, on retrouve bien alors que :

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\nabla}.\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) = 0 \qquad \text{(IX-41)}$$