2ème Partie

Description Lagrangienne et Hamiltonienne d'un champ. Application au champ électromagnétique.

I. Etude d'un système simple

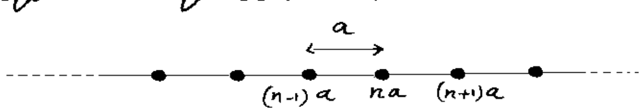
But de ce §: Introduire quelques notions importantes relatives aux champs en considérant un système mécanique discret qu'on fait tendre ensuite vers un système continu. Faire apparaître simplement la notion de densité de Lagrangien, de densité d'Hamiltonien ; rendre plausibles les relations de commutation relatives au champ quantifié.

Exemple utile en tant que guide pour l'étude des vrais champs, mais sans réalité physique (tout objet a une structure atomique).

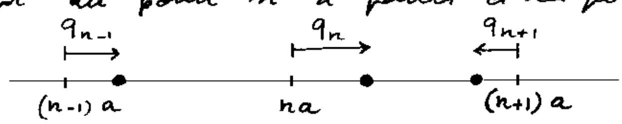
A - Description d'un système mécanique discret.

① Variable dynamique.

- Points matériels, de masse m, pouvant se déplacer sur un axe. Positions d'équilibre équidistantes. Abcisse du point n : na.



- Déplacement du point n à partir de la position d'équilibre : $q_n(t)$



- Etat du système défini à l'instant t par la donnée des variables dynamiques :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{déplacements} & \{q_n(t)\} \\ \text{vitesses} & \{\dot{q}_n(t)\} \end{array}\right.$$

② Energie cinétique T, potentielle V. Lagrangien L.

- Energie cinétique
$$T = \frac{1}{2} m \sum_n \dot{q}_n^2 \qquad \text{(VII-1)}$$

- On suppose que les points s'attirent entre plus proches voisins avec des forces proportionnelles aux distances les séparant. Force agissant sur le point n :
$$F_n = m\omega_1^2 (q_{n+1} - q_n) - m\omega_1^2 (q_n - q_{n-1}) \qquad \text{(VII-2)}$$
F_n dérive de l'énergie potentielle :
$$V = \frac{1}{2} m\omega_1^2 \sum_n (q_{n+1} - q_n)^2 \qquad \text{(VII-3)}$$

- Lagrangien : $L = T - V$
$$L = \frac{1}{2} m \sum_n \left[\dot{q}_n^2 - \omega_1^2 (q_{n+1} - q_n)^2 \right] \qquad \text{(VII-4)}$$

③ Equations du mouvement - Vitesse d'un ébranlement de grande longueur d'onde

- Les équations de Lagrange (ou encore de Newton) donnent :

$$\ddot{q}_n = \omega_1^2 (q_{n+1} - q_n) - \omega_1^2 (q_n - q_{n-1}) \qquad \text{(VII-5)}$$

- Recherche de solutions de la forme :

$$q_n(t) = \alpha\, e^{i(kna - \Omega t)} + c.c. \qquad (VII-6)$$

ébranlement longitudinal d'amplitude complexe α, de vecteur d'onde k, de pulsation Ω. En portant (VII-6) dans (VII-5) on obtient la relation de dispersion suivante entre k et Ω :

$$-\Omega^2 = \omega_1^2\left[(e^{ika}-1)-(1-e^{-ika})\right] = -4\,\omega_1^2 \sin^2\frac{ka}{2} \qquad (VII-7)$$

Vitesse de phase v : $\qquad v = \dfrac{\Omega}{k} = \dfrac{2\omega_1}{k}\sin\dfrac{ka}{2} \qquad (VII-8)$

Limite des grandes longueurs d'onde $(k \to 0)$

$$v = \omega_1\, a \qquad (VII-9)$$

(4) Moments conjugués – Hamiltonien.

- Moment conjugué de q_n $\qquad p_n = \dfrac{\partial L}{\partial \dot q_n} = m\,\dot q_n \qquad (VII-10)$
- Hamiltonien $H(q_n, p_n)$.

$$H(q_n, p_n) = \sum_n p_n \dot q_n - L = \sum_n \left[\frac{p_n^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_1^2 (q_{n+1}-q_n)^2\right] \qquad (VII-11)$$

- Equations de Hamilton – Jacobi

$$\dot q_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} \qquad \dot p_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} \qquad (VII-12)$$

(5) Relations de commutation du système quantique.

$$\left\{\begin{array}{llll} \text{variable classique} & q_n & \longrightarrow & \text{observable quantique } Q_n \\ \text{"} \quad \text{"} & p_n & \longrightarrow & \text{"} \quad \text{"} \quad P_n \end{array}\right.$$

$$[Q_n, P_{n'}] = i\hbar\, \delta_{nn'} \qquad (VII-13)$$

B – Système continu obtenu par passage à la limite

(1) Conditions du passage à la limite

- On fait tendre vers 0 la distance a entre 2 points consécutifs. On veut cependant que la masse par unité de longueur reste constante et égale à μ

$$a \to 0\,,\quad m \to 0 \qquad \frac{m}{a} = \mu \qquad (VII-14)$$

- On veut également que la vitesse des ondes longitudinales dans le milieu reste constante et égale à v

$$a \to 0\,,\quad \omega_1 \to \infty \qquad \omega_1 a = v \qquad (VII-15)$$

- On obtient ainsi à la limite une tige continue linéaire, de masse par unité de longueur μ, et où la vitesse du son est v.

(2) Variables dynamiques.

- Au lieu de se donner le déplacement et la vitesse d'un ensemble discret de points, il faut se donner le déplacement et la vitesse de chaque point de la tige, d'abscisse au repos x

$$\{q_n(t), \dot q_n(t)\} \longrightarrow \left\{u(x,t), \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right\} \qquad (VII-16)$$

- Dans $u(x,t)$, x n'est pas une variable dynamique, mais un <u>indice continu</u> permettant de repérer la variable à laquelle on s'intéresse.

De même, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ se confond avec $\dot{u}(x,t)$. C'est la vitesse de la variable dynamique repérée par l'indice x. (Il n'y a pas de différence entre $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{du}{dt}$ car x, étant un indice, ne dépend pas de t).

– Limite de $\frac{q_{n+1}-q_n}{a}$

$$\frac{q_{n+1}-q_n}{a} \longrightarrow \lim_{dx \to 0} \frac{u(x+dx)-u(x)}{dx} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \qquad (VII-17)$$

③ Lagrangien - Densité de lagrangien.

– Réécrivons (VII-4) sous la forme :

$$L = \frac{1}{2}\frac{m}{a}\sum_n a\left[\dot{q}_n^{\,2} - \omega_1^2 a^2 \left(\frac{q_{n+1}-q_n}{a}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\mu \sum_n a\left[\dot{q}_n^{\,2} - v^2\left(\frac{q_{n+1}-q_n}{a}\right)^2\right] \qquad (VII-18)$$

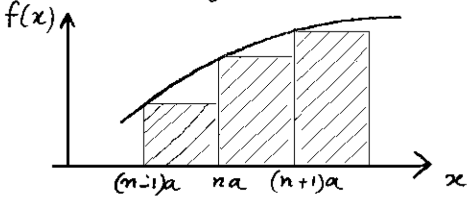
– Lors du passage à la limite,

$$\dot{q}_n(t) \quad \text{devient} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

$$\frac{q_{n+1}-q_n}{a} \quad \text{"} \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \qquad (VII-19)$$

Par définition même de l'intégrale de Riemann :

$$\lim_{a \to 0} \sum_n a\, f(na) = \int f(x)\,dx \qquad (VII-20)$$



– A la limite, le lagrangien (VII-18) devient donc :

$$L = \int dx\, \mathcal{L} \qquad (VII-21)$$

où $\mathcal{L}$, qu'on appelle "densité de Lagrangien", s'écrit :

$$\mathcal{L}\left(u, \dot{u}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\mu}{2}\left[\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 - v^2\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2\right] \qquad (VII-22)$$

On comprend ainsi comment la densité de Lagrangien peut dépendre à la fois des dérivées spatiales et temporelles des variables dynamiques.

④ Equations du mouvement.

– Réécrivons (VII-5) sous la forme :

$$\ddot{q}_n = \omega_1^2 a^2 \, \frac{\frac{q_{n+1}-q_n}{a} - \frac{q_n - q_{n-1}}{a}}{a} \qquad (VII-23)$$

Lors du passage à la limite, la fraction au 2ème membre de (VII-23) devient

$$\lim_{dx \to 0} \frac{\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}}{dx} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad (VII-24)$$

(VII-23) devient donc :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x,t) = 0 \qquad (VII-25)$$

qui est bien une équation de propagation.

Nous verrons plus loin comment (VII-25) peut s'obtenir directement à partir de la densité de lagrangien (VII-22) en appliquant le principe de moindre action. Nous obtiendrons les équations de Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \qquad \text{(VII-26)}$$

qui redonnent bien (VII-25) lorsqu'on utilise l'expression (VII-22) de $\mathcal{L}$.

⑤ Moments conjugués. Hamiltonien

– A $p_n = m\dot{q}_n$ correspond $m\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ (VII-27)

Posons

$$\pi(x,t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}(x,t)} = \mu\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \qquad \text{(VII-28)}$$

Lors du passage à la limite, d'après (VII-27) et (VII-28)

$$\frac{p_n}{a} \quad \text{devient} \quad \pi(x,t) \qquad \text{(VII-29)}$$

– Réécrivons (VII-11) sous la forme

$$H = \sum_n a\frac{p_n}{a}\dot{q}_n - L \qquad \text{(VII-30)}$$

Lors du passage à la limite H devient d'après (VII-20) et (VII-29)

$$H = \int dx\, \mathcal{H} \qquad \text{(VII-31)}$$

où $\mathcal{H}$, "densité d'hamiltonien", s'écrit

$$\mathcal{H}\left(u,\pi,\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \pi(x,t)\,\dot{u}(x,t) - \mathcal{L} = \frac{1}{2\mu}\left(\pi(x,t)\right)^2 + \frac{\mu v^2}{2}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2 \qquad \text{(VII-32)}$$

– Nous verrons plus loin la forme que prennent les équations canoniques de Hamilton-Jacobi.

⑥ Relations de commutation

– Réécrivons (VII-13) sous la forme :

$$\left[Q(x_n), P(x_{n'})\right] = i\hbar\,\delta_{x_n,x_{n'}} \qquad \text{(VII-33)}$$

avec $x_n = na$, $x_{n'} = n'a$. On peut encore écrire

$$\left[Q(x_n), \frac{P(x_{n'})}{a}\right] = i\hbar\,\frac{\delta_{x_n,x_{n'}}}{a} \qquad \text{(VII-34)}$$

– Lors du passage à la limite, d'après (VII-29) on a

$$Q(x_n) \longrightarrow U(x)$$

$$\frac{P(x_{n'})}{a} \longrightarrow \Pi(x')$$

Appelons $\Delta(x,x')$ la limite de $\frac{\delta_{x_n x_{n'}}}{a}$. Pour voir ce que représente $\Delta(x,x')$, étudions la limite de l'identité

$$\sum_{x_{n'}} a\,\frac{\delta_{x_n x_{n'}}}{a} f(x_{n'}) = f(x_n) \qquad \text{(VII-35)}$$

Elle s'écrit d'après (VII-20) :

$$\int dx'\,\Delta(x,x')\,f(x') = f(x) \qquad \text{(VII-36)}$$

On en déduit

$$\Delta(x,x') = \delta(x-x') \qquad \text{(VII-37)}$$

– Finalement, la limite de (VII-34) est

$$\left[U(x), \Pi(x')\right] = i\hbar\,\delta(x-x') \qquad \text{(VII-38)}$$

II Notion de dérivée fonctionnelle

But de ce § : Préciser quelques notions mathématiques utiles pour la suite.

A - Exemple de fonctionnelle définie sur des fonctions d'une variable.

① Définition de la fonctionnelle

- Soit $\{u(t)\}$ l'ensemble des fonctions réelles d'une variable t
- Soit $f(x,y)$ une fonction de 2 variables x et y dans laquelle on remplace x par $u(t)$ et y par $\dot{u}(t)$.

  A tout $u(t) \longrightarrow f(u(t), \dot{u}(t))$, nouvelle fonction de t
- Soit S le nombre défini par :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\; f(u(t), \dot{u}(t)) \qquad \text{(VII-39)}$$

A toute fonction $u(t)$ on peut ainsi, grace à VII-39, associer un nombre :
On a introduit une fonctionnelle définie sur l'ensemble des fonctions $\{u(t)\}$

② Variation δS correspondant à une variation $\delta u(t)$

- On fait varier légerement $u(t)$ $\qquad u(t) \longrightarrow u(t) + \delta u(t)$ $\qquad$ (VII-40)
avec les conditions aux limites $\qquad \delta u(t_1) = \delta u(t_2) = 0$ $\qquad$ (VII-41)

  Quelle est la variation correspondante, δS, de S ?
- Variation de $\dot{u}$: $\qquad \dot{u}(t) \longrightarrow \dot{u}(t) + \delta\dot{u}(t)$ $\qquad$ (VII-42)

  Peut-on relier $\delta\dot{u}$ à δu ? Après la variation, $\dot{u} = \frac{d}{dt}u$ devient $\frac{d}{dt}(u+\delta u)$ c-à-d $\dot{u} + \frac{d}{dt}\delta u$. En comparant avec (VII-42), on voit que :

$$\delta\dot{u} = \frac{d}{dt}\delta u \qquad \text{(VII-43)}$$

- Calcul de δS

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial u}\delta u + \frac{\partial f}{\partial \dot{u}}\delta\dot{u} = \frac{\partial f}{\partial u}\delta u + \frac{\partial f}{\partial \dot{u}}\frac{d}{dt}\delta u \qquad \text{(d'après VII-43)}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\delta u + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{u}}\delta u\right) - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{u}}\right)\delta u \qquad \text{(VII-44)}$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\delta f\, dt = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{u}}\right)\delta u\, dt + \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{u}}\delta u\right]_{t_1}^{t_2}}_{=0} \quad \text{d'après (VII-41)} \qquad \text{(VII-45)}$$

$$\boxed{\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{u}}\right)\delta u(t)\, dt} \qquad \text{(VII-46)}$$

③ Définition de la dérivée fonctionnelle.

δS apparait en (VII-46) comme résultant d'une somme de contributions dues aux variations $\delta u(t)$ de $u(t)$ dans les divers intervalles dt de $[t_1, t_2]$. On appelle dérivée fonctionnelle de S par rapport à $u(t)$, et on note $\frac{\delta S}{\delta u(t)}$, le quotient par $\delta u(t)\,dt$ de la variation de S résultant d'une variation $\delta u(t)$ de $u(t)$ dans le seul intervalle dt centré en t.

De (VII-46), on tire :

$$\frac{\delta S}{\delta u} = \frac{\delta S}{\delta u\, dt} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{u}} \qquad \text{(VII-47)}$$

④ Application : calcul de variations.

Calcul de la fonction $u(t)$ qui rend S extremale. δS doit être nul, $\forall\, \delta u$.

On en deduit que $\frac{\delta S}{\delta u}$ doit être nul $\forall\, t$ $\qquad$ (VII-48)

c-à-d que la fonction $u(t)$ cherchée doit être solution de :

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{u}} = 0 \qquad \text{(VII-49)}$$

Si $u(t) = q(t)$, $f = L$ (lagrangien), S = action, on retrouve les équations de Lagrange

B - Exemple de fonctionnelle définie sur les fonctions de plusieurs variable.

① Définition de 2 fonctionnelles

- $\{u(\vec{r},t)\}$ fonctions de 4 variables x, y, z, t.
- $f(a, b, \vec{c})$ fonction de $a, b, \vec{c}$ où l'on remplace a par u, b par $\dot{u}$, $\vec{c}$ par $\vec{\nabla}u$.

  A tout $u(\vec{r},t) \longrightarrow f(u, \dot{u}, \vec{\nabla}u)$ nouvelle fonction de $\vec{r}, t$
- 1ère fonctionnelle (correspondant à une valeur de t bien définie). Fonctionnelle de u et $\dot{u}$

$$L(t) = \int d^3r \ f(u, \dot{u}, \vec{\nabla}u) \qquad \text{(VII-50)}$$

- 2ème fonctionnelle (Fonctionnelle de u)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r \ f(u, \dot{u}, \vec{\nabla}u) \qquad \text{(VII-51)}$$

② Variation de u, δu

- $$u(\vec{r},t) \longrightarrow u(\vec{r},t) + \delta u(\vec{r},t) \qquad \text{(VII-52)}$$

avec
$$\begin{cases} \delta u(\vec{r},t_1) = \delta u(\vec{r},t_2) = 0 \\ \delta u(\vec{r},t) = 0 \quad \text{si} \quad |\vec{r}| = \infty \end{cases} \qquad \text{(VII-53)}$$

- comme au § A.2 précédent on montre aisement que

$$\begin{cases} \delta \dot{u} = \dfrac{d}{dt}\,\delta u & \text{(VII-54)} \\ \delta \vec{\nabla} u = \vec{\nabla}\,\delta u & \text{(VII-55)} \end{cases}$$

③ Calcul de δL. Derivées fonctionnelles de L

- $$\delta L = \int d^3r \left[\frac{\partial f}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial f}{\partial \dot{u}}\,\delta\dot{u} + \frac{\partial f}{\partial \vec{\nabla} u}\cdot \delta\vec{\nabla}u \right] \qquad \text{(VII-56)}$$

Comme on n'intègre pas sur t, on n'a pas à intégrer par parties le terme en $\delta\dot{u}$. Par contre, on peut, en utilisant (VII-55), réécrire le dernier terme de VII-56

$$\int d^3r \frac{\partial f}{\partial \vec{\nabla}u}\cdot\delta\vec{\nabla}u = \int d^3r \frac{\partial f}{\partial \vec{\nabla}u}\cdot\vec{\nabla}\,\delta u = \underbrace{\int d^3r\, \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial\vec{\nabla}u}\,\delta u\right)}_{\substack{\text{Transformation en une} \\ \text{intégrale de surface nulle d'après VII-53}}} - \int d^3r \left(\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{\nabla}u}\right)\delta u \qquad \text{(VII-57)}$$

Finalement

$$\delta L = \int d^3r \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial u} - \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial f}{\partial\vec{\nabla}u} \right]\delta u + \frac{\partial f}{\partial\dot{u}}\,\delta\dot{u} \right\} \qquad \text{(VII-58)}$$

- En un point $\vec{r}$ donné, on peut considérer comme variations indépendantes soit $\delta u(\vec{r},t)$ et $\delta u(\vec{r},t+dt)$, soit $\delta u(\vec{r},t)$ et $\delta\dot{u}(\vec{r},t)$. Comme L est défini à un instant t donné, il faut considérer dans (VII-58), δu et $\delta\dot{u}$ comme des variations indépendantes au même instant t. On peut ainsi définir 2 derivées fonctionnelles :

$$\begin{cases} \dfrac{\delta L}{\delta u} = \dfrac{\delta L}{\delta u\, d^3r} = \dfrac{\partial f}{\partial u} - \vec{\nabla}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial\vec{\nabla}u} & \text{(VII-59)} \\ \dfrac{\delta L}{\delta\dot{u}} = \dfrac{\delta L}{\delta\dot{u}\, d^3r} = \dfrac{\partial f}{\partial\dot{u}} & \text{(VII-60)} \end{cases}$$

④ Calcul de δS. Dérivée fonctionnelle de S.

- On intègre (VII-58) sur t. On peut alors prendre comme variations indépendantes les $\delta u(\vec{r},t)$ en tout $\vec{r}$ et pour tout t. En intégrant par parties le terme en $\delta\dot{u}$ et en utilisant (VII-53), on obtient

$$\delta S = \int d^3r\, dt \left[\frac{\partial f}{\partial u} - \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial f}{\partial\vec{\nabla}u} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial\dot{u}} \right]\delta u(\vec{r},t) \qquad \text{(VII-61)}$$

- On peut alors définir la dérivée fonctionnelle

$$\frac{\delta S}{\delta u} = \frac{\delta S}{\delta u(\vec{r},t)\, d^3r\, dt} = \frac{\partial f}{\partial u} - \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial f}{\partial\vec{\nabla}u} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial\dot{u}} \qquad \text{(VII-62)}$$