5/2/74

9 _ Moments Multipolaires d'une distribution de charges, de courants et de magnétisation.

But de ce § : Etudier le champ rayonné au loin par des sources caractérisées par leur densité de charges, leurs courants et leur magnétisation, et dont on se donne la dépendance en $\vec{r}$ et en t.

Montrer que ce champ peut être analysé en ondes multipolaires et que l'amplitude de chacune de ces ondes est reliée à un paramètre caractéristique des sources, qu'on appelle un moment multipolaire.

(a) Equations de Maxwell en présence des sources.

(i) Les sources

$\rho(\vec{r},t)$: densité de charges. (Pas de polarisation)

$\vec{J}_c(\vec{r},t)$: courant de conduction.

$\vec{M}(\vec{r},t)$: magnétisation.

Courant total
$$\vec{J}(\vec{r},t) = \vec{J}_c(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\times\vec{M}(\vec{r},t) \qquad \text{(VI-1)}$$

Problème physique en arrière plan : sources associées à un électron décrit par le spineur à 2 composantes $\psi(\vec{r},t)$

$$\begin{cases} \rho(\vec{r},t) = \psi^+(\vec{r},t)\,\psi(\vec{r},t) \\ \vec{J}_c(\vec{r},t) = \frac{q\hbar}{2mi}\left[\psi^+(\vec{\nabla}\psi) - (\vec{\nabla}\psi^+)\psi\right] \\ \vec{M}(\vec{r},t) = \frac{2\mu_B}{\hbar}\,\psi^+(\vec{r},t)\,\vec{S}\,\psi(\vec{r},t) \end{cases} \qquad \text{(VI-2)}$$

(ii) Equations de Maxwell.

- $$\begin{cases} \vec{\nabla}.\vec{B} = 0 & \text{(VI-3-a)} \\ \vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{(VI-3-b)} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \text{(VI-3-c)} \\ c^2\,\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{J} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} & \text{(VI-3-d)} \end{cases}$$

- De (VI-3-b) et (VI-3-d), on déduit l'équation de continuité qui exprime la conservation de la charge
$$\vec{\nabla}.\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \qquad \text{(VI-4)}$$

- Elimination de $\vec{E}$
$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{B} = -\mu_0\,\vec{\nabla}\times\vec{J} \qquad \text{(VI-5)}$$

- Elimination de $\vec{B}$
$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\vec{\nabla}\rho + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{J}\right] \qquad \text{(VI-6)}$$

(iii) Régime sinusoïdal

- On suppose que toutes les sources sont monochromatiques :
$$G(\vec{r},t) = G^{(+)}(\vec{r})\,e^{-i\omega_0 t} + \text{c.c.} \qquad \text{(VI-7)}$$

Si l'on considère les solutions des équations de Maxwell correspondant à un régime forcé, tous les champs ont aussi la même forme. Les équations (VI-5, 6) deviennent :
$$(\Delta + k_0^2)\,\vec{B}^{(+)} = -\mu_0\,\vec{\nabla}\times\vec{J}^{(+)} \qquad \text{(VI-8)}$$
$$(\Delta + k_0^2)\,\vec{E}^{(+)} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\vec{\nabla}\rho^{(+)} - \frac{i\omega_0}{c^2}\vec{J}^{(+)}\right] \qquad \text{(VI-9)}$$

- Remarque : une manière commode d'éliminer les régimes transitoires et de ne conserver que le régime forcé consiste à introduire adiabatiquement les sources en remplaçant ω_0 par $\omega_0 + i\varepsilon$ (ε : infiniment petit)
$$e^{-i\omega_0 t} \rightarrow e^{-i(\omega_0+i\varepsilon)t} = e^{-i\omega_0 t}\,e^{\varepsilon t} \qquad \text{(VI-10)}$$
Le facteur de branchement $e^{\varepsilon t}$, nul pour $t=-\infty$, croît lentement vers 1 pour $t=0$. Si l'on part d'un champ nul pour $t < -\frac{1}{\varepsilon}$, on aboutit à $t=0$ au régime forcé.

(iv) Transformée de Fourier

$$\vec{G}^{(+)}(\vec{r}) \longleftrightarrow \vec{\mathcal{G}}^{(+)}(\vec{k}) \qquad (VI-11)$$

(Pour simplifier les notations, on n'écrit plus le $^{(+)}$). (VI-8, 9) deviennent :

$$(k_0^2 - k^2)\,\vec{\mathcal{B}} = -i\mu_0\,\vec{k}\times\vec{\mathcal{J}} \qquad (VI-12)$$

$$(k_0^2 - k^2)\,\vec{\mathcal{E}} = \frac{i}{\varepsilon_0}\left[\vec{k}\rho - \frac{k_0}{c}\vec{\mathcal{J}}\right] \qquad (VI-13)$$

Quant à l'équation de continuité (VI-4), elle devient :

$$\vec{k}.\vec{\mathcal{J}} - \omega_0\rho = 0 \qquad (VI-14)$$

(v) Parties longitudinale et transversale des termes sources.

– Soit $\vec{\mathcal{S}}(\vec{k})$ le terme au 2ème membre (terme source) de l'équation (VI-12) donnant $\vec{\mathcal{B}}$.

$$\vec{\mathcal{S}}(\vec{k}) = -i\mu_0\,\vec{k}\times\vec{\mathcal{J}}(\vec{k}) \qquad (VI-15)$$

$\vec{\mathcal{S}}(\vec{k})$ est transverse ($\perp$ à $\vec{k}$). Ceci est normal puisque $\vec{\mathcal{B}}$ est toujours transverse.

– Soit $\vec{\mathcal{C}}(\vec{k})$ le terme analogue pour $\vec{\mathcal{E}}$ (cf équation VI-13).

$$\vec{\mathcal{C}}(\vec{k}) = \frac{i}{\varepsilon_0}\left[\vec{k}\rho(\vec{k}) - \frac{k_0}{c}\vec{\mathcal{J}}(\vec{k})\right] \qquad (VI-16)$$

On peut séparer les parties longitudinale $\vec{\mathcal{C}}_{/\!/}$ et transversale $\vec{\mathcal{C}}_\perp$ de $\vec{\mathcal{C}}$:

$$\vec{\mathcal{C}} = \underbrace{\frac{\vec{k}}{k^2}\,\vec{k}.\vec{\mathcal{C}}}_{\vec{\mathcal{C}}_{/\!/}} + \underbrace{\frac{\vec{k}}{k^2}\times(\vec{\mathcal{C}}\times\vec{k})}_{\vec{\mathcal{C}}_\perp} \qquad (VI-17)$$

– D'après (VI-16), on trouve compte tenu de (VI-14) :

$$\vec{\mathcal{C}}_{/\!/} = \frac{i}{\varepsilon_0}(k^2 - k_0^2)\frac{\rho}{k}\,\vec{n} \qquad (VI-18)$$

ce qui reporté dans (VI-13) donne pour $\vec{\mathcal{E}}_{/\!/}$

$$\vec{\mathcal{E}}_{/\!/} = -\frac{i}{\varepsilon_0}\frac{\rho}{k}\,\vec{n} \qquad (VI-19)$$

équation que l'on aurait pu obtenir directement en prenant la T.F. de $\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

En repassant dans l'espace des $\vec{r}$, on trouve que $\vec{E}_{/\!/}(\vec{r})$ varie en $\frac{1}{r^2}$ pour r grand et est donc négligeable devant la partie transverse qui varie en $\frac{1}{r}$.

– On trouve de même pour $\vec{\mathcal{C}}_\perp$

$$\vec{\mathcal{C}}_\perp = -c\frac{k_0}{k}\,\vec{n}\times\vec{\mathcal{S}} \qquad (VI-20)$$

Au facteur $c\frac{k_0}{k}$ près, $\vec{\mathcal{C}}_\perp$ se déduit de $\vec{\mathcal{S}}$ par une rotation de $-\frac{\pi}{2}$ autour de $\vec{n}$. Nous nous contenterons donc d'étudier le champ $\vec{\mathcal{B}}$

(b) Développement des sources et des champs en états de moment cinétique et de parité bien définis.

– $\vec{\mathcal{S}}$ et $\vec{\mathcal{B}}$ étant transverses, on peut, pour chaque valeur de k, les développer sur la base $\{\vec{X}_{JM}(\vec{n}), \vec{Z}_{JM}(\vec{n})\}$:

$$\vec{\mathcal{S}}(\vec{k}) = \sum_J\sum_M\left[\mathcal{S}^e_{JM}(k)\,\vec{X}_{JM}(\vec{n}) + \mathcal{S}^m_{JM}(k)\,\vec{Z}_{JM}(\vec{n})\right] \qquad (VI-21)$$

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{k}) = \sum_J\sum_M\left[\mathcal{B}^e_{JM}(k)\,\vec{X}_{JM}(\vec{n}) + \mathcal{B}^m_{JM}(k)\,\vec{Z}_{JM}(\vec{n})\right] \qquad (VI-22)$$

avec

$$\mathcal{S}^e_{JM}(k) = \int d\Omega_k\,\vec{X}^*_{JM}(\vec{n}).\vec{\mathcal{S}}(\vec{k}) \qquad (VI-23)$$

$$\mathcal{S}^m_{JM}(k) = \int d\Omega_k\,\vec{Z}^*_{JM}(\vec{n}).\vec{\mathcal{S}}(\vec{k}) \qquad (VI-24)$$

– Reportons les développements (VI-21) et (VI-22) dans (VI-12). Il vient (en se rappelant qu'il faut remplacer k_0 par $k_0 + i\varepsilon$) :

$$\mathcal{B}^{e}_{JM}(k) = \frac{\mathcal{S}^{e}_{JM}(k)}{(k_0+i\varepsilon)^2 - k^2} \qquad \text{(VI-25)}$$

$$\mathcal{B}^{m}_{JM}(k) = \frac{\mathcal{S}^{m}_{JM}(k)}{(k_0+i\varepsilon)^2 - k^2} \qquad \text{(VI-26)}$$

© Comportement asymptotique des champs $\vec{B}(\vec{r})$ et $\vec{E}(\vec{r})$ pour r grand.

– Calculons la contribution à $\vec{B}(\vec{r})$ du terme $\mathcal{B}^{e}_{JM}(k)\,\vec{X}_{JM}(\vec{n})$ du développement (VI-22) lorsqu'on repasse dans l'espace des $\vec{r}$.

$$e^{-i\omega_0 t}\int d^3k\; \mathcal{B}^{e}_{JM}(k)\,\vec{X}_{JM}(\vec{n})\,e^{i\vec{k}.\vec{r}} \quad + \text{c.c.} \qquad \text{(VI-27)}$$

Séparons intégration angulaire et radiale en utilisant (VI-25)

$$e^{-i\omega_0 t}\int k^2 dk\;\frac{\mathcal{S}^{e}_{JM}(k)}{(k_0+i\varepsilon)^2 - k^2}\int d\Omega_k\; e^{i\vec{k}.\vec{r}}\;\vec{X}_{JM}(\vec{n}) \quad + \text{c.c.} \qquad \text{(VI-28)}$$

D'après (IV-14), la dernière intégrale vaut $4\pi (i)^J j_J(kr)\,\vec{X}_{JM}(\vec{\rho})$. On a donc :

$$4\pi (i)^J \underbrace{e^{-i\omega_0 t}}_{\substack{\text{Dépendance}\\ \text{temporelle}}}\;\underbrace{\vec{X}_{JM}(\vec{\rho})}_{\substack{\text{Dépendance}\\ \text{angulaire}}}\;\underbrace{\int_0^\infty k^2 dk\;\frac{j_J(kr)\,\mathcal{S}^{e}_{JM}(k)}{(k_0+i\varepsilon)^2 - k^2}}_{\text{Dépendance radiale}} \quad + \text{c.c.} \qquad \text{(VI-29)}$$

– Dépendance radiale pour r grand

$$j_J(kr) \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{1}{kr}\sin\left(kr - J\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2ikr}\left[e^{i(kr - J\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr - J\frac{\pi}{2})}\right] \qquad \text{(VI-30)}$$

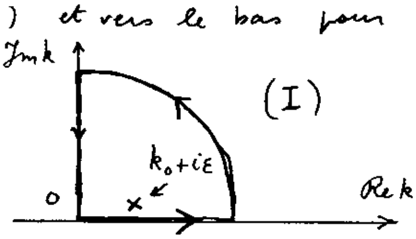
Reportons (VI-30) dans l'intégrale en k de (VI-29). Il vient :

$$\frac{1}{2ir}\left[\underbrace{\int_0^\infty k\,dk\;\mathcal{S}^{e}_{JM}(k)\,\frac{e^{i(kr - J\frac{\pi}{2})}}{(k_0+i\varepsilon)^2 - k^2}}_{\text{I}} - \underbrace{\int_0^\infty k\,dk\;\mathcal{S}^{e}_{JM}(k)\,\frac{e^{-i(kr - J\frac{\pi}{2})}}{(k_0+i\varepsilon)^2 - k^2}}_{\text{II}}\right] \qquad \text{(VI-31)}$$

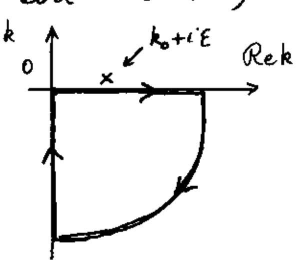
– Evaluation des intégrales I et II par la méthode des résidus (on suppose $\mathcal{S}^{e}_{JM}(k)$ suffisamment régulière).

$$e^{\pm ikr} = e^{\pm i(\mathcal{R}e\,k)r}\;e^{\mp(\mathcal{I}m\,k)r} \qquad \text{(VI-32)}$$

Comme $r > 0$, il faut fermer le contour vers le haut pour I ($-\mathcal{I}m\,k$ doit être <0) et vers le bas pour II ($\mathcal{I}m\,k$ doit être <0)



(I)



(II)

– Contribution du 1/4 de cercle : zéro dans les 2 cas

– Contribution du pole en $k_0 + i\varepsilon$

pour (I) : $\dfrac{i}{4\pi}\,\mathcal{S}^{e}_{JM}(k_0)\;e^{i(k_0 r - J\frac{\pi}{2})}$ (VI-33)

pour (II) : 0 (car le 2ème contour n'enferme pas le pole)

On voit ainsi que le fait de remplacer ω_0 par $\omega_0 + i\varepsilon$ (établissement adiabatique des sources) revient à supprimer toute onde entrante dans la solution asymptotique.

— Contribution du chemin vertical (ordre de grandeur). On pose $y = \Im m\, k$.

$$\sim \int_0^\infty y\, dy\, \mathcal{S}^e_{JM}(0)\, \frac{e^{-yr}}{k_0^2} = \frac{\mathcal{S}^e_{JM}(0)}{k_0^2 r^2} \int_0^\infty e^{-u}\, u\, du \qquad \text{(VI-34)}$$

Pour $k_0 r \gg 1$, contribution négligeable devant celle du pôle.

Conclusions

— Pour $k_0 r \gg 1$, la contribution du terme $\mathcal{B}^e_{JM}(k)\, \vec{X}_{JM}(\vec{n})$ au champ $\vec{B}(\vec{r},t)$ de l'onde créée par les source s'écrit donc :

$$\frac{1}{2r}\, e^{i(k_0 r - \omega_0 t)}\, \vec{X}_{JM}(\vec{\rho})\, \mathcal{S}^e_{JM}(k_0) + \text{c.c.} \qquad \text{(VI-35)}$$

On reconnait le champ magnétique d'une onde multipolaire électrique libre sortante, d'amplitude $\mathcal{S}^e_{JM}(k_0)$.

— Un calcul analogue pour $\mathcal{B}^m_{JM}(k)\, \vec{Z}_{JM}(\vec{n})$ conduit au champ magnétique d'une onde multipolaire magnétique libre sortante d'amplitude $\mathcal{S}^m_{JM}(k_0)$

$$\frac{1}{2r}\, e^{i(k_0 r - \omega_0 t)}\, \vec{Z}_{JM}(\vec{\rho})\, \mathcal{S}^m_{JM}(k_0) + \text{c.c.} \qquad \text{(VI-36)}$$

— Calculs analogues sur les équations donnant $\vec{E}$. On trouve les champs électriques correspondant à (VI-35) et (VI-36). (On utilise (VI-20) avec $k = k_0$).

— On voit ainsi que les sources rayonnent au loin une série d'ondes multipolaires électriques et magnétiques, ~~le coeffic~~ l'amplitude de chacune de ces ondes étant $\mathcal{S}^e_{JM}(k_0)$ et $\mathcal{S}^m_{JM}(k_0)$. Ces coefficients, caractéristiques des sources, et indiquant leur aptitude à rayonner des ondes multipolaires électriques et magnétiques, sont appelés respectivement "moments multipolaires électriques et magnétiques" de ces sources.

(d) Moments multipolaires électriques

(i) Première expression en fonction de $\vec{J}(\vec{r},t)$

On peut écrire :

$$\mathcal{S}^e_{JM}(k_0) = \int dk\ \delta(k-k_0)\, \mathcal{S}^e_{JM}(k) \qquad \text{(VI-37)}$$

c-à-d d'après (VI-23) et (VI-15) :

$$\mathcal{S}^e_{JM}(k_0) = -\frac{\mu_0}{k_0^2} \int d^3k\ \delta(k-k_0)\, \vec{X}^*_{JM}(\vec{n}) \cdot (i\vec{k} \times \vec{\mathcal{J}}) \qquad \text{(VI-38)}$$

L'intégrale peut être considérée comme le produit scalaire dans l'espace des $\vec{k}$ de $\delta(k-k_0)\, \vec{X}_{JM}(\vec{n})$ par $i\vec{k} \times \vec{J}$. En utilisant l'égalité de Parseval-Plancherel et l'équation (IV-14), on obtient :

$$\mathcal{S}^e_{JM}(k_0) = -\frac{\mu_0}{2\pi^2}\, (i)^J \int d^3r\ j_J(k_0 r)\, \vec{X}^*_{JM}(\vec{\rho}) \cdot \vec{\nabla} \times \vec{J}^{(+)}(\vec{r}) \qquad \text{(VI-39)}$$

(ii) Autre expression équivalente.

On peut, en utilisant les propriétés du produit mixte, réécrire (VI-38) sous la forme :

$$\mathcal{S}^e_{JM}(k_0) = -\frac{\mu_0}{k_0^2} \int d^3k\ \delta(k-k_0)\, \underbrace{\left(\vec{X}^*_{JM}(\vec{n}) \times i\vec{k}\right)}_{= -k\, \vec{Z}^*_{JM}(\vec{n}) \text{ d'après (III-47)}} \cdot \vec{\mathcal{J}} \qquad \text{(VI-40)}$$

ce qui donne :

$$\mathcal{S}^e_{JM}(k_0) = \frac{\mu_0}{k_0} \int d^3k\ \delta(k-k_0)\, \vec{Z}^*_{JM}(\vec{n}) \cdot \vec{\mathcal{J}} \qquad \text{(VI-41)}$$

(iii) Limite des grandes longueurs d'onde (grandes devant les dimensions des sources)

On peut toujours ajouter à (VI-41) la quantité :

$$\frac{\mu_0}{k_0}\int d^3k\ \delta(k-k_0)\ C\ Y_J^{M*}(\vec{n})\frac{1}{k_0}(\vec{k}.\vec{\mathcal{J}}-\omega_0\rho) \qquad (VI-42)$$

qui est nulle d'après VI-14 (C est une constante arbitraire). On obtient alors

$$\mathcal{S}^e_{JM}(k_0)=\frac{\mu_0}{k_0}\int d^3k\ \delta(k-k_0)\left\{\left[\vec{Z}^*_{JM}(\vec{n})+C\vec{N}^*_{JM}(\vec{n})\right].\vec{\mathcal{J}}-cC\ Y_J^{M*}(\vec{n})\ \rho(\vec{k})\right\} \qquad (VI-43)$$

Choisissons C de manière que le terme en $j_{J-1}(k_0r)$ auquel donne naissance la transformée de Fourier de $\vec{Z}^*+C\vec{N}^*$ soit nul. Lorsqu'on passe dans l'espace des $\vec{r}$, le terme en $\vec{\rho}(\vec{r})$ est prépondérant devant celui en $\vec{J}(\vec{r})$ [Il varie en $(k_0r)^J$ alors que le second varie en $(k_0r)^{J+1}$]. On trouve alors que

$$\mathcal{S}^e_{JM}(k_0) \text{ proportionnel à } \int d^3r\ \rho^{(+)}(\vec{r})\ r^J\ Y_J^{*M}(\vec{\rho}) \qquad (VI-44)$$

On retrouve bien l'expression du moment multipolaire électrique d'une distribution de charges statique.

(e) Moments multipolaires magnétiques.

(i) Expression en fonction de $\vec{J}(\vec{r},t)$

- $$\begin{aligned}\mathcal{S}^m_{JM}(k_0) &= \int dk_0\ \delta(k-k_0)\ \mathcal{S}^m_{JM}(k)\\ &= -\frac{\mu_0}{k_0^2}\int d^3k\ \delta(k-k_0)\ \vec{Z}^*_{JM}(\vec{n}).\ i\vec{k}\times\vec{\mathcal{J}}\\ &= +\frac{\mu_0}{k_0^2}\int d^3k\ \delta(k-k_0)\left[i\vec{k}\times\vec{Z}^*_{JM}(\vec{n})\right].\vec{\mathcal{J}}\\ &= \frac{\mu_0}{k_0}\int d^3k\ \delta(k-k_0)\ \vec{X}^*_{JM}(\vec{n}).\vec{\mathcal{J}}\end{aligned} \qquad (VI-45)$$

On a utilisé (VI-24), les propriétés du produit mixte, et (III-47).

- En utilisant l'égalité de Parseval-Plancherel et l'équation IV-14, on obtient :

$$\mathcal{S}^m_{JM}(k_0)=\frac{\mu_0k_0}{2\pi^2}(i)^J\int d^3r\ j_J(k_0r)\ \vec{X}^*_{JM}(\vec{\rho}).\vec{J}^{(+)}(\vec{r}) \qquad (VI-46)$$

Or, d'après (III-37),

$$\vec{X}^*_{JM}(\vec{\rho})=\frac{i\hbar}{\hbar\sqrt{J(J+1)}}\left(\vec{r}\times\vec{\nabla}Y_J^{*M}(\vec{\rho})\right) \qquad (VI-47)$$

En reportant dans (VI-46) et en utilisant les propriétés du produit mixte :

$$\mathcal{S}^m_{JM}(k_0)=-\frac{\mu_0k_0}{2\pi^2}\frac{(i)^{J+1}}{\sqrt{J(J+1)}}\int\left(\vec{\nabla}Y_J^{M*}(\vec{\rho})\right).\left(\vec{r}\times\vec{J}^{(+)}\right)j_J(k_0r)\,d^3r \qquad (VI-48)$$

Par ailleurs :

$$j_J(k_0r)\left[\vec{\nabla}Y_J^{M*}(\vec{\rho})\right]=\vec{\nabla}\left[j_J(k_0r)\ Y_J^{M*}(\vec{\rho})\right]-Y_J^{*M}(\vec{\rho})\ \vec{\nabla}j_J(k_0r) \qquad (VI-49)$$

En reportant dans (VI-48), et en remarquant que $\vec{\nabla}j_J(k_0r)$, qui est // à $\vec{\rho}$, a un produit scalaire nul avec $\vec{r}\times\vec{J}^{(+)}$, on obtient finalement :

$$\mathcal{S}^m_{JM}(k_0)=-\frac{\mu_0k_0}{2\pi^2}\frac{(i)^{J+1}}{\sqrt{J(J+1)}}\int d^3r\left[\vec{\nabla}\ j_J(k_0r)\ Y_J^{M*}(\vec{\rho})\right].\left[\vec{r}\times\vec{J}^{(+)}(\vec{r})\right] \qquad (VI-50)$$

(ii) Limite des grandes longueurs d'onde.

$$\mathcal{S}^m_{JM}(k_0)\ \sim\ \int d^3r\left[\vec{\nabla}\ r^J\ Y_J^{M*}(\vec{\rho})\right].\left[\vec{r}\times\vec{J}^{(+)}(\vec{r})\right] \qquad (VI-51)$$

Cas particulier J = 1 (Moment dipolaire magnétique). On reconnait les composantes sphériques de

$$\int d^3r\ \vec{r}\times\vec{J}^{(+)}(\vec{r})=\int d^3r\ \vec{r}\times J_c^{(+)}(\vec{r})+\int d^3r\ \vec{r}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{M}^{(+)}(\vec{r})\right) \qquad (VI-52)$$