29/1/74

8 - Potentiels

But de ce § :

Introduire les potentiels vecteur et scalaire $\{\vec{A}(\vec{r},t), U(\vec{r},t)\}$ dont dérivent les champs $\{\vec{E}(\vec{r},t), \vec{B}(\vec{r},t)\}$ du rayonnement libre. Problème de la jauge.

Trouver un ensemble de potentiels vecteur et scalaire correspondant à divers types de photons définis par leur impulsion et leur polarisation, ou leur énergie leur moment cinétique et leur parité.

ⓐ Définitions

- Comme $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$, on peut trouver $\vec{A}(\vec{r},t)$ tel que :

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r},t)} \qquad (V-1)$$

- $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$ devient grâce à (V-1) : $\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$. On peut alors trouver une fonction scalaire $U(\vec{r},t)$ telle que : $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} U$. Donc

$$\boxed{E(\vec{r},t) = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t} - \vec{\nabla} U(\vec{r},t)} \qquad (V-2)$$

- Si l'on porte (V-1) et (V-2) dans les 2 autres équations de Maxwell, on obtient les équations du mouvement de $\vec{A}$ et U qui s'écrivent :

$$\begin{cases} \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}\right) & (V-3) \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) U = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}.\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}\right) & (V-4) \end{cases}$$

Remarque : En présence de sources, les équations de Maxwell $\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$ et $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ qui permettent d'écrire (V-1) et (V-2) demeurent inchangées, de sorte que (V-1) et (V-2) restent valables. Par contre, (V-3) et (V-4) changent.

- Intérêt des potentiels.
  - $\{\vec{A}, \frac{U}{c}\}$ sont les 4 composantes d'un quadrivecteur relativiste A^μ
  - Contracté avec le quadrivecteur courant J^μ $\{\vec{J}, c\rho\}$ A^μ donne le scalaire $A^\mu J_\mu = \vec{A}.\vec{J} - \rho U$ qui intervient dans le Lagrangien et l'hamiltonien du système global : champ + sources.
  - Ce sont les potentiels et non les champs qui apparaissent dans l'équation de Schrödinger.

ⓑ Jauges

- Un ensemble $\{\vec{A}, U\}$ définit une "jauge".
- Le même champ $\{\vec{E}, \vec{B}\}$ peut être décrit par plusieurs potentiels $\{\vec{A}, U\}$. Donc, existence de jauges équivalentes.
- Passage d'une jauge à une jauge équivalente : changement de jauge
- Formules de changement de jauge

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla}\chi(\vec{r},t) \\ U' &= U - \frac{\partial}{\partial t}\chi(\vec{r},t) \end{aligned}} \qquad (V-5)$$

où $\chi(\vec{r},t)$ fonction scalaire quelconque de $\vec{r}$ et t.

On peut aisément montrer les 2 points suivants :

(i) les 2 jauges $\{\vec{A}, U\}$ et $\{\vec{A}', U'\}$ reliées par (V-5) sont équivalentes

(ii) Etant données 2 jauges équivalentes, on peut tjs trouver une fonction $\chi(\vec{r},t)$ qui les relie comme en (V-5).

- Problème de l'invariance de jauge.

ⓒ Choix d'une première jauge pour décrire le rayonnement libre.

- Considérons les potentiels $\vec{A}$ et U donnés par les développements :

$$\begin{cases} \vec{A}(\vec{r},t) = -\sigma \int d^3k \ \dfrac{i\sqrt{k}}{\omega} \ \vec{\alpha}(\vec{k}) \ e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} + \text{c.c.} & \text{(V-6-a)} \\ U(\vec{r},t) = 0 & \text{(V-6-b)} \end{cases}$$

(Mêmes notations que dans le § 7-a-i)

- On vérifie aisément que les développements de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ obtenus en appliquant les formule (V-2) et (V-1) à (V-6-a) et (V-6-b) coïncident avec le développement donnés plus haut (voir formules IV-1 et IV-2). Nous avons donc trouvé une première jauge possible.

- Comme $\vec{k}.\vec{\alpha}(\vec{k}) = 0$, cette jauge vérifie

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = 0 \qquad \text{(V-7)}$$

on dit qu'elle est transversale. Comme $U = 0$, on peut dire aussi qu'elle satisfait à la "condition de Lorentz" :

$$\vec{\nabla}.\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \qquad \text{(V-8)}$$

La condition de Lorentz permet de simplifier les équations du mouvement (V-3) et (V-4) qui deviennent :

$$\begin{cases} \left(\Delta - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = 0 \\ \left(\Delta - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)U = 0 \end{cases} \qquad \text{(V-9)}$$

- On peut simplifier légèrement (V-6-a) en posant

$$\vec{a}(\vec{k}) = -i\,\vec{\alpha}(\vec{k}) \qquad \text{(V-10)}$$

(La fonction d'onde $\vec{\alpha}(\vec{k})$ du photon peut toujours être multipliée par un facteur de phase global sans conséquences physiques). (V-6-a) s'écrit alors

$$\begin{cases} \vec{A}(\vec{r},t) = \int d^3k \sqrt{\dfrac{\hbar}{2\varepsilon_0\,\omega\,(2\pi)^3}} \ \vec{a}(\vec{k}) \ e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} + \text{c.c.} & \text{(V-11)} \\ \vec{U}(\vec{r},t) = 0 \end{cases}$$

(On a utilisé l'expression IV-3 de σ)

ⓓ Changements de jauge conservant pour $\vec{A}$ et U une structure de développement en ondes planes progressives de vitesse c

(i) Détermination de $\chi(\vec{r},t)$

A partir de la jauge (V-11) et d'une fonction $\chi(\vec{r},t)$ quelconque on peut, grâce aux formule (V-5), introduire une autre jauge $\{A', U'\}$. Si l'on veut conserver une structure de développement en ondes planes progressives de vitesse c, $\chi(\vec{r},t)$ ne peut pas être quelconque, et doit en fait avoir la même structure. Nous nous restreignons donc aux fonctions $\chi(\vec{r},t)$ de la forme :

$$\chi(\vec{r},t) = \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\ \chi(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} + c.c. \qquad (V\text{-}12)$$

où $\chi(\vec{k})$ est quelconque. On a alors :

$$\begin{cases} \vec{A}'(\vec{r},t) = \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\ \left[\vec{a}(\vec{k}) + i\vec{k}\,\chi(\vec{k})\right] e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} + c.c. & (V\text{-}13\text{-}a) \\ U'(\vec{r},t) = \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\ \left[\, i\omega\,\chi(\vec{k})\right] e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} + c.c. & (V\text{-}13\text{-}b) \end{cases}$$

Le potentiel scalaire n'est plus nul, et le potentiel vecteur acquiert une partie longitudinale proportionnelle au potentiel scalaire.

Le quadrivecteur potentiel A^μ, $\begin{Bmatrix}\vec{A}\\ U/c\end{Bmatrix}$ est caractérisé dans l'espace des $\vec{k}$ par le quadrivecteur $\begin{Bmatrix}\vec{a}(\vec{k})\\ 0\end{Bmatrix}$. Dans l'espace des $\vec{k}$, le changement de jauge associé à (V-12) correspond donc à la transformation :

$$\begin{Bmatrix}\vec{a}(\vec{k})\\ 0\end{Bmatrix} \longrightarrow \begin{Bmatrix}\vec{a}(\vec{k}) + \vec{n}\, f(\vec{k})\\ f(\vec{k})\end{Bmatrix} \qquad (V\text{-}14)$$

avec $f(\vec{k}) = ik\,\chi(\vec{k})$, $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}$

(ii) <u>Ces changements de jauge conservent la condition de Lorentz</u>.

- Comme $\omega = ck$, la fonction $\chi(\vec{r},t)$ définie en (V-12) satisfait

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi(\vec{r},t) = 0 \qquad (V\text{-}15)$$

Réciproquement tout $\chi(\vec{r},t)$ satisfaisant (V-15) peut être développé comme en (V-12)

- De (V-5), on tire

$$\vec{\nabla}.\vec{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U'}{\partial t^2} = \vec{\nabla}.\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi(\vec{r},t) \qquad (V\text{-}16)$$

De (V-15) et (V-16), on tire que $\{\vec{A}', U'\}$, comme $\{\vec{A}, U\}$, satisfait à la condition de Lorentz

- Nous nous sommes donc limités en fait aux transformations de jauge conservant la condition de Lorentz.

(e) <u>Potentiels correspondant à divers types de photons</u>.

(i) <u>Photon d'impulsion $\hbar\vec{k}_0$ et de polarisation $\vec{\varepsilon}$ données</u>. $(\vec{\varepsilon}.\vec{k}_0 = 0)$

- Quel que soit $f(\vec{k})$, le quadrivecteur

$$\begin{Bmatrix}\vec{\varepsilon}\,\delta(\vec{k}-\vec{k}_0) + \vec{n}\, f(\vec{k})\\ f(\vec{k})\end{Bmatrix} \qquad (V\text{-}17)$$

décrit dans l'espace des $\vec{k}$ le quadrivecteur potentiel associé à un tel photon.

- Nous allons restreindre encore l'arbitraire sur $f(\vec{k})$ en demandant que les parties spatiale et temporelle de (V-17) demeurent des fonctions propres de l'opérateur impulsion. On doit donc avoir

$$f(\vec{k}) = C\,\delta(\vec{k}-\vec{k}_0) \qquad (V\text{-}18)$$

où C est une constante arbitraire (qui contient tout l'arbitraire de jauge).

- Finalement le quadrivecteur qui décrit dans l'espace des $\vec{k}$ les potentiels associés à un photon $\hbar\vec{k}_0$, $\vec{e}$ s'écrit

$$\left\{ \begin{matrix} \vec{e} + C\vec{n} \\ C \end{matrix} \right\} \delta(\vec{k}-\vec{k}_0) \qquad (V-19)$$

(ii) <u>Photon multipolaire électrique JM, d'énergie $\hbar c k_0$.</u>

- D'après (IV-17), il faut prendre pour caractériser les potentiels correspondants le quadrivecteur

$$\left\{ \begin{matrix} \frac{1}{k_0}\delta(k-k_0)\vec{Z}_{JM}(\vec{n}) + \vec{n} f(\vec{k}) \\ f(\vec{k}) \end{matrix} \right\} \qquad (V-20)$$

- Nous restreignons là encore l'arbitraire sur $f(\vec{k})$ en demandant que les parties spatiales et temporelles de (V-20) soient
  - des fonctions propres de l'énergie de valeur propre $\hbar c k_0$
  - " " " " $\vec{J}^2$ et J_z avec les valeurs propres $J(J+1)\hbar^2$ et $M\hbar$
  - " " " de la parité avec la valeur propre $(-1)^J$

On voit alors que $f(\vec{k})$ doit être de la forme

$$f(\vec{k}) = C\frac{1}{k_0}\delta(k-k_0)\, Y_J^M(\vec{n}) \qquad (V-21)$$

où C est une constante arbitraire (Il faut remarquer que, la partie temporelle de V-20 étant scalaire, $\vec{J}$ se réduit pour elle à $\vec{L}$, et V-21 répond bien aux exigences posées plus haut en ce qui concerne cette partie scalaire ; si l'on se rappelle que $\vec{n}\,Y_J^M(\vec{n}) = \vec{N}_{JM}(\vec{n})$ a même parité que $\vec{Z}_{JM}(\vec{n})$ et mêmes nombres quantiques J et M, on voit qu'il en est de même pour la partie vectorielle de V-20).

- Finalement, le quadrivecteur qui décrit dans l'espace des $\vec{k}$ les potentiels associés à un photon k_0, J, M, e s'écrit

$$\frac{1}{k_0}\delta(k-k_0) \left\{ \begin{matrix} \vec{Z}_{JM}(\vec{n}) + C\,\vec{N}_{JM}(\vec{n}) \\ C\,Y_J^M(\vec{n}) \end{matrix} \right\} \qquad (V-22)$$

- L'arbitraire qui subsiste sur C peut être intéressant dans certaines applications.

En effet, lorsqu'on repasse dans l'espace des $\vec{r}$, en portant (V-22) dans (V-13), on voit sur les expressions IV-15 et IV-16 donnant les transformées de Fourier de $\vec{Z}_{JM}(\vec{n})$ et $\vec{N}_{JM}(\vec{n})$ que le potentiel vecteur contiendra des termes en $j_{J+1}(k_0 r)$ et $j_{J-1}(k_0 r)$ alors que le potentiel scalaire ne contiendra que des termes en $j_J(k_0 r)$.

Considérons alors un atome placé à l'origine des coordonnées et interagissant avec un tel champ. Si l'on choisit C de manière que le coefficient de $j_{J-1}(k_0 r)$ s'annule, c-a-d si $C = -\sqrt{\frac{J+1}{J}}$, alors le potentiel scalaire sera d'un ordre plus grand que le potentiel vecteur, et l'atome interagira surtout avec le potentiel scalaire

On peut ainsi passer d'une jauge ($C=0$) où l'atome n'interagit qu'avec le potentiel vecteur à une autre jauge ($C = -\sqrt{\frac{J+1}{J}}$) où l'atome interagit surtout avec un potentiel scalaire.

- (iii) <u>Photon multipolaire magnétique JM, d'énergie $\hbar c k_0$</u>.

- L'équivalent de (V-20) est

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{k_0}\,\delta(k-k_0)\,\vec{X}_{JM}(\vec{n}) + \vec{n}\,f(\vec{k}) \\ f(\vec{k}) \end{Bmatrix} \qquad (V-23)$$

- Il est par contre impossible de trouver pour $f(\vec{k})$ une fonction propre non nulle de $\vec{L}^2$ et L_z de valeurs propres $J(J+1)\hbar^2$ et $M\hbar$ et qui soit de plus de parité $(-1)^{J+1}$. En effet, $Y_J^M(\vec{n})$ est de parité $(-1)^J$. (Ou encore, $\vec{n}\,Y_J^M$ n'a pas la même parité que $\vec{X}_{JM}$).

Donc pour un photon multipolaire magnétique, il n'existe qu'une jauge (restreinte) possible, la jauge transversale

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{k_0}\,\delta(k-k_0)\,\vec{X}_{JM}(\vec{n}) \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (V-24)$$