7 - Ondes multipolaires

But de ce § Remplacer dans les formules donnant le développement de $\vec{E}(\vec{r},t)$ et $\vec{B}(\vec{r},t)$ en ondes planes progressives, $\vec{\alpha}(\vec{k},t)$ par l'expression obtenue plus haut pour la fonction d'onde d'un photon d'énergie, de moment cinétique et de parité bien définis.

Etudier dans l'espace des $\vec{r}$ la structure de l'onde $\vec{E}, \vec{B}$ ainsi obtenue qu'on appelle onde multipolaire.

Etablir les formules qui permettent de passer des ondes planes aux ondes multipolaires.

ⓐ Regroupement des formules importantes.

(i) Développement de $\vec{E}(\vec{r},t)$ et $\vec{B}(\vec{r},t)$ (cf I-16, I-17, I-23)

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = \sigma \int d^3k \sqrt{k}\ \vec{\alpha}(\vec{k})\ e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} + c.c. = \vec{E}^{(+)}(\vec{r},t) + \vec{E}^{(-)}(\vec{r},t) & (IV-1) \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\sigma}{c} \int d^3k \sqrt{k}\ \vec{n}\times\vec{\alpha}(\vec{k})\ e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} + c.c. = \vec{B}^{(+)}(\vec{r},t) + \vec{B}^{(-)}(\vec{r},t) & (IV-2) \end{cases}$$

avec $$\sigma = \sqrt{\frac{\hbar c}{2\varepsilon_0(2\pi)^3}} \qquad \vec{n} = \frac{\vec{k}}{k} \qquad \omega = ck \qquad (IV-3)$$

Nous avons écrit $\vec{\alpha}(\vec{k})\,e^{-i\omega t}$ au lieu de $\vec{\alpha}(\vec{k},t)$, ce qui est possible grâce à (I-15).

(ii) Expression de $\vec{\alpha}(\vec{k})$ pour un photon d'impulsion $\hbar\vec{k}_0$ et de polarisation $\vec{e}$ données.

$$\vec{\alpha}_{\vec{e},\vec{k}_0}(\vec{k}) = \vec{e}\ \delta(\vec{k}-\vec{k}_0) \qquad \text{avec} \qquad \vec{e}.\vec{k}_0 = 0 \qquad (IV-4)$$

ce qui, reporté dans (IV-1,2) donne :

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = \sigma\sqrt{k_0}\ \vec{e}\ e^{i(\vec{k}_0.\vec{r}-\omega_0 t)} + c.c. & (IV-5) \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\sigma}{c}\sqrt{k_0}\ \vec{n}\times\vec{e}\ e^{i(\vec{k}_0.\vec{r}-\omega_0 t)} + c.c. & (IV-6) \end{cases}$$

Onde électromagnétique plane, de polarisation, de vecteur d'onde et de fréquence bien définis

(iii) Expression de $\vec{\alpha}(\vec{k})$ pour un photon d'énergie $\hbar c k_0$, de moment cinétique (J,M), de parité $(-1)^J$

Pour des raisons qui apparaîtront plus loin, un tel photon est dit de type "électrique". L'onde multipolaire associée est dite "multipolaire électrique".

$$\vec{\alpha}_{k_0,J,M,e}(\vec{k}) = \frac{1}{k_0}\ \delta(k-k_0)\ \vec{Z}_{JM}(\vec{n}) \qquad (IV-7)$$

Nous aurons aussi besoin pour (IV-2) de $\vec{n}\times\vec{\alpha}$. D'après (III-47), il vient :

$$\vec{n}\times\vec{\alpha}_{k_0,J,M,e}(\vec{k}) = \frac{i}{k_0}\ \delta(k-k_0)\ \vec{X}_{JM}(\vec{n}) \qquad (IV-8)$$

(iv) Expression de $\vec{\alpha}(\vec{k})$ pour un photon d'énergie $\hbar c k_0$, de moment cinétique (J,M), de parité $(-1)^{J+1}$

Photon de type "magnétique". Onde "multipolaire magnétique".

$$\vec{\alpha}_{k_0,J,M,m}(\vec{k}) = \frac{1}{k_0}\ \delta(k-k_0)\ \vec{X}_{JM}(\vec{n}) \qquad (IV-9)$$

$$\vec{n}\times\vec{\alpha}_{k_0,J,M,m}(\vec{k}) = \frac{i}{k_0}\ \delta(k-k_0)\ \vec{Z}_{JM}(\vec{n}) \qquad (IV-10)$$

(b) Calcul de quelques intégrales

(i) Développement de $e^{i\vec{k}.\vec{r}}$ en harmoniques sphériques (voir par exemple livre de Mécanique Quantique – chapitre sur la diffusion par un potentiel central)

$$e^{i\vec{k}.\vec{r}} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} (i)^{\ell}\, j_{\ell}(kr)\, Y_{\ell}^{m*}(\vec{n})\, Y_{\ell}^{m}(\vec{\rho}) \qquad (IV-11)$$

avec $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}$, $\vec{\rho} = \frac{\vec{r}}{r}$, j_ℓ fonction de Bessel sphérique d'ordre ℓ

$$j_\ell(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^\ell}{(2\ell+1)!!} \qquad j_\ell(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x}\sin\left(x - \ell\frac{\pi}{2}\right) \qquad (IV-12)$$

(ii) Calcul de $\int d\Omega_k\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\, \vec{Y}^{M}_{J,\ell,1}(\vec{n})$

En utilisant (III-8) et (IV-11), cette intégrale s'écrit :

$$4\pi \sum_{\ell'=0}^{\infty} \sum_{m'=-\ell}^{m'=+\ell} \sum_{m}\sum_{\mu} (i)^{\ell'} j_{\ell'}(kr)\, Y_{\ell'}^{m'}(\vec{\rho}) \langle \ell\, 1\, m\mu | J M\rangle \vec{e}_\mu \underbrace{\int d\Omega_k\, Y_{\ell'}^{m'*}(\vec{n}) Y_{\ell}^{m}(\vec{n})}_{\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}}$$

d'où l'on tire

$$\int d\Omega_k\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\, \vec{Y}^{M}_{J,\ell,1}(\vec{n}) = 4\pi (i)^{\ell} j_\ell(kr)\, \vec{Y}^{M}_{J,\ell,1}(\vec{\rho}) \qquad (IV-13)$$

On obtient alors à partir de (III-37), (III,44), (III,32) et (III-48)

$$\int d\Omega_k\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\, \vec{X}_{JM}(\vec{n}) = 4\pi (i)^{J} j_J(kr)\, \vec{X}_{JM}(\vec{\rho}) \qquad (IV-14)$$

$$\begin{aligned}\int d\Omega_k\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\, \vec{Z}_{JM}(\vec{n}) &= 4\pi\left[(i)^{J+1} j_{J+1}(kr)\sqrt{\frac{J}{2J+1}}\,\vec{Y}^{M}_{J,J+1,1}(\vec{\rho}) + (i)^{J-1} j_{J-1}(kr)\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}}\,\vec{Y}^{M}_{J,J-1,1}(\vec{\rho})\right]\\ &= \frac{4\pi}{2J+1}(i)^{J-1}\left\{\left[(J+1)j_{J-1}(kr) - J j_{J+1}(kr)\right]\vec{Z}_{JM}(\vec{\rho}) + \sqrt{J(J+1)}\left[j_{J-1}(kr)+j_{J+1}(kr)\right]\vec{N}_{JM}(\vec{\rho})\right\}\end{aligned} \qquad (IV-15)$$

$$\begin{aligned}\int d\Omega_k\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\, \vec{N}_{JM}(\vec{n}) &= 4\pi\left[-(i)^{J+1} j_{J+1}(kr)\sqrt{\frac{J+1}{2J+1}}\,\vec{Y}^{M}_{J,J+1,1}(\vec{\rho}) + (i)^{J-1} j_{J-1}(kr)\sqrt{\frac{J}{2J+1}}\,\vec{Y}^{M}_{J,J-1,1}(\vec{\rho})\right]\\ &= \frac{4\pi}{2J+1}(i)^{J-1}\left\{\sqrt{J(J+1)}\left[j_{J-1}(kr)+j_{J+1}(kr)\right]\vec{Z}_{JM}(\vec{\rho}) + \left[J j_{J-1}(kr) - (J+1)j_{J+1}(kr)\right]\vec{N}_{JM}(\vec{\rho})\right\}\end{aligned} \qquad (IV-16)$$

(c) Structure d'une onde multipolaire électrique JM.

(i) Calcul de $\vec{E}(\vec{r},t)$ et $\vec{B}(\vec{r},t)$.

Portons (IV-7) et (IV-8) dans (IV-1) et (IV-2) et utilisons (IV-14), (IV-15), On obtient

$$\vec{B}_{k_0,J,M,e}(\vec{r},t) = \underbrace{\frac{\sigma}{c} k_0^{3/2}\, 4\pi (i)^{J+1} j_J(k_0 r)\, \vec{X}_{JM}(\vec{\rho})\, e^{-i\omega_0 t}}_{\vec{B}^{(+)}_{k_0,J,M,e}} + \underbrace{c.c.}_{\vec{B}^{(-)}_{k_0,J,M,e}} \qquad (IV-17)$$

$$\vec{E}_{k_0,J,M,e}(\vec{r},t) = \underbrace{\sigma k_0^{3/2} \frac{4\pi}{2J+1}(i)^{J-1} \left\{\left[(J+1)j_{J-1}(k_0r) - J j_{J+1}(k_0r)\right]\vec{Z}_{JM}(\vec{\rho}) + \sqrt{J(J+1)}\left[j_{J-1}(k_0r) + j_{J+1}(k_0r)\right]\vec{N}_{JM}(\vec{\rho})\right\} e^{-i\omega_0 t}}_{\vec{E}^{(+)}_{k_0,J,M,e}} + c.c. \qquad (IV-18)$$

Remarque

La $4^{ème}$ équation de Maxwell, $\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}$, s'écrit pour les composantes à fréquence positive (parties en $e^{-i\omega t}$) de $\vec{E}_{k_0JMe}$ et $\vec{B}_{k_0JMe}$:

$$\vec{E}^{(+)}_{k_0JMe} = i\,\frac{c^2}{\omega_0}\,\vec{\nabla}\times\vec{B}^{(+)}_{k_0JMe} \qquad (IV-19)$$

L'équation (IV-18) peut donc également s'écrire sous la forme :

$$\vec{E}^{(+)}_{k_0JMe} = -\sigma\sqrt{k_0}\,4\pi(i)^J\,e^{-i\omega_0 t}\,\vec{\nabla}\times j_J(k_0 r)\vec{X}_{JM}(\vec{\rho}) \qquad (IV-20)$$

(Voir par exemple Jackson). Bien qu'apparemment plus compliquée, la forme IV-18 est plus commode pour la discussion physique qui suit.

(ii) Discussion physique.

- $\vec{X}_{JM}(\vec{\rho})$ et $\vec{Z}_{JM}(\vec{\rho})$ sont perpendiculaires à $\vec{\rho}$ alors que $\vec{N}_{JM}(\vec{\rho})$ est parallèle à $\vec{\rho}$ (cf § 6).
  On voit alors sur (IV-17) que dans une onde multipolaire électrique $\vec{B}(\vec{r})$ est perpendiculaire à $\vec{r}$, alors que d'après (IV-18) le champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$ n'est en général ni perpendiculaire ni parallèle à $\vec{r}$.
  (Attention, ne pas confondre avec le fait que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont transverses, c-a-d que leur divergence est nulle, ou encore que dans l'espace de $\vec{k}$ les transformées de Fourier $\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$ et $\vec{\mathcal{B}}(\vec{k})$ sont perpendiculaires à $\vec{k}$).

- Il faut d'ailleurs que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ne soient pas tous 2 perpendiculaires à $\vec{r}$, sinon $\vec{E}\times\vec{B}$ serait $\parallel$ à $\vec{r}$ et le moment cinétique $\varepsilon_0\int d^3r\ \vec{r}\times(\vec{E}\times\vec{B})$ serait nul.

- Pour $k_0 r \ll 1$, on a d'après (IV-12) :

$$j_{J-1}(k_0 r) \gg j_J(k_0 r) \gg j_{J+1}(k_0 r)$$

  Donc, le champ électrique qui contient $j_{J-1}(k_0 r)$ est beaucoup plus grand que le champ magnétique qui ne contient que $j_J(k_0 r)$.
  Un atome placé à l'origine, et dont les dimensions sont en général très petites devant la longueur d'onde $\frac{2\pi}{k_0}$, verra donc surtout un champ électrique lorsqu'on le fait interagir avec une onde multipolaire électrique.

- Pour $k_0 r \gg 1$, on voit d'après (IV-20) que le coefficient de $\vec{N}_{JM}(\vec{\rho})$ dans (IV-18) devient infiniment plus petit que celui de $\vec{Z}_{JM}(\vec{\rho})$. $\vec{E}$ devient alors parallèle à $\vec{Z}_{JM}(\vec{\rho})$ alors que $\vec{B}$ est parallèle à $\vec{X}_{JM}(\vec{\rho})$. Comme $\vec{X}_{JM}(\vec{\rho})$, $\vec{Z}_{JM}(\vec{\rho})$, $\vec{\rho}$ sont perpendiculaires 2 à 2, on retrouve la structure d'une onde plane dont le vecteur d'onde serait parallèle à $\vec{\rho}$.

d) Structure d'une onde multipolaire magnétique JM

En comparant (IV,9) et (IV,10) à (IV-8) et (IV,7), on déduit grâce à (IV,1) et (IV,2)

$$\vec{B}^{(+)}_{k_0JMm} = \frac{i}{c}\,\vec{E}^{(+)}_{k_0JMe} \qquad \vec{E}^{(+)}_{k_0JMm} = -ic\,\vec{B}^{(+)}_{k_0JMe} \qquad (IV-21)$$

La discussion et les résultats du § précédent se généralisent moyennant les substitutions précédentes. En particulier les rôles des champs électrique et magnétique sont échangés.

ⓔ Passage des ondes planes aux ondes multipolaires

(i) Produits scalaires et relations de fermeture

– Soient $|\vec{e},\vec{k}_0>$, $|k_0,J,M\,e>$, $|k_0,J,M,m>$ les kets correspondants aux fonctions d'onde (IV-4), (IV-7) et (IV-9). Les coefficients figurant dans ces 3 formules ont été choisis de manière que l'on ait les relations suivantes

$$\left\{\begin{array}{l} <\vec{e}'\,\vec{k}'_0|\vec{e}\,\vec{k}_0> = \vec{e}'^{*}\cdot\vec{e}\;\delta(\vec{k}'_0-\vec{k}_0) \\ \sum_{\vec{e}}\int d^3k_0\;|\vec{e}\,\vec{k}_0><\vec{e}\,\vec{k}_0| = 1 \end{array}\right. \qquad (IV-22)$$

$$\left\{\begin{array}{l} <k'_0\,J'M'e|k_0\,JMe> = <k'_0\,J'M'm|k_0\,JMm> = \delta(k_0-k'_0)\,\delta_{JJ'}\,\delta_{MM'} \\ <k'_0\,J'M'e\,|k_0\,JMm> = 0 \\ \sum_{J,M}\int dk_0\left[\,|k_0JMe><k_0JMe| + |k_0JMm><k_0JMm|\,\right] = 1 \end{array}\right. \qquad (IV-23)$$

Pour démontrer la formule précédente, il faut utiliser :

$$\delta(\vec{k}_0-\vec{k}'_0) = \frac{1}{k_0^2}\,\delta(k_0-k'_0)\,\frac{1}{\sin\theta_0}\,\delta(\theta_0-\theta'_0)\,\delta(\varphi_0-\varphi'_0) \qquad (IV-24)$$

$\{|\vec{e},\vec{k}_0>\}$ et $\{|k_0,J,M,e>, |k_0,J,M,m>\}$ forment donc 2 bases orthonormées dans l'espace des états (transverses).

– Pour passer d'une base à l'autre, on a besoin des produits scalaires :

$$<k'_0\,JMe\,|\vec{e}\,\vec{k}_0> = \int d^3k\;\vec{\alpha}^{\,*}_{k'_0\,JMe}(\vec{k})\cdot\vec{\alpha}_{\vec{e},\vec{k}_0}(\vec{k}) \qquad (IV-25)$$

En utilisant (IV-4) et (IV-7), on obtient :

$$<k'_0\,JMe|\,\vec{e}\,\vec{k}_0> = \frac{1}{k_0}\,\delta(k_0-k'_0)\;\vec{Z}^{\,*}_{JM}\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)\cdot\vec{e} \qquad (IV-26)$$

et de même

$$<k'_0\,JMm\,|\vec{e}\,\vec{k}_0> = \frac{1}{k_0}\,\delta(k_0-k'_0)\;\vec{X}^{\,*}_{JM}\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)\cdot\vec{e} \qquad (IV-27)$$

(ii) 1ère application : distribution angulaire du rayonnement émis dans une onde multipolaire.

– La probabilité pour qu'un photon multipolaire électrique JM soit trouvé avec son impulsion pointant dans la direction $\vec{k}_0/k_0$ et une polarisation $\vec{e}$ est proportionnelle à $|<\vec{e},\vec{k}_0|k'_0\,JMe>|^2$, c-à-d d'après IV-26 à

$$|\,\vec{e}^{\,*}\cdot\vec{Z}_{JM}\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)|^2 \qquad (IV-28)$$

Si l'on ne mesure pas la polarisation, il faut sommer cette probabilité sur 2 directions perpendiculaires de $\vec{e}$ dans le plan perpendiculaire à $\vec{k}_0$. Comme $\vec{Z}_{JM}\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)$ est perpendiculaire à $\vec{k}_0$, on obtient tout simplement

$$|\vec{Z}_{JM}\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)|^2 \qquad (IV-29)$$

– Le résultat correspondant pour un photon dipolaire magnétique serait

$$|\vec{X}_{JM}\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)|^2 \qquad (IV-30)$$

– Comme d'après (III-47) $\vec{X}_{JM}\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)$ et $\vec{Z}_{JM}\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)$ ont même module, on en déduit qu'une étude du diagramme de rayonnement sans mesure de polarisation ne permet pas de distinguer une onde multipolaire magnétique de l'onde électrique correspondante.

— Comme d'après (III-44) Z_{JM} est proportionnel à $k\vec{\nabla} Y_J^M$ on déduit que $\left|\vec{Z}_{JM}(\frac{\vec{k}_0}{k_0})\right|^2$ est proportionnel à $\left|\frac{\partial Y_J^M(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right|^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left|\frac{\partial Y_J^M(\theta\ \varphi)}{\partial\varphi}\right|^2$

On en tire quantitativement la forme des diagramme de rayonnement. En particulier, on voit qu'il ne dépend pas de φ et qu'il est pair.

— Les mêmes résultats pourraient être obtenus à partir de l'étude de la forme asymptotique de (IV-18).

(iii) <u>2ème application : développement d'une onde plane polarisée en ondes multipolaires ou en harmoniques sphériques vectorielle.</u>

— D'après la relation de fermeture (IV-23), on peut écrire :

$$|\vec{e},\vec{k}_0\rangle = \sum_{JM}\int dk'_0\left[|k'_0,J,M,e\rangle\langle k'_0,J,M,e|\vec{e},\vec{k}_0\rangle + |k'_0,J,M,m\rangle\langle k'_0,J,M,m|\vec{e},\vec{k}_0\rangle\right] \quad (IV-31)$$

c-à-d en utilisant (IV-26), (IV-27) et en remplaçant les kets par les fonctions d'onde associées

$$\vec{e}\,\delta(\vec{k}-\vec{k}_0) = \frac{1}{k_0^2}\,\delta(k-k_0)\sum_{JM}\left[\left(\vec{Z}^*_{JM}(\frac{\vec{k}_0}{k_0})\cdot\vec{e}\right)\vec{Z}_{JM}(\frac{\vec{k}}{k}) + \left(\vec{X}^*_{JM}(\frac{\vec{k}_0}{k_0})\cdot\vec{e}\right)\vec{X}_{JM}(\frac{\vec{k}}{k})\right] \quad (IV-32)$$

Comme $\vec{e}\cdot\vec{k}_0 = 0$, on a $\vec{N}^*_{JM}(\frac{\vec{k}_0}{k_0})\cdot\vec{e} = 0$ ($\vec{N}$ est $\parallel$ à $\vec{k}_0$), et on peut rajouter à l'intérieur du crochet $\left(\vec{N}^*_{JM}(\frac{\vec{k}_0}{k_0})\cdot\vec{e}\right)\vec{N}_{JM}(\frac{\vec{k}}{k})$ qui est nul. Mais d'après (III-32) et (III-44), on a

$$\left(\vec{Z}^*_{JM}(\frac{\vec{k}_0}{k_0})\cdot\vec{e}\right)\vec{Z}_{JM}(\frac{\vec{k}}{k}) + \left(\vec{N}^*_{JM}(\frac{\vec{k}_0}{k_0})\cdot\vec{e}\right)\vec{N}_{JM}(\frac{\vec{k}}{k}) = \left(\vec{Y}^{M*}_{J,J+1,1}(\frac{\vec{k}_0}{k_0})\cdot\vec{e}\right)\vec{Y}^M_{J,J+1,1}(\frac{\vec{k}}{k}) + \left(\vec{Y}^{M*}_{J,J-1,1}(\frac{\vec{k}_0}{k_0})\cdot\vec{e}\right)\vec{Y}^M_{J,J-1,1}(\frac{\vec{k}}{k}) \quad (IV-33)$$

de sorte que finalement (IV-32) peut aussi s'écrire (en remarquant que $\vec{X}_{JM} = \vec{Y}^M_{J,J,1}$) :

$$\vec{e}\,\delta(\vec{k}-\vec{k}_0) = \frac{1}{k_0^2}\,\delta(k-k_0)\sum_{J\ell m}\left(\vec{Y}^{M*}_{J\ell 1}(\frac{\vec{k}_0}{k_0})\cdot\vec{e}\right)\vec{Y}^M_{J\ell 1}(\frac{\vec{k}}{k}) \quad (IV-34)$$

(IV-34) est d'ailleurs valable même lorsque $\vec{e}\cdot\vec{k}_0 \neq 0$, car il faut alors bien rajouter ~~le terme en N~~ à l'intérieur du crochet de (IV-32) le terme en N qui n'est pas nul. (IV-32) par contre n'est valable que pour $\vec{e}\cdot\vec{k}_0 = 0$

— Multiplions les 2 membres de (IV-34) par $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ et intégrons sur $\vec{k}$. Il vient grâce à (IV-13)

$$\vec{e}\,e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{r}} = 4\pi\sum_{J\ell M}(i)^\ell j_\ell(k_0 r)\left(\vec{Y}^{M*}_{J\ell 1}(\frac{\vec{k}_0}{k_0})\cdot\vec{e}\right)\vec{Y}^M_{J\ell 1}(\frac{\vec{r}}{r}) \quad (IV-35)$$

formule valable quelles que soient les directions relatives de $\vec{e}$ et $\vec{k}_0$ et qui constitue la généralisation vectorielle de (IV-11)

— Remplaçons dans (IV-1) $\vec{\alpha}(\vec{k})$ par l'un et l'autre des 2 membres de (IV-32). Il vient compte tenu des résultats du § C.

$$\sigma(k_0)^{3/2}\,e^{i(\vec{k}_0\vec{r}-\omega_0 t)}\,\vec{e} = \sum_{JM}\left[\left(\vec{Z}^*_{JM}(\frac{\vec{k}_0}{k_0})\cdot\vec{e}\right)\vec{E}^{(+)}_{k_0,J,M,e}(\vec{r},t) + \left(\vec{X}^*_{JM}(\frac{\vec{k}_0}{k_0})\cdot\vec{e}\right)\vec{E}^{(+)}_{k_0,J,M,m}(\vec{r},t)\right] \quad (IV-36)$$

Développement de l'onde plane en ondes multipolaires (alors que IV-35 est un développement en harmoniques sphériques vectorielles).

– Calcul de $\vec{X}^*_{JM}\left(\frac{\vec{k}_0}{k_0}\right)\cdot\vec{e}$

Prenons l'axe des z le long de $\vec{k}_0$ (direction de propagation de l'onde plane). $\vec{e}$ coïncide alors forcément avec une polarisation circulaire droite ou gauche

$$\vec{e}_\pm = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y) \qquad \text{(IV-37)}$$

ou n'importe quelle combinaison linéaire de $\vec{e}_+$ et $\vec{e}_-$. D'autre part $\frac{\vec{k}_0}{k_0}=\vec{e}_z$

Calculons $\vec{X}^*_{JM}(\vec{e}_z)\cdot\vec{e}_\pm$

D'après (III-37)

$$\hbar\sqrt{J(J+1)}\,\vec{X}_{JM}(\vec{e}_z) = \left(\vec{e}_x L_x + \vec{e}_y L_y + \vec{e}_z L_z\right) Y_J^M(\vec{e}_z) = \qquad \text{(IV-38)}$$

$$-\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\vec{e}_+\sqrt{J(J+1)-M(M-1)}\,Y_J^{M-1}(\vec{e}_z) + \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\vec{e}_-\sqrt{J(J+1)-M(M+1)}\,Y_J^{M+1}(\vec{e}_z) + M\hbar\,\vec{e}_z\,Y_J^M(\vec{e}_z)$$

(on a utilisé $L_\pm = L_x \pm iL_y$ et l'action de $L_\pm, L_z$ sur Y_J^M)

Or $$Y_J^M(\vec{e}_z) = Y_J^M(\theta=\varphi=0) = \delta_{M,0}\sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \qquad \text{(IV-39)}$$

On en tire $$\vec{X}_{JM}(\vec{e}_z) = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_+\,\delta_{M,1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_-\,\delta_{M,-1}\right) \qquad \text{(IV-40)}$$

et par suite
$$\boxed{\vec{X}^*_{JM}(\vec{e}_z)\cdot\vec{e}_\pm = \mp\sqrt{\frac{2J+1}{8\pi}}\;\delta_{M,\pm1}} \qquad \text{(IV-41)}$$

– Calcul de $\vec{Z}^*_{JM}(\vec{e}_z)\cdot\vec{e}_\pm$

D'après (III-47), on a :

$$\vec{Z}^*_{JM}(\vec{e}_z)\cdot\vec{e}_\pm = i\left(\vec{e}_z\times\vec{X}^*_{JM}(\vec{e}_z)\right)\cdot\vec{e}_\pm = i\,\vec{X}^*_{JM}(\vec{e}_z)\cdot\left(\vec{e}_\pm\times\vec{e}_z\right) \qquad \text{(IV-42)}$$

Comme $$\vec{e}_\pm\times\vec{e}_z = \pm i\,\vec{e}_\pm \qquad \text{(IV-43)}$$

il vient
$$\boxed{\vec{Z}^*_{JM}(\vec{e}_z)\cdot\vec{e}_\pm = \sqrt{\frac{2J+1}{8\pi}}\;\delta_{M,\pm1}} \qquad \text{(IV-44)}$$

De (III-41) et (III-42), on déduit que si $\vec{e}=\vec{e}_+$ ($\vec{e}=\vec{e}_-$), dans le developpement (IV-36) seules interviennent les valeurs $M=+1$ ($M=-1$). Donc,

– <u>Conclusion physique</u>.

Une onde plane de polarisation circulaire droite (gauche), se propageant le long de l'axe Oz correspond à des photons dont la projection du moment cinétique le long de Oz est bien définie et vaut $+\hbar$ ($-\hbar$). Par contre, le carré du moment cinétique $\vec{J}^2$ et la parité ne sont pas bien définies

– Remarque

D'après (IV-20) et (IV-21), on peut écrire

$$\begin{cases} \vec{E}^{(+)}_{k_0JMm}(\vec{r},t) = \sigma\,k_0^{3/2}\,4\pi\,(i)^J\,j(k_0r)\,\vec{X}_{JM}(\vec{\rho})\,e^{-i\omega_0 t} \\ \vec{E}^{(+)}_{k_0JMe}(\vec{r},t) = -\frac{1}{k_0}\sigma\,k_0^{3/2}\,4\pi\,(i)^J\,\vec{\nabla}\times j(k_0r)\,\vec{X}_{JM}(\vec{\rho})\,e^{-i\omega_0 t} \end{cases} \qquad \text{(IV-45)}$$

En reportant (IV-45) dans (IV-36) avec $\vec{e}=\vec{e}_+$ et en utilisant (IV-41) et (IV-44) il vient après simplification par $\sigma k_0^{3/2}e^{-i\omega_0 t}$:

$$\vec{e}_\pm\,e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{r}} = \mp\sum_J (i)^J\sqrt{2\pi(2J+1)}\left[j_J(k_0r)\,\vec{X}_{J,\pm1}(\vec{\rho}) \pm \frac{1}{k_0}\vec{\nabla}\times j_J(k_0r)\,\vec{X}_{J,\pm1}(\vec{\rho})\right] \qquad \text{(IV-46)}$$