15/1/74

6 - Fonctions d'onde correspondant à un photon de moment cinétique et de parité bien définis

But de ce § : Etablir dans l'espace des $\vec{k}$ l'expression des fonctions d'onde d'un photon correspondant à des valeurs propres bien définies de $\vec{J}^2$, J_z, Π (où $\vec{J}$ est le moment cinétique total, Π l'opérateur parité).

Pour cela, commencer par étudier le cas d'une particule quelconque de spin 1 et introduire les "harmoniques sphériques vectorielles" (h.s.v.)

Puis introduire la condition de transversalité, et construire des fonctions propres de $\vec{J}^2$, J_z, Π qui soient de plus transversales.

(a) - Moment cinétique total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ d'une particule de spin 1.

(i) Valeurs propres de $\vec{J}^2$ et J_z $\qquad J(J+1)\hbar^2 \qquad M\hbar$

Comme l entier et $s=1$, J entier : $J = 0, 1, 2, 3 \dots \qquad M = -J, -J+1, \dots +J$

(ii) Vecteurs propres communs à $\vec{L}^2$, $\vec{J}^2$, J_z.

$$|l\,1\,J\,M\rangle = \sum_{m,\mu} \langle l\,1\,m\,\mu\,|\,J\,M\rangle\; |l\,m\rangle\,|1\,\mu\rangle \qquad \begin{cases} J = l-1,\ l,\ l+1 & \text{si } l \neq 0 \\ J = 1 & \text{si } l = 0 \\ M = m + \mu \end{cases} \qquad \text{(III-1)}$$

(iii) Valeur des coefficients de Clebsch-Gordan $\langle l\,1\,m\,\mu\,|\,J\,M\rangle$

$\langle l\,1\,m\,\mu\,|\,J\,M\rangle =$ (III-2)

μ \ J	$l+1$	l	$l-1$
-1	$\sqrt{\frac{(l-M)(l-M+1)}{(2l+1)(2l+2)}}$	$\sqrt{\frac{(l+M+1)(l-M)}{2l(l+1)}}$	$\sqrt{\frac{(l+M)(l+M+1)}{2l(2l+1)}}$
0	$\sqrt{\frac{(l+M+1)(l-M+1)}{(2l+1)(l+1)}}$	$\frac{M}{\sqrt{l(l+1)}}$	$-\sqrt{\frac{(l+M)(l-M)}{l(2l+1)}}$
$+1$	$\sqrt{\frac{(l+M)(l+M+1)}{(2l+1)(2l+2)}}$	$-\sqrt{\frac{(l+M)(l-M+1)}{2l(l+1)}}$	$\sqrt{\frac{(l-M)(l-M+1)}{2l(2l+1)}}$

(b) - Fonctions propres communes à $\vec{L}^2, \vec{J}^2, J_z$: Harmoniques sphériques vectorielles

(i) Fonction d'onde associée à $|l\,m\rangle$ dans l'espace des $\vec{k}$.

$\vec{L}$ n'agit que sur les angles polaires de $\vec{k}$ et non sur $k = |\vec{k}|$

$$\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k} \qquad \langle \vec{n}\,|\,l\,m\rangle = Y_l^m(\vec{n}) = Y_l^m(\theta,\varphi) \qquad \text{(III-3)}$$

$Y_l^m(\vec{n})$: harmonique sphérique $l\,m$ (Base orthonormée pour les fonctions scalaires définies sur la sphère de rayon 1 dans l'espace des $\vec{k}$)

(ii) Composantes de $|\mu\rangle$ dans la base $\{|a\rangle\}$ introduite au § 5a.

$$\begin{cases} |+1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle) \\ |0\rangle = |z\rangle \\ |-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - i|y\rangle) \end{cases} \quad \text{(III-4-a)} \qquad \begin{cases} \vec{e}_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + i\,\vec{e}_y) \\ \vec{e}_0 = \vec{e}_z \\ \vec{e}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - i\,\vec{e}_y) \end{cases} \quad \text{(III-4-b)}$$

Les composantes de $|\mu\rangle$ sur la base $\{|x\rangle, |y\rangle, |z\rangle\}$ sont les mêmes que celles des vecteurs $\vec{e}_\mu$ dans le trièdre $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

$$\langle a\,|\,\mu\rangle = (\vec{e}_\mu)_a \qquad \text{(III-5)}$$

$$\langle \nu | \mu \rangle = \sum_a \langle \nu | a \rangle \langle a | \mu \rangle = \sum_a (\vec{e}_\nu^{\,*})_a (\vec{e}_\mu)_a = \vec{e}_\nu^{\,*} \cdot \vec{e}_\mu \qquad (\text{III}-6)$$

(iii) Harmoniques sphériques vectorielles

- Fonction d'onde associée à $|\ell 1 m \mu\rangle$ dans la base $|\vec{n}, a\rangle$

$$\langle \vec{n}\, a | \ell 1 m \mu \rangle = \langle \vec{n} | \ell m \rangle \langle a | \mu \rangle = Y_\ell^m(\vec{n}) (\vec{e}_\mu)_a \qquad (\text{III}-7)$$

Donc à $|\ell 1 m \mu\rangle$ est associé $Y_\ell^m(\vec{n})\, \vec{e}_\mu$

- Fonction d'onde associée à $|\ell 1 J M\rangle$ dans la base $|\vec{n}, a\rangle$

D'après (III,1) et (III,7)

à $|\ell 1 J M\rangle$ est associé $\sum_{m,\mu} \langle \ell 1 m \mu | J M \rangle Y_\ell^m(\vec{n})\, \vec{e}_\mu$

La fonction d'onde associée à $|\ell 1 J M\rangle$ est donc un champ de vecteurs définis sur la sphère de rayon 1 dans l'espace des $\vec{k}$ (1 vecteur en chaque point de cette sphère). On l'appelle "harmonique sphérique vectorielle" et on la désigne par $\vec{Y}_{J\ell 1}^M(\vec{n})$

$$\boxed{\vec{Y}_{J\ell 1}^M(\vec{n}) = \sum_m \sum_\mu \langle \ell 1 m \mu | J M \rangle Y_\ell^m(\vec{n})\, \vec{e}_\mu} \qquad (\text{III}-8)$$

(Notations de Blatt - Weisskopf - D'autres auteurs comme Akhiezer et Berestetskii ou Edmonds utilisent la notation plus condensée : $\vec{Y}_{J\ell M}(\vec{n})$)

(iv) Relation d'orthonormalisation

De $\langle \ell' 1 J' M' | \ell 1 J M \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{JJ'} \delta_{MM'}$, on déduit grâce à (III-6) :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \; \vec{Y}_{J'\ell' 1}^{M' *}(\theta,\varphi) \cdot \vec{Y}_{J\ell 1}^{M}(\theta,\varphi) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \qquad (\text{III}-9)$$

les h.s.v. forment par ailleurs une <u>base</u> pour les champs vectoriels définis sur la sphère de rayon 1.

(v) Parité

Π : opérateur de reflexion par rapport à l'origine

$$\Pi \vec{Y}_{J\ell 1}^M(\vec{n}) = - \vec{Y}_{J\ell 1}^M(-\vec{n}) \qquad (\text{III}-10)$$

ce signe - apparait car on considère un champ vectoriel et non pseudovectoriel (La fonction d'onde $\vec{\alpha}$ apparait dans le développement du champ électrique $\vec{E}$ qui est polaire)

Comme $Y_\ell^m(-\vec{n}) = (-1)^\ell \, Y_\ell^m(\vec{n}) \qquad (\text{III}-11)$

on a $\Pi \vec{Y}_{J\ell 1}^M(\vec{n}) = (-1)^{\ell+1} \vec{Y}_{J\ell 1}^M(\vec{n}) \qquad (\text{III}-12)$

$$\boxed{\text{Parité de } \vec{Y}_{J\ell 1}^M : (-1)^{\ell+1}} \qquad (\text{III}-13)$$

Finalement,

Pour J donné, différent de 0, il y a

1 h.s.v. de parité $(-1)^{J+1}$: $\vec{Y}_{JJ1}^M$

2 h.s.v. de parité $(-1)^J$: $\vec{Y}_{J,J+1,1}^M$ et $\vec{Y}_{J,J-1,1}^M$

Pour $J=0$, on a

1 h.s.v. paire $\vec{Y}_{011}^0$

(vi) Fonctions propres correspondant à une énergie et un moment cinétique bien définis.

Simples à écrire quand l'énergie ne dépend que de k (comme c'est le cas pour le photon pour qui $E = \hbar c k$)

$$\vec{\varphi}_{E_0,\ell,J,M}(\vec{k}) = \underbrace{\frac{1}{k_0}\delta(k-k_0)}_{\text{Partie radiale}} \underbrace{\vec{Y}^{M}_{J\ell 1}(\theta,\varphi)}_{\text{Partie angulaire et de spin}} \qquad (\text{III}-14)$$

$$\int \underset{k^2 dk\, d\Omega}{\underset{\uparrow}{d^3k}} \; \vec{\varphi}^{\,*}_{E'_0,\ell',J',M'}(\vec{k}) \cdot \vec{\varphi}_{E_0,\ell,J,M}(\vec{k}) = \delta(k_0 - k'_0)\,\delta_{JJ'}\,\delta_{\ell\ell'}\,\delta_{MM'} \qquad (\text{III}-15)$$

(C) Une autre méthode pour obtenir des fonctions propres du moment cinétique total

Pourquoi une autre méthode ? Parce que la précédente n'est pas bien adaptée au problème de la transversalité. Plutot que de chercher des fonctions propres de $\vec{J}^2$ et de J_3 qui soient de plus fonctions propres de $\vec{L}^2$, nous allons leur imposer d'être transversales. La méthode exposée dans ce § C permet d'imposer très simplement cette condition.

(i) Construction d'une fonction d'onde vectorielle à partir d'une fonction d'onde scalaire et d'un opérateur vectoriel $\vec{V}$ définis dans l'espace des $\vec{k}$.

- $\chi(\vec{n})$: fonction d'onde scalaire définie sur la sphère de rayon 1 dans l'espace des $\vec{k}$
- $\{V_x, V_y, V_3\}$: opérateur vectoriel agissant dans l'espace des $\vec{k}$.

Comment exprimer que c'est un opérateur vectoriel ? Relations de commutation bien définies avec $\vec{L}$ (on peut prendre $\vec{L}$ et non $\vec{J}$ car $\vec{V}$ n'agit pas sur les variables de spin) : $[L_x, V_y] = i\hbar V_3$ ....

$$[L_a, V_b] = i\hbar \sum_c \varepsilon_{abc} V_c \qquad (\text{III}-16)$$

- A partir de $\{V_a\}$ et $\chi(\vec{n})$ on introduit la fonction d'onde vectorielle :

$$\vec{V}\chi(\vec{n}) = \sum_a V_a\,\chi(\vec{n})\,\vec{e}_a \qquad (\text{III}-17)$$

Les 3 composantes du vecteur appliqué au point $\vec{n}$ sont $V_x\chi(\vec{n}), V_y\chi(\vec{n}), V_3\chi(\vec{n})$

- Ket correspondant à la fonction d'onde (III-17)

$$|\vec{V}\chi\rangle = \sum_a |V_a\chi\rangle \otimes |a\rangle \qquad (\text{III}-18)$$

(ii) Action de $\vec{J}$ sur la fonction d'onde précédente

$$J_a|\vec{V}\chi\rangle = (L_a + S_a)\sum_b |V_b\chi\rangle\otimes|b\rangle = \sum_b |L_a V_b \chi\rangle \otimes |b\rangle + \sum_b |V_b\chi\rangle \otimes S_a|b\rangle \qquad (\text{III}-18)$$

- D'après (III-16),

$$\sum_b |L_a V_b\chi\rangle\otimes|b\rangle = \sum_b |V_b L_a\chi\rangle\otimes|b\rangle + \sum_{b,c} i\hbar\,\varepsilon_{abc}|V_c\chi\rangle\otimes|b\rangle$$
$$= \sum_b |V_b L_a\chi\rangle\otimes|b\rangle - \sum_{bc} i\hbar\,\varepsilon_{abc}|V_b\chi\rangle\otimes|c\rangle \qquad (\text{III}-19)$$

(Pour le 2ème terme, on a changé dans la sommation $b\to c$, $c\to b$ et utilisé $\varepsilon_{acb} = -\varepsilon_{abc}$)

- D'après (II, 12), § 5

$$\sum_b |V_b\chi\rangle\otimes S_a|b\rangle = \sum_{bc} i\hbar\,\varepsilon_{abc}|V_b\chi\rangle\otimes|c\rangle \qquad (\text{III}-20)$$

– En portant (III-20) et (III-19) dans (III-18), il vient :

$$J_a |\vec{V}\chi> = \sum_b |V_b L_a \chi> \otimes |b> = |\vec{V} L_a \chi> \qquad (III-21)$$

(iii) Théorème

$|\vec{V} Y_\ell^m>$ est, quel que soit $\vec{V}$, ket propre de $\vec{J}^2$ et J_z avec les valeurs propres $\ell(\ell+1)\hbar^2$ et $m\hbar$.

Démonstration

– Remplaçons dans (III-21) χ par Y_ℓ^m

$$J_z |\vec{V} Y_\ell^m> = |\vec{V} L_z Y_\ell^m> = |\vec{V} m\hbar Y_\ell^m> = m\hbar |\vec{V} Y_\ell^m> \qquad (III-22)$$

$|\vec{V} Y_\ell^m>$ est donc bien ket propre de J_z avec la valeur propre $m\hbar$

– En utilisant 2 fois (III-21), il vient

$$J_a^2 |\vec{V}\chi> = J_a J_a |\vec{V}\chi> = J_a |\vec{V} L_a \chi> = |\vec{V} L_a^2 \chi> \qquad (III-23)$$

– Remplaçons dans (III-23) χ par Y_ℓ^m et sommons sur a

$$\vec{J}^2 |\vec{V} Y_\ell^m> = |\vec{V} \vec{L}^2 Y_\ell^m> = \ell(\ell+1)\hbar^2 |\vec{V} Y_\ell^m> \qquad (III-24)$$

$|\vec{V} Y_\ell^m>$ est donc également ket propre de $\vec{J}^2$ avec la valeur propre $\ell(\ell+1)\hbar^2$

Il suffit maintenant de choisir convenablement $\vec{V}$ pour que la fonction d'onde associée à $|\vec{V} Y_\ell^m>$ soit longitudinale ou transversale.

(d) Fonctions propres longitudinales et transversales de $\vec{J}^2$ et J_z.

(i) Premier choix de $\vec{V}$: opérateur multiplication par $\vec{n}$

– Composantes cartésiennes de $\vec{n}$: $\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$, $\cos\theta$

$$\vec{n}\, Y_\ell^m(\vec{n}) = \cos\theta\, Y_\ell^m\, \vec{e}_z + \sin\theta\cos\varphi\, Y_\ell^m \vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\, Y_\ell^m \vec{e}_z \qquad (III-25)$$

– Caractère longitudinal

Evident : le vecteur appliqué au point $\vec{n}$ est parallèle à $\vec{n}$

– Parité

Parité de $\cos\theta\, Y_\ell^m$, $\sin\theta\cos\varphi\, Y_\ell^m$, $\sin\theta\sin\varphi\, Y_\ell^m$: $(-1)^{\ell+1}$

Parité de $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$: -1

Parité de $\vec{n}\, Y_\ell^m$: $(-1)^\ell$

On en déduit d'après (III-13) que :

– $\vec{n}\, Y_\ell^m$ est une combinaison linéaire de $\vec{Y}^m_{\ell,\ell+1,1}$ et $\vec{Y}^m_{\ell,\ell-1,m}$. Si l'on pose

on a : $\boxed{\vec{n}\, Y_\ell^m = \vec{N}_\ell^m}$ (III-26)

$$\vec{N}_\ell^m = a\, \vec{Y}^m_{\ell,\ell+1,1} + b\, \vec{Y}^m_{\ell,\ell-1,1} \qquad (III-27)$$

Pour déterminer a et b, on écrit que les 2 membres de III-27 ont même projection sur un axe, Oz par exemple. Si l'on prend $m=0$ pour simplifier et que l'on utilise (III,8) et (III-25), il vient :

$$\cos\theta\, Y_\ell^0 = a <\ell+1,1,0,0|\ell\, 0>\, Y_{\ell+1}^0 + b <\ell-1,1,0,0|\ell\, 0>\, Y_{\ell-1}^0 \qquad (III-28)$$

Or on a

$$\cos\theta\, Y_\ell^0 = \frac{\ell+1}{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell+3)}}\, Y_{\ell+1}^0 + \frac{\ell}{\sqrt{(2\ell-1)(2\ell+1)}}\, Y_{\ell-1}^0 \qquad (III-29)$$

Par ailleurs, d'après (III-2)

$$<\ell+1,1,0,0|\ell,0> = -\frac{\ell+1}{\sqrt{(\ell+1)(2\ell+3)}} \qquad <\ell-1,1,0,0|\ell,0> = \frac{\ell}{\sqrt{\ell(2\ell-1)}} \qquad (III-30)$$

de sorte que

$$a = -\sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} \qquad b = \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} \qquad (III-31)$$

Finalement $$\boxed{\vec{N}_\ell^m = -\sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}}\ \vec{Y}^m_{\ell,\ell+1,1} + \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}}\ \vec{Y}^m_{\ell,\ell-1,1} = \vec{n}\, Y_\ell^m} \qquad (\text{III}-32)$$

$\vec{N}_\ell^m$ est visiblement <u>normée</u>. <u>Longitudinale</u>. <u>Parité $(-1)^\ell$</u>

(ii) <u>Deuxième choix de $\vec{V}$: opérateur $\vec{L}$</u>

- $$\vec{L}\, Y_\ell^m = (L_x Y_\ell^m)\,\vec{e}_x + (L_y Y_\ell^m)\,\vec{e}_y + (L_z Y_\ell^m)\,\vec{e}_z \qquad (\text{III}-33)$$

- <u>Caractère transversal</u>

  $\frac{\hbar}{i}\vec{k}\times\vec{\nabla} Y_\ell^m$ est visiblement perpendiculaire à $\vec{k}$.

- Parité $\quad L_{x,y,z}\, Y_\ell^m \;:\; (-1)^\ell \qquad \vec{e}_{x,y,z} \;:\; -1$

  Donc parité de $\vec{L}\, Y_\ell^m \;:\; (-1)^{\ell+1}$

  On en déduit d'après (III-13) que :

- $\vec{L}\, Y_\ell^m$ est proportionnel à $\vec{Y}^m_{\ell\ell 1}$ (évident également puisque $\vec{L}\, Y_\ell^m$ est vecteur propre de $\vec{L}^2$)

$$\vec{L}\, Y_\ell^m = c\, \vec{Y}^m_{\ell\ell 1} \qquad (\text{III}-34)$$

Pour déterminer c, on égale les projections sur Oz de (III-34) :

$$m\hbar\, Y_\ell^m = c\, \langle \ell 1 m 0 | \ell m\rangle\, Y_\ell^m \qquad (\text{III}-35)$$

D'après (III,2) : $\quad \langle \ell 1 m 0 | \ell m\rangle = \frac{m}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}$ de sorte que

$$c = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)} \qquad (\text{III}-36)$$

- Finalement, nous poserons :

$$\boxed{\vec{X}_\ell^m = \vec{Y}^m_{\ell,\ell,1} = \frac{\vec{L}\, Y_\ell^m}{\hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}}} \qquad (\text{III}-37)$$

<u>$\vec{X}_\ell^m$ est normée, transversale, de parité $(-1)^{\ell+1}$</u>

(iii) <u>Troisième choix de $\vec{V}$: operateur gradient$/\vec{k}$ ou plus exactement $k\vec{\nabla}$</u>

- $$k\vec{\nabla} Y_\ell^m = k\frac{\partial}{\partial k_x} Y_\ell^m\, \vec{e}_x + k\frac{\partial}{\partial k_y} Y_\ell^m\, \vec{e}_y + k\frac{\partial}{\partial k_z} Y_\ell^m\, \vec{e}_z \qquad (\text{III}-38)$$

- <u>Caractère transversal</u>

  Pour le voir, il suffit de remarquer que la composante radiale de $k\vec{\nabla} Y_\ell^m = k\frac{\partial}{\partial k} Y_\ell^m$ est nulle puisque Y_ℓ^m ne dépend que des angles polaires θ et φ de $\vec{k}$ et non de son module.

- Parité $\quad k\frac{\partial}{\partial k_{x,y,z}} Y_\ell^m \;:\; (-1)^{\ell+1} \qquad \vec{e}_{x,y,z} \;:\; -1$

  Donc parité de $k\vec{\nabla} Y_\ell^m \;:\; (-1)^\ell$

  On en déduit d'après (III-13) que :

- $$k\vec{\nabla} Y_\ell^m = a'\, \vec{Y}^m_{\ell,\ell+1,1} + b'\, \vec{Y}^m_{\ell,\ell-1,1} \qquad (\text{III}-39)$$

Pour déterminer a' et b' on égale les composantes sur Oz des 2 membres et on prend $m=0$

$$k\frac{\partial}{\partial k_z} Y_\ell^0 = \cos\theta\; \underbrace{k\frac{\partial}{\partial k} Y_\ell^0}_{=0} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} Y_\ell^0 \qquad (\text{III}-40)$$

Donc :

$$-\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} Y_\ell^0 = a'\langle \ell+1,1,0,0|\ell 0\rangle\, Y^0_{\ell+1} + b'\langle \ell-1,1,0,0|\ell,0\rangle\, Y^0_{\ell-1} \qquad (\text{III}-41)$$

Or

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} Y_\ell^0 = \frac{\ell(\ell+1)}{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell+3)}}\, Y^0_{\ell+1} - \frac{\ell(\ell-1)}{\sqrt{(2\ell-1)(2\ell+1)}}\, Y^0_{\ell-1} \qquad (\text{III}-42)$$

Si l'on utilise (III-30), il vient :

$$a' = \sqrt{\ell(\ell+1)}\sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}} \qquad b' = \sqrt{\ell(\ell+1)}\sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}} \qquad (\text{III}-43)$$

- Finalement nous poserons

$$\boxed{\vec{Z}_\ell^m = \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}}\,\vec{Y}_{\ell,\ell+1,1}^m + \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}}\,\vec{Y}_{\ell,\ell-1,1}^m = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\,k\vec{\nabla}Y_\ell^m} \qquad (III-44)$$

$\vec{Z}_\ell^m$ est normée, transversale, de parité $(-1)^\ell$

(iv) Relations entre $\vec{N}_\ell^m$, $\vec{X}_\ell^m$, $\vec{Z}_\ell^m$

- Ces 3 fonctions vectorielles sont orthogonales. Evident à partir de leurs définitions (III-32), (III-37), (III-44) et des relations d'orthonormalisation (III-9)

Par exemple
$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\ \vec{Z}_\ell^m(\theta,\varphi)^* \cdot \vec{X}_\ell^m(\theta,\varphi) = 0 \qquad (III-45)$$

- Calculons $\frac{\vec{k}}{k} \times \vec{X}_\ell^m = \vec{n} \times \vec{X}_\ell^m$. Comme $\vec{L} = \frac{\hbar}{i}\vec{k}\times\vec{\nabla}$, il vient d'après (III-37) :

$$\hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}\ \vec{n}\times\vec{X}_\ell^m = \frac{\hbar}{i}\frac{\vec{k}}{k}\times\left(\vec{k}\times\vec{\nabla}Y_\ell^m\right) = \frac{\hbar}{i}\vec{k}\underbrace{\frac{\vec{k}\cdot\vec{\nabla}}{k}Y_\ell^m}_{=0 \text{ car } Y_\ell^m \text{ ne dépend pas de } k} - \frac{\hbar}{i}k\vec{\nabla}Y_\ell^m \qquad (III-46)$$

On en déduit d'après (III-44)

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{Z}_\ell^m &= -i\,\vec{n}\times\vec{X}_\ell^m\\ \vec{X}_\ell^m &= -i\,\vec{n}\times\vec{Z}_\ell^m\end{aligned}} \qquad (III-47)$$

En chaque point de la sphère de rayon 1, $\vec{Z}_\ell^m$ et $\vec{X}_\ell^m$ sont perpendiculaires entre eux et au rayon vecteur $\vec{n}$.

- Inversion des formules (III-32), (III-37), (III-44).

$$\boxed{\left\{\begin{aligned}\vec{Y}_{\ell,\ell,1}^m &= \vec{X}_\ell^m\\ \vec{Y}_{\ell,\ell+1,1}^m &= \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}}\,\vec{Z}_\ell^m - \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}}\,\vec{N}_\ell^m\\ \vec{Y}_{\ell,\ell-1,1}^m &= \sqrt{\frac{\ell+1}{2\ell+1}}\,\vec{Z}_\ell^m + \sqrt{\frac{\ell}{2\ell+1}}\,\vec{N}_\ell^m\end{aligned}\right.} \qquad (III-48)$$

- Remarque : cas particulier $\ell = m = 0$ $\quad Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

Comme $\vec{\nabla}Y_0^0 = \vec{L}Y_0^0 = 0$, on déduit de (III-37) et (III-44) que

$$\vec{X}_0^0 = \vec{Z}_0^0 = 0 \qquad (III-49)$$

Dans le cas $\ell = m = 0$, seule la fonction longitudinale $\vec{N}_0^0 = \frac{\vec{n}}{\sqrt{4\pi}}$ est non nulle (champ radial de symétrie sphérique)

(e) Conclusion.

- Dans le sous espace propre $\{J(J+1)\hbar^2, M\hbar\}$ de $\vec{J}^2$ et J_3, qui est de dimension 3, 2 bases orthonormées possibles :

$$\left\{\vec{Y}_{J,J,1}^M, \vec{Y}_{J,J+1,1}^M, \vec{Y}_{J,J-1,1}^M\right\} \quad \text{ou} \quad \left\{\vec{X}_J^M, \vec{Z}_J^M, \vec{N}_J^M\right\}$$

- Dans le cas du photon, la 2ème base est mieux adaptée. On élimine $\vec{N}_J^M$ à cause de la transversalité. $\vec{X}_J^M$ et $\vec{Z}_J^M$ se différencient par la parité.

Si l'on connait de plus l'énergie, la partie radiale de la fonction d'onde est déterminée : $\delta(k-k_0)$. Donc pour un photon, un ensemble complet d'observables qui commutent est

Energie, $\vec{J}^2$, J_3, Parité

Remarque Le sous espace $J = M = 0$, ne contient d'après (III-49) aucune fonction transversale. Il n'y a donc pas de photon de moment cinétique nul.