5 - Moment cinétique du champ électromagnétique

<u>But de ce §</u> : Montrer que $\vec{J} = \int d^3r \; \varepsilon_0 \, \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B})$ peut être mis sous la forme d'une valeur moyenne quantique, celle de l'opérateur $\vec{L} + \vec{S}$ dans la "fonction d'onde" $\vec{\alpha}(\vec{k})$.

<u>Quelques formules utiles</u> (convention : sommation sur indices répétés)

- Tenseur complètement antisymétrique à 3 dimensions : ε_{abc}

$$\begin{cases} \varepsilon_{xyz} = \varepsilon_{yzx} = \varepsilon_{zxy} = -\varepsilon_{yxz} = -\varepsilon_{xzy} = -\varepsilon_{zyx} = 1 \\ \text{Nul si 2 ou 3 indices égaux} \end{cases} \qquad (\text{II-1})$$

- Produit vectoriel $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ $\qquad C_a = \varepsilon_{abc} A_b B_c$ $\qquad$ (II-2)
- Rotationnel $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ $\qquad B_a = \varepsilon_{abc} \partial_b A_c$ $\qquad$ (II-3)
- Produit contracté $\qquad \varepsilon_{abc}\varepsilon_{cde} = \delta_{ad}\delta_{be} - \delta_{ae}\delta_{bd}$ $\qquad$ (II-4)

a - Rappels de mécanique quantique

Spin 1

- Opérateurs de spin : $S_x, S_y, S_z, S_\pm = S_x \pm i S_y, \vec{S}^2$

$$[S_a, S_b] = i\hbar \, \varepsilon_{abc} S_c \qquad [S_a, \vec{S}^2] = 0 \qquad (\text{II-5})$$

Valeur propre de $\vec{S}^2$: $\quad s(s+1)\hbar^2 = 2\hbar^2 \quad$ car $\quad s = 1$

- Base $\{|\mu>\} = \{|+1>, |0>, |-1>\}$ des états propres de S_z.

Orthonormée : $\quad <\nu|\mu> = \delta_{\mu\nu}$ $\qquad$ (II-6)

Action de S_z, $S_\pm$ $\qquad S_z|\mu> = \mu\hbar|\mu> \qquad S_\pm|\mu> = \hbar\sqrt{2-\mu(\mu\pm1)}\,|\mu\pm1>$ $\qquad$ (II-7)

- Introduction d'une autre base $\{|a>\} = \{|x>, |y>, |z>\}$
(Commode pour les calculs en coordonnées cartésiennes)

Définition : $\quad |x> = \frac{1}{\sqrt2}(|-1> - |+1>) \qquad |y> = \frac{i}{\sqrt2}(|-1> + |+1>) \qquad |z> = |0>$ $\qquad$ (II-8)

Orthonormée : $\quad <a|b> = \delta_{ab}$ $\qquad$ (II-9)

$|+1> = -\frac{1}{\sqrt2}(|x> + i|y>) \qquad |0> = |z> \qquad |-1> = \frac{1}{\sqrt2}(|x> - i|y>)$ $\qquad$ (II-10)

- Action de $S_{x,y,z}$ sur les vecteurs de base $\{|a>\}$ D'après (II-8) et (II,7) :

$$\begin{cases} S_x|x> = \frac12(S_+ + S_-)\frac{1}{\sqrt2}(|-1> - |+1>) = 0 \\ S_x|y> = \frac12(S_+ + S_-)\frac{i}{\sqrt2}(|-1> + |+1>) = \frac{i\hbar}{2\sqrt2}(\sqrt2\,|0> + \sqrt2\,|0>) = i|0> = i\hbar|z> \\ S_x|z> = \frac12(S_+ + S_-)|0> = \frac{\hbar}{2}(\sqrt2|+1> + \sqrt2|-1>) = -i\hbar|y> \end{cases} \qquad (\text{II-11})$$

Calculs analogues pour S_y et S_z $\longrightarrow$ Résultats regroupables sous la forme :

$$S_a|b> = i\hbar\,\varepsilon_{abc}\,|c> \qquad (\text{II-12})$$

$$<c|S_a|b> = i\hbar\,\varepsilon_{abc} \qquad (\text{II-13})$$

<u>Remarque</u> : D'après la 1ère formule (II-11), $|x>$ (resp $|y>$, $|z>$) est vecteur propre de S_x (resp S_y, S_z) avec la valeur propre 0.
$|x>$ ($|y>$) se déduit donc de $|z> = |0>$ par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$) ($-\frac{\pi}{2}$) autour de Oy (Ox). On aurait pu ainsi introduire les formules (II-8)

Analogie entre les 3 états $\{|a\rangle\}$ d'un spin 1 et les 3 vecteurs unitaires d'un trièdre trirectangle

- Comment se transforme l'état $|b\rangle$ lors d'une rotation infinitésimale $d\varphi$ autour de Oa ?
  - Opérateur de rotation : $R_a(d\varphi) = 1 - i\frac{d\varphi}{\hbar} S_a$ (II-14)
  - Transformé de $|b\rangle$

$$R_a(d\varphi)|b\rangle = |b\rangle - i\frac{d\varphi}{\hbar} S_a|b\rangle = |b\rangle + d\varphi\, \varepsilon_{abc}|c\rangle \qquad \text{(II-15)}$$

- Comment se transforme le vecteur unitaire $\vec{e}_b$ lors d'une rotation $d\varphi$ autour de $\vec{e}_a$?

$$\mathcal{R}_a(d\varphi)\vec{e}_b = \vec{e}_b + d\varphi \underbrace{\vec{e}_a \times \vec{e}_b}_{\varepsilon_{abc}\vec{e}_c} = \vec{e}_b + d\varphi\, \varepsilon_{abc}\vec{e}_c \qquad \text{(II-16)}$$

- Conclusion : isomorphisme entre les vecteurs unitaires de l'espace à 3 dimensions et les états d'un spin 1

$$\vec{V} = V_x \vec{e}_x + V_y \vec{e}_y + V_z \vec{e}_z \iff |V\rangle = V_x|x\rangle + V_y|y\rangle + V_z|z\rangle \qquad \text{(II-17)}$$

Fonction d'onde d'une particule de spin 1.

On tient compte maintenant en plus des degrés de liberté externes.

- Base orthonormée de l'espace des états : $\{|\vec{k}, a\rangle\} = \{|\vec{k}\rangle \otimes |a\rangle\}$ (II-18)

  $|\vec{k}, a\rangle$: particule d'impulsion $\hbar\vec{k}$ et dans l'état de spin $|a\rangle$
- Fonction d'onde associée à un état $|\varphi\rangle$

$$\langle \vec{k}, a|\varphi\rangle = \varphi_a(\vec{k}) \qquad \text{(II-19)}$$

En chaque point $\vec{k}$ de l'espace des $\vec{k}$, 3 nombres : $\varphi_x(\vec{k}), \varphi_y(\vec{k}), \varphi_z(\vec{k})$

- Opérateur moment cinétique orbital (n'agit que sur les degrés de liberté externes)

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} \qquad \text{(II-20)}$$

En représentation $\{|\vec{k}\rangle\}$ $\begin{cases} \vec{R} \rightsquigarrow -\frac{1}{i}\vec{\nabla} & (\frac{1}{i}\text{ gradient }/\vec{k}) \\ \vec{P} \rightsquigarrow \hbar\vec{k} & (\text{multiplication par } \hbar\vec{k}) \end{cases}$ (II-21)

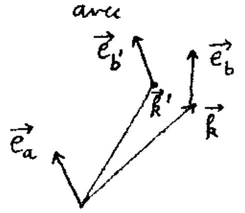
D'où $\vec{L} \rightsquigarrow -\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \times \vec{k} = \frac{\hbar}{i}\vec{k} \times \vec{\nabla}$ (II-22)

$$L_a = \frac{\hbar}{i}\varepsilon_{abc}\, k_b\, \partial_c \qquad \left(\partial_c = \frac{\partial}{\partial k_c}\right) \qquad \text{(II-23)}$$

- Comment se transforme l'état $|\vec{k}, b\rangle$ lors d'une rotation $d\varphi$ autour de Oa ?

$$R_a(d\varphi)|\vec{k}\rangle \otimes |b\rangle = \left(1 - i\frac{d\varphi}{\hbar}L_a\right)|\vec{k}\rangle \otimes \left(1 - i\frac{d\varphi}{\hbar}S_a\right)|b\rangle = |\vec{k}'\rangle \otimes |b'\rangle \qquad \text{(II-24)}$$

avec $\vec{k}' = \vec{k} + d\varphi\, \vec{e}_a \times \vec{k}$ $\qquad \vec{e}_{b'} = \vec{e}_b + d\varphi\, \vec{e}_a \times \vec{e}_b$ (II-25)



Si à $|\vec{k}, b\rangle$ on associe le vecteur $\vec{e}_b$ appliqué au point $\vec{k}$, au transformé de $|\vec{k}, b\rangle$ il faut associer le vecteur "tourné" $\vec{e}_{b'}$ appliqué au point "tourné" $\vec{k}'$

On montre aisément à partir de là que les 3 nombres introduits en (II-19) se transforment par rotation comme les composantes d'un *champ vectoriel* (un vecteur en chaque point de l'espace)

Donc

Fonction d'onde d'une particule de spin 1 $\iff$ Champ vectoriel

- Calcul de la valeur moyenne du moment cinétique total en fonction des composantes cartésiennes de la fonction d'onde

$$J_a = L_a + S_a \qquad \text{(II-26)}$$

$$\langle J_a\rangle = \langle\varphi|J_a|\varphi\rangle = \langle L_a\rangle + \langle S_a\rangle \qquad \text{(II-27)}$$

$$\langle L_a \rangle = \int d^3k \; \varphi_d^* \, L_a \, \varphi_d \;=\; \frac{\hbar}{i} \int d^3k \; \varphi_d^* \, \varepsilon_{abc} \, k_b \, \partial_c \, \varphi_d \qquad (\text{II - 28})$$

(Mêmes indices d à gauche et à droite de L_a car L_a n'agit pas sur les variables de spin)

$$\langle S_a \rangle = \int d^3k \, d^3k' \, \langle \varphi | \vec{k}\, b \rangle \underbrace{\langle \vec{k}\, b | S_a | \vec{k}'\, c \rangle}_{-i\hbar \, \delta(\vec{k}-\vec{k}')\, \varepsilon_{abc}} \langle \vec{k}'\, c | \varphi \rangle \;=\; \frac{\hbar}{i} \int d^3k \; \varphi_b^* \, \varepsilon_{abc} \, \varphi_c \qquad (\text{II - 29})$$

Finalement :

$$\langle J_a \rangle = \frac{\hbar}{i} \int d^3k \left[\varphi_d^* \, \varepsilon_{abc} \, k_b \, \partial_c \, \varphi_d \;+\; \varphi_b^* \, \varepsilon_{abc} \, \varphi_c \right] \qquad (\text{II - 30})$$

b - Calcul de $\vec{J} = \varepsilon_0 \int d^3r \; \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B})$ en fonction de $\vec{\alpha}(\vec{k})$

Calcul préliminaire en fonction de $\vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$ et $\dot{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{k})$

- $$\vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{E}\,(\vec{r}.\vec{B}) - \vec{B}\,(\vec{r}.\vec{E}) = \vec{E}^*\,(\vec{r}.\vec{B}) - \vec{B}^*(\vec{r}.\vec{E}) \quad \text{car } \vec{E} \text{ et } \vec{B} \text{ réels} \qquad (\text{II - 31})$$

- Transformées de Fourier

si $\vec{E}(\vec{r}) \longleftrightarrow \vec{\mathcal{E}}(\vec{k})$

$$\vec{r}.\vec{E} \longleftrightarrow i \, \vec{\nabla}.\vec{\mathcal{E}} = i \, \partial_b \mathcal{E}_b \qquad (\text{II - 32})$$

- Parseval - Plancherel

$$\mathcal{J}_a = \varepsilon_0 \int d^3r \left[E_a^* \, (\vec{r}.\vec{B}) - B_a^* \, (\vec{r}.\vec{E}) \right] = i \varepsilon_0 (2\pi)^3 \int d^3k \left[\mathcal{E}_a^* (\partial_b \mathcal{B}_b) - \mathcal{B}_a^* (\partial_b \mathcal{E}_b) \right] \qquad (\text{II - 33})$$

$$\int d^3k \; \mathcal{E}_a^* \, (\partial_b \mathcal{B}_b) = \underbrace{\int d^3k \; \partial_b (\mathcal{E}_a^* \, \mathcal{B}_b)}_{=0} - \int d^3k \; \mathcal{B}_b (\partial_b \mathcal{E}_a^*) \qquad (\text{II - 34})$$

(Transformation en une intégrale de surface)

$$\int d^3k \, \mathcal{B}_b \, (\partial_b \mathcal{E}_a^*) = - \int d^3k \; \mathcal{B}_b^* (\partial_b \mathcal{E}_a) \qquad (\text{II - 35})$$

(Chg^t $\vec{k} \to -\vec{k}$ et utilisation des conditions de réalité I-3)

Finalement

$$\mathcal{J}_a = i \varepsilon_0 (2\pi)^3 \int d^3k \left[\mathcal{B}_b^* \, (\partial_b \mathcal{E}_a) - \mathcal{B}_a^* (\partial_b \mathcal{E}_b) \right] \qquad (\text{II - 36})$$

- Remplacement de $\vec{\mathcal{B}}$ par $i \dfrac{\vec{k}}{\omega^2} \times \dot{\vec{\mathcal{E}}}$ (formule I - 6)

$$\mathcal{B}_b^* = \frac{-i}{\omega^2} \varepsilon_{bcd} \, k_c \, \dot{\mathcal{E}}_d^* \qquad \mathcal{B}_a^* = -\frac{i}{\omega^2} \, \varepsilon_{acd} \, k_c \, \dot{\mathcal{E}}_d^* \qquad (\text{II - 37})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_a &= \varepsilon_0 (2\pi)^3 \int \frac{d^3k}{\omega^2} \left[\varepsilon_{bcd} \; \dot{\mathcal{E}}_d^* \, k_c (\partial_b \mathcal{E}_a) - \varepsilon_{acd} \; \dot{\mathcal{E}}_d^* \, k_c (\partial_b \mathcal{E}_b) \right] \\ &= \varepsilon_0 (2\pi)^3 \int \frac{d^3k}{\omega^2} \; \dot{\mathcal{E}}_d^* \, k_c (\partial_b \mathcal{E}_e) \; \varepsilon_{fcd} \left[\delta_{fb} \, \delta_{ea} - \delta_{fa} \, \delta_{eb} \right] \end{aligned} \qquad (\text{II - 38})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{fcd} \left[\delta_{fb} \, \delta_{ea} - \delta_{fa} \, \delta_{eb} \right] &= \varepsilon_{fcd} \; \varepsilon_{abg} \; \varepsilon_{gef} \qquad (\text{d'après II - 4}) \\ &= \varepsilon_{abg} \left[\delta_{gc} \, \delta_{ed} - \delta_{gd} \, \delta_{ec} \right] \end{aligned} \qquad (\text{II - 39})$$

(en contractant le 1er et le 3^e ε au lieu du 2ème et du 3ème)

d'où l'on tire :

$$\mathcal{J}_a = \varepsilon_0 (2\pi)^3 \int \frac{d^3k}{\omega^2} \left[\dot{\mathcal{E}}_d^* \, \varepsilon_{abc} \, k_c (\partial_b \mathcal{E}_d) - \dot{\mathcal{E}}_d^* \, \varepsilon_{abd} \, k_c (\partial_b \mathcal{E}_c) \right] \qquad (\text{II - 40})$$

$$\varepsilon_{abc} \, k_c \, \partial_b = - \varepsilon_{acb} \, k_c \, \partial_b = - \varepsilon_{abc} \, k_b \, \partial_c \qquad (\text{II - 41})$$

$$\begin{aligned} - \dot{\mathcal{E}}_d^* \, \varepsilon_{abd} \, k_c (\partial_b \mathcal{E}_c) &= - \dot{\mathcal{E}}_d^* \, \varepsilon_{abd} \, \partial_b \underbrace{(k_c \mathcal{E}_c)}_{=0 \; (\mathcal{E} \text{ transversal})} + \dot{\mathcal{E}}_d^* \, \varepsilon_{abd} \, \mathcal{E}_c \underbrace{(\partial_b k_c)}_{=\delta_{bc}} \\ &= \dot{\mathcal{E}}_d^* \, \varepsilon_{acd} \, \mathcal{E}_c = \dot{\mathcal{E}}_b^* \, \varepsilon_{acb} \, \mathcal{E}_c = - \dot{\mathcal{E}}_b^* \, \varepsilon_{abc} \, \mathcal{E}_c \end{aligned} \qquad (\text{II - 42})$$

- Finalement, en portant (II - 41) et (II - 42) dans (II - 40) :

$$\mathcal{J}_a = - \varepsilon_0 (2\pi)^3 \int \frac{d^3k}{\omega^2} \left[\dot{\mathcal{E}}_d^* \, \varepsilon_{abc} \, k_b (\partial_c \mathcal{E}_d) + \dot{\mathcal{E}}_b^* \, \varepsilon_{abc} \, \mathcal{E}_c \right] \qquad (\text{II - 43})$$

ce qui commence à ressembler à (II - 30)

Calcul en fonction de $\vec{\alpha}(\vec{k})$

D'après les expressions I-11, I-12, I-23 de $\vec{E}$, $\dot{\vec{E}}$, $N(k)$, il vient :

$$J_a = -i\frac{\hbar}{2}\int d^3k \left\{ \left[\alpha_d^*(\vec{k}) - \alpha_d(-\vec{k})\right] \varepsilon_{abc}\, k_b\, \partial_c \left[\alpha_d(\vec{k}) + \alpha_d^*(-\vec{k})\right] + \right.$$

$$\left. \left[\alpha_b^*(\vec{k}) - \alpha_b(-\vec{k})\right] \varepsilon_{abc} \left[\alpha_c(\vec{k}) + \alpha_c^*(-\vec{k})\right] \right\} \qquad (\text{II-44})$$

- Termes faisant intervenir 2 $\vec{k}$ avec le même signe (I, II, I', II')

  I et II sont égaux (Pour le voir, on change, dans II, $\vec{k}$ en $-\vec{k}$, et on intègre par parties en utilisant le fait que, par suite de ε_{abc}, $b \neq c$, de sorte que $k_b\partial_c = \partial_c k_b$).

  I' et II' sont égaux (changement de $\vec{k}$ en $-\vec{k}$ dans II', changement $b \to c$, $c \to b$ et utilisation de $\varepsilon_{acb} = -\varepsilon_{abc}$).

- Termes faisant intervenir 2 $\vec{k}$ avec des signes opposés (III, IV, III', IV'). Tous ces termes sont nuls.

  On montre en effet que chacun d'eux est égal à son opposé
  pour III et IV, en changeant $\vec{k}$ en $-\vec{k}$ et en faisant une intégration par partie
  pour III' et IV', en changeant $\vec{k} \to -\vec{k}$, $b \to c$, $c \to b$.

Finalement :

$$J_a = \frac{\hbar}{i}\int d^3k \left[\alpha_d^*\, \varepsilon_{abc}\, k_b (\partial_c\, \alpha_d) + \alpha_b^*\, \varepsilon_{abc}\, \alpha_c\right] \qquad (\text{II-45})$$

La composante J_a du moment cinétique du champ électromagnétique classique apparaît donc bien comme la valeur moyenne de l'opérateur $L_a + S_a$ dans la fonction d'onde $\vec{\alpha}(k)$ introduite au § 2.

c - $\vec{L}$ et $\vec{S}$ ne sont pas physiques alors que $\vec{J}$ l'est.

- Argument mathématique.

  La condition (I-13) de transversalité $\vec{k}\cdot\vec{\alpha}(\vec{k}) = 0$ entraîne que l'espace des fonctions d'ondes du photon est un sous-espace de l'espace des champs vectoriels, le sous espace des champs transverses. Or ce sous-espace n'est pas stable sous l'action de $\vec{S}$ ou de $\vec{L}$, alors qu'il l'est sous l'action de $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.

  Pour le voir, revenons à la figure de la page II-2. $\vec{S}$ fait tourner le vecteur $\vec{e}_b$ sans faire tourner le point d'application, ce qui détruit la perpendicularité entre $\vec{k}$ et $\vec{e}_b$ en général. De même, $\vec{L}$ fait tourner le point d'application en gardant $\vec{e}_b$ parallèle à lui même. $\vec{J}$ par contre fait tourner simultanément $\vec{k}$ et $\vec{e}_b$ et conserve les angles.

  Seul $\vec{J}$ est donc observable. Il est commode cependant d'introduire les états propres de $\vec{L}$ et $\vec{S}$ pour construire à partir d'eux les états propres (transverses) de $\vec{J}$. $\vec{L}$ et $\vec{S}$ sont des intermédiaires de calcul commodes.

- Argument physique

  Le spin d'une particule est son moment cinétique dans le référentiel où elle est au repos. Un tel référentiel n'existe pas pour le photon qui se propage à la vitesse c.