19.3.74

VII – Quantification.

But de ce §: Donner, dans la jauge de Coulomb, les relations de commutation entre variables conjuguées pour un système de charges et de champs en interaction, et résoudre les difficultés liées à la transversalité des champs.

Introduire les opérateurs de création et d'annihilation de photons de divers types.

A – Relations de commutation canoniques ne tenant pas compte de la transversalité des champs et potentiels en jauge de Coulomb.

– Comme $A_i(\vec{r},t)$ et $\Pi_j(\vec{r},t)$ sont réels, les observables qui leur sont associées lorsqu'on quantifie le système sont hermitiques.

$$A_i(\vec{r},t) \longrightarrow A_i(\vec{r}) = A_i^+(\vec{r}) \qquad \Pi_j(\vec{r},t) \longrightarrow \Pi_j(\vec{r}) = \Pi_j^+(\vec{r}) \tag{XII-1}$$

– "Oublions" momentanément le fait que $\vec{A}$ et $\vec{\Pi} = -\varepsilon_0 \vec{E}_\perp$ ont une divergence nulle en jauge de Coulomb, et faisons comme si les 3 composantes $A_i(\vec{r})$ étaient indépendantes au point $\vec{r}$ (de même pour les 3 composantes $\Pi_j(\vec{r})$). Par généralisation des résultats du § I, on a alors tendance à écrire :

$$\left[A_i(\vec{r}), \Pi_j(\vec{r}\,')\right] \overset{?}{=} i\hbar\, \delta_{ij}\, \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \tag{XII-2}$$

– En ce qui concerne les particules, on a évidemment :

$$\left[Q_\alpha , P_\beta \right] = i\hbar\, \delta_{\alpha\beta} \tag{XII-3}$$

– Avant d'aller plus loin, établissons les relations de commutation pour les T.F. $\mathcal{A}_i(\vec{k})$ et $\Pi_j(\vec{k})$ de $A_i(\vec{r})$ et $\Pi_j(\vec{r})$:

$$A_i(\vec{r}) = \int d^3k\, \mathcal{A}_i(\vec{k})\, e^{i\vec{k}.\vec{r}} \qquad \Pi_j(\vec{r}) = \int d^3k\, \Pi_j(\vec{k})\, e^{i\vec{k}.\vec{r}} \tag{XII-4}$$

$\mathcal{A}_i(\vec{k})$ et $\Pi_j(\vec{k})$ ne sont pas hermitique, mais satisfont aux conditions de réalité :

$$\mathcal{A}_i(\vec{k}) = \mathcal{A}_i^+(-\vec{k}) \qquad \Pi_j(\vec{k}) = \Pi_j^+(-\vec{k}) \tag{XII-5}$$

Inversons (XII-4) et calculons le commutateur de $\mathcal{A}_i(\vec{k})$ et $\Pi_j^+(\vec{k}')$

$$\left[\mathcal{A}_i(\vec{k}), \Pi_j^+(\vec{k}')\right] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^6 \int d^3r\, d^3r'\, e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\, e^{+i\vec{k}'.\vec{r}\,'} \left[A_i(\vec{r}), \Pi_j(\vec{r}\,')\right] \tag{XII-6}$$

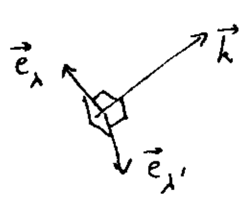
Si l'on utilise (XII-2) dans (XII-6), on obtient immédiatement :

$$\left[\mathcal{A}_i(\vec{k}), \Pi_j^+(\vec{k}')\right] \overset{?}{=} i\hbar\, \delta_{ij} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^6 \int d^3r\, e^{-i(\vec{k}-\vec{k}').\vec{r}} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 i\hbar\, \delta_{ij}\, \delta(\vec{k}-\vec{k}') \tag{XII-7}$$

B – Relations de commutation correctes tenant compte de la transversalité.

– La condition de transversalité s'exprime plus simplement dans l'espace des k : $\vec{\mathcal{A}}(\vec{k})$ et $\vec{\Pi}(\vec{k})$ doivent être perpendiculaires à $\vec{k}$.

Ce ne sont donc pas les 3 composantes $A_i(\vec{k})$ de $\vec{\mathcal{A}}(k)$ sur 3 vecteurs unitaires $\perp$ fixes qui sont indépendantes, mais les 2 composantes $\mathcal{A}_\lambda(\vec{k})$ et $\mathcal{A}_{\lambda'}(\vec{k})$ sur 2 vecteurs unitaires $\vec{e}_\lambda$ et $\vec{e}_{\lambda'}$, $\perp$ entre eux, et contenus dans le plan $\perp$ à $\vec{k}$.



Le même résultat vaut aussi pour $\Pi_\lambda(\vec{k})$ et $\Pi_{\lambda'}(\vec{k})$

La relation de commutation (XII-7) est donc incorrecte et doit être remplacée par :

$$\boxed{\left[\mathcal{A}_\lambda(\vec{k}),\ \Pi^+_{\lambda'}(\vec{k}')\right] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 i\hbar\ \delta_{\lambda\lambda'}\ \delta(\vec{k}-\vec{k}')} \qquad (XII-8)$$

- Calculons alors la vraie valeur du commutateur $\left[\mathcal{A}_i(\vec{k}), \Pi^+_j(\vec{k}')\right]$ à partir de XII-8

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_i(\vec{k}) &= \langle e_i|\mathcal{A}\rangle = \langle e_i|e_\lambda\rangle\langle e_\lambda|\mathcal{A}\rangle + \langle e_i|e_{\lambda'}\rangle\langle e_{\lambda'}|\mathcal{A}\rangle \\ &= \langle e_i|e_\lambda\rangle\,\mathcal{A}_\lambda(\vec{k}) + \langle e_i|e_{\lambda'}\rangle\,\mathcal{A}_{\lambda'}(\vec{k})\end{aligned} \qquad (XII-9)$$

$$\Pi^+_j(\vec{k}') = \langle e_\lambda|e_j\rangle\,\Pi^+_\lambda(\vec{k}') + \langle e_{\lambda'}|e_j\rangle\,\Pi^+_{\lambda'}(\vec{k}') \qquad (XII-10)$$

En utilisant XII-8, on obtient alors

$$\left[\mathcal{A}_i(\vec{k}), \Pi^+_j(\vec{k}')\right] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 i\hbar\ \delta(\vec{k}-\vec{k}')\left[\langle e_i|e_\lambda\rangle\langle e_\lambda|e_j\rangle + \langle e_i|e_{\lambda'}\rangle\langle e_{\lambda'}|e_j\rangle\right] \qquad (XII-11)$$

Pour calculer le crochet du 2^e membre, remarquons que $\vec{e}_\lambda$, $\vec{e}_{\lambda'}$ forment avec $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}$ un système complet qui satisfait à la relation de fermeture

$$|e_\lambda\rangle\langle e_\lambda| + |e_{\lambda'}\rangle\langle e_{\lambda'}| + |n\rangle\langle n| = 1 \qquad (XII-12)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\langle e_i|e_\lambda\rangle\langle e_\lambda|e_j\rangle + \langle e_i|e_{\lambda'}\rangle\langle e_{\lambda'}|e_j\rangle &= \langle e_i|e_j\rangle - \langle e_i|n\rangle\langle n|e_j\rangle \\ &= \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\end{aligned} \qquad (XII-13)$$

de sorte que, finalement :

$$\boxed{\left[\mathcal{A}_i(\vec{k}),\ \Pi^+_j(\vec{k}')\right] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 i\hbar\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right)\delta(\vec{k}-\vec{k}')} \qquad (XII-14)$$

- Calculons enfin le commutateur $\left[A_i(\vec{r}), \Pi_j(\vec{r}')\right]$ correct à partir de XII-14

On a, compte tenu de XII-4, XII-5 (après avoir changé $\vec{k}'$ en $-\vec{k}'$)

$$\begin{aligned}\left[A_i(\vec{r}), \Pi_j(\vec{r}')\right] &= \int d^3k\, d^3k'\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\, e^{-i\vec{k}'\vec{r}'}\left[\mathcal{A}_i(\vec{k}), \Pi^+_j(\vec{k}')\right] \\ &= i\hbar\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int d^3k\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right)e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} \\ &= i\hbar\left[\delta_{ij}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}') + \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int d^3k\,\frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}}{k^2}\right]\end{aligned} \qquad (XII, 15)$$

Si l'on se rappelle que la T.F. de $\frac{1}{k^2}$ est $\frac{1}{r}$, c-à-d que

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int d^3k\,\frac{e^{i\vec{k}.\vec{r}}}{k^2} = \frac{1}{4\pi r}, \qquad (XII-16)$$

il vient finalement :

$$\boxed{\left[A_i(\vec{r}),\ \Pi_j(\vec{r}')\right] = i\hbar\left[\delta_{ij}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}') + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]} \qquad (XII-17)$$

qui remplace la formule incorrecte XII-2

- <u>Remarque</u> : on pose souvent $\delta^\perp_{ij}(\vec{r}-\vec{r}') = \delta_{ij}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}') + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ (XII-18)

et on appelle $\delta^\perp_{ij}(\vec{r}-\vec{r}')$ la "fonction - δ transverse". On a alors :

$$\left[A_i(\vec{r}), \Pi_j(\vec{r}')\right] = i\hbar\ \delta^\perp_{ij}(\vec{r}-\vec{r}') \qquad (XII-19)$$

D'après XII-15), $\delta^\perp_{ij}(\vec{r}-\vec{r}')$ est la T.F. de $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right)$. Comme

$$\sum_i k_i\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) = \sum_j k_j\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) = 0 \qquad (XII-20)$$

on en déduit que :

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\,\delta^\perp_{ij}(\vec{r}-\vec{r}') = \sum_j \frac{\partial}{\partial x'_j}\,\delta^\perp_{ij}(\vec{r}-\vec{r}') = 0 \qquad (XII-21)$$

C. Opérateurs de création et d'annihilation.

A partir de $\mathcal{A}_\lambda(\vec k)$ et $\Pi_\lambda(\vec k)$, on va introduire des opérateurs plus fondamentaux, dont les relations de commutation sont plus simples que XII-8, XII-14, XII-17, dont la signification physique est plus claire (ils détruisent ou créent un photon d'un certain type).

① Définition.

Dans le § 2 de la 1ère partie, nous avons trouvé qu'il était commode d'introduire la combinaison linéaire $\vec E(\vec k,t) + \frac{i}{\omega}\dot{\vec E}(\vec k,t)$, $\vec E(\vec k,t)$ étant la T.F. du champ électrique $\vec E(\vec r,t)$.

Ici, nous nous intéressons à $\vec A$. Comme $\dot{\vec A} = \frac{\vec \Pi}{\varepsilon_0}$, nous allons considérer la combinaison linéaire $\vec{\mathcal{A}}(\vec k) + \frac{i}{\varepsilon_0\omega}\vec\Pi(\vec k)$ et introduire l'opérateur $a_{\vec k\lambda}$ à partir des opérateurs $\mathcal{A}_\lambda(\vec k)$ et $\Pi_\lambda(\vec k)$ par la relation

$$2\,\mathcal{N}(k)\; a_{\vec k\lambda} = \mathcal{A}_\lambda(\vec k) + \frac{i}{\varepsilon_0\omega}\Pi_\lambda(\vec k) \qquad \text{(XII-22)}$$

$\mathcal{N}(k)$ étant une constante qui sera déterminée plus loin de manière à rendre les commutateurs les plus simples possible.

② Relations de commutation.

De XII-22, on tire ; compte tenu de XII-8

$$\left[a_{\vec k\lambda}, a^+_{\vec k'\lambda'}\right] = \frac{1}{4\mathcal{N}(k)\mathcal{N}(k')}\left[\mathcal{A}_\lambda(\vec k) + \frac{i}{\varepsilon_0\omega}\Pi_\lambda(\vec k),\ \mathcal{A}^+_{\lambda'}(\vec k') - \frac{i}{\varepsilon_0\omega'}\Pi^+_{\lambda'}(\vec k')\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}\ \frac{1}{[\mathcal{N}(k)]^2}\ \delta_{\lambda\lambda'}\ \delta(\vec k - \vec k') \qquad \text{(XII-23)}$$

Nous choisirons

$$\mathcal{N}(k) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}} \qquad \text{(XII-24)}$$

de sorte que

$$\boxed{\left[a_{\vec k\lambda}, a^+_{\vec k'\lambda'}\right] = \delta_{\lambda\lambda'}\ \delta(\vec k - \vec k')} \qquad \text{(XII-25)}$$

- Calculons de même $\left[a_{\vec k\lambda}, a_{\vec k'\lambda'}\right]$.

$$\left[a_{\vec k\lambda}, a_{\vec k'\lambda'}\right] = \frac{1}{4\mathcal{N}(k)\mathcal{N}(k')}\left[\mathcal{A}_\lambda(\vec k) + \frac{i}{\varepsilon_0\omega}\Pi_\lambda(\vec k),\ \mathcal{A}_{\lambda'}(\vec k') + \frac{i}{\varepsilon_0\omega}\Pi_{\lambda'}(\vec k')\right]$$

$$= \frac{1}{4\mathcal{N}(k)\mathcal{N}(k')}\left\{\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\underbrace{\left[A_\lambda(\vec k), \Pi^+_{\lambda'}(-\vec k')\right]}_{i\hbar(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta(\vec k+\vec k')} - \frac{i}{\varepsilon_0\omega}\underbrace{\left[A_{\lambda'}(\vec k'), \Pi^+_\lambda(-\vec k)\right]}_{i\hbar(2\pi)^3\delta_{\lambda\lambda'}\delta(\vec k+\vec k')}\right\} = 0 \qquad \text{(XII-26)}$$

Un calcul analogue montre que $\left[a^+_{\vec k\lambda}, a^+_{\vec k'\lambda'}\right] = 0$

$$\boxed{\left[a_{\vec k\lambda}, a_{\vec k'\lambda'}\right] = \left[a^+_{\vec k\lambda}, a^+_{\vec k'\lambda'}\right] = 0} \qquad \text{(XII-27)}$$

- Relation de commutation ≡ à celles des opérateurs annihilation et création d'un ensemble d'oscillateurs harmoniques indépendants, un oscillateur étant associé à chaque jeu de vecteur $\vec k\ \vec e_\lambda$

$a_{\vec k\lambda}$: opérateur d'annihilation d'un photon d'impulsion $\hbar\vec k$, polarisation $\vec e_\lambda$

$a^+_{\vec k\lambda}$ " de création " " "

③ Développement des opérateurs $\vec{A}$, $\vec{E}_\perp$, $\vec{B}$ en ondes planes.

- Ecrivons XII-22 pour $-\vec{k}$

$$2\mathcal{N}(k)\, a_{-\vec{k}\lambda} = \mathcal{A}_\lambda(-\vec{k}) + \frac{i}{\varepsilon_0\omega}\Pi_\lambda(-k) \qquad (XII-28)$$

Prenons l'adjoint de XII-28 et utilisons XII-5

$$2\mathcal{N}(k)\, a^+_{-\vec{k}\lambda} = \mathcal{A}_\lambda(\vec{k}) - \frac{i}{\varepsilon_0\omega}\Pi_\lambda(\vec{k}) \qquad (XII-29)$$

De XII-22 et XII-29, on tire immédiatement :

$$\mathcal{A}_\lambda(\vec{k}) = \mathcal{N}(k)\left[a_{\vec{k}\lambda} + a^+_{-\vec{k}\lambda}\right] \qquad (XII-30)$$

$$\Pi_\lambda(\vec{k}) = -i\varepsilon_0\omega\mathcal{N}(k)\left[a_{\vec{k}\lambda} - a^+_{-\vec{k}\lambda}\right] \qquad (XII-31)$$

- Comme $\vec{\mathcal{A}}(\vec{k}) = \sum_\lambda \vec{e}_\lambda \mathcal{A}_\lambda(\vec{k})$, on obtient en reportant XII-30 dans $\vec{A}(\vec{r}) = \int d^3k\, \vec{\mathcal{A}}(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\vec{r}}$:

$$A(\vec{r}) = \sum_\lambda \int d^3k\, \mathcal{N}(k)\left[a_{\vec{k}\lambda}\, \vec{e}_\lambda e^{i\vec{k}\vec{r}} + a^+_{-\vec{k}\lambda}\, \vec{e}_\lambda\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\right] \qquad (XII-32)$$

En changeant $\vec{k}$ en $-\vec{k}$ dans le 2ᵉ terme du crochet, et en utilisant XII-24, on obtient finalement pour l'opérateur potentiel vecteur $\vec{A}$:

$$\boxed{A(\vec{r}) = \sum_\lambda \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\left[a_{\vec{k}\lambda}\, \vec{e}_\lambda e^{i\vec{k}\vec{r}} + a^+_{\vec{k}\lambda}\, \vec{e}_\lambda\, e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right]} \qquad (XII-33)$$

Comparons XII-33 à V-11 ; on obtient l'opérateur quantique $A(\vec{r})$ en remplaçant dans le développement V-11 du potentiel classique en onde plane progressive, les coefficients $a_{\vec{k}\lambda}(t)$ et $a^*_{\vec{k}\lambda}(t)$ par des opérateurs d'annihilation et de création $a_{\vec{k}\lambda}$ et $a^+_{\vec{k}\lambda}$. (indépendants du temps dans le point de vue de Schrödinger).

- Comme $\vec{E}_\perp = -\frac{\vec{\Pi}}{\varepsilon_0}$, on déduit de XII-31 par un calcul tout à fait similaire au précédent

$$\vec{E}_\perp(\vec{r}) = \sum_\lambda \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0(2\pi)^3}}\left[i a_{\vec{k}\lambda}\, \vec{e}_\lambda e^{i\vec{k}\vec{r}} - i a^+_{\vec{k}\lambda}\, \vec{e}_\lambda\, e^{-i\vec{k}.\vec{r}}\right] \qquad (XII-34)$$

De même de $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$, on déduit à partir de XII-33

$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_\lambda \int d^3k \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega(2\pi)^3}}\left[i a_{\vec{k}\lambda}\, \vec{k}\times\vec{e}_\lambda\, e^{i\vec{k}\vec{r}} - i a^+_{\vec{k}\lambda}\, \vec{k}\times\vec{e}_\lambda\, e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right] \qquad (XII-35)$$

Les développements quantiques XII-34 et XII-35 généralisent I-16 et I-17 de la même manière que XII-33 généralise V-11.

④ Lien avec la 2ᵉ quantification.

- Le passage de V-11, I-16, I-17 à XII-33, XII-34, XII-34 ressemble à celui que l'on fait en M.Q. non relativiste lorsque, par 2ᵉ quantification, on passe de la théorie à 1 particule à la théorie à un nombre quelconque de particules identiques : on développe l'onde la plus générale sur une base orthonormée d'ondes élémentaires, et l'on remplace ensuite les coefficients de ce développement par des opérateurs d'annihilation ou de création. On ne rencontre cependant qu'un seul type d'opérateurs (création ou annihilation), suivant que l'on "quantifie" $\psi(\vec{r})$ ou $\psi^*(\vec{r})$. Comment se fait-il ici que dans les développements (XII-33, 34, 35) on trouve à la fois des opérateurs de création et d'annihilation ?

La raison de ceci est que $\vec{A}$ obéit à une équation relativiste qui admet toujours des solutions d'énergie négative. De manière plus précise, le développement du champ classique $\vec{A}(\vec{r},t)$ contient aussi bien des ondes planes $e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$, que l'on peut interpréter comme des fonctions d'ondes de particules d'impulsion $\hbar\vec{k}$ et d'énergie $\hbar\omega$, que des ondes planes $e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$, que l'on peut interpréter comme des fonctions d'onde de particules d'impulsion $-\hbar\vec{k}$ et d'énergie $-\hbar\omega$. Lors de la seconde quantification apparaissent donc les opérateurs de destruction d'une particule d'énergie $-\hbar\omega$ et d'impulsion $-\hbar\vec{k}$ que l'on réinterprète aussitôt comme des opérateurs de création de l'antiparticule correspondante d'énergie $\hbar\omega$ et d'impulsion $\hbar\vec{k}$.

Comme le photon coïncide avec son antiparticule, il est normal que l'on retrouve simultanément des opérateurs destruction et création de photons.

Pour d'autres particules, comme l'électron, qui ne coïncident pas avec leur antiparticule, la situation serait différente. Ainsi l'opérateur champ associé à l'électron de Dirac est une superposition linéaire d'opérateurs destruction d'un électron et de création d'un positron (ou l'inverse).

(5) Développement en ondes multipolaires.

- $a_{\vec{k}\lambda}$ est l'opérateur associé au coefficient du développement de la "fonction d'onde" $\vec{a}(\vec{k})$ du photon, introduite dans la 1ère partie, sur la base des ondes planes $\{\vec{e}_\lambda\,\delta(\vec{k}-\vec{k}_0)\}$

$$\vec{a}(\vec{k}) = \sum_\lambda \int d^3k_0 \; a_{\vec{k}_0\lambda} \; \vec{e}_\lambda\, \delta(\vec{k}-\vec{k}_0) \qquad (XII-36)$$

On peut aussi développer cette même fonction d'onde $\vec{a}(\vec{k})$ sur la base des ondes multipolaires électrique et magnétique $\left\{ \frac{1}{k_0}\delta(k-k_0)\vec{Z}_{JM}(\vec{n}) \;,\; \frac{1}{k_0}\delta(k-k_0)\vec{X}_{JM}(\vec{n}) \right\}$:

$$\vec{a}(k) = \sum_{J,M}\int dk_0 \left[a_{k_0JMe}\,\frac{1}{k_0}\delta(k-k_0)\vec{Z}_{JM}(\vec{n}) + a_{k_0JMm}\,\frac{1}{k_0}\delta(k-k_0)\vec{X}_{JM}(\vec{n}) \right] \qquad (XII-37)$$

- Aux coefficients a_{k_0JMe} et a_{k_0JMm} (plus généralement $a_{k_0JM\pi}$ avec $\pi = e, m$) de ce développement on peut associer des opérateurs de destruction, reliés aux opérateurs $a_{\vec{k}\lambda}$ introduits plus haut par la même relation que celle qui existe entre les coefficients des 2 développements (XII-37) et (XII-36).

$$a_{k_0JM\pi} = \sum_\lambda \int d^3k \, \langle k_0JM\pi | \vec{k}\lambda\rangle \, a_{\vec{k}\lambda} \qquad (XII-38)$$

- Calculons à partir de (XII-38) le commutateur $[a_{k_0JM\pi}, a^+_{k_0'J'M'\pi'}]$

$$[a_{k_0JM\pi}, a^+_{k_0'J'M'\pi'}] = \sum_\lambda\sum_{\lambda'}\int d^3k\, d^3k' \, \langle k_0JM\pi|\vec{k}\lambda\rangle\langle \vec{k}'\lambda'|k_0'J'M'\pi'\rangle \underbrace{[a_{\vec{k}\lambda}, a^+_{\vec{k}'\lambda'}]}_{\text{ct}\,\delta_{\lambda\lambda'}\,\delta(k-k')}$$

$$= \sum_\lambda \int d^3k \, \langle k_0JM\pi|\vec{k}\lambda\rangle\langle\vec{k}\lambda|k_0'J'M'\pi'\rangle$$

$$= \langle k_0JM\pi | k_0'J'M'\pi'\rangle = \delta(k_0-k_0')\,\delta_{JJ'}\,\delta_{MM'}\,\delta_{\pi\pi'} \qquad (XII-39)$$

On trouve de même que 2 opérateurs $a_{k_0JM\Pi}$ ou 2 opérateurs $a^+_{k_0JM\Pi}$ commutent.

$$\boxed{\begin{aligned} [a_{k_0JM\Pi}, a^+_{k'_0J'M'\Pi'}] &= \delta(k_0-k'_0)\,\delta_{JJ'}\,\delta_{MM'}\,\delta_{\Pi\Pi'} \\ [a_{k_0JM\Pi}, a_{k'_0J'M'\Pi'}] &= [a^+_{k_0JM\Pi}, a^+_{k'_0J'M'\Pi'}] = 0 \end{aligned}} \tag{XII-40}$$

$a_{k_0JM\Pi}$ et $a^+_{k_0JM\Pi}$ sont les opérateurs destruction et création d'un photon d'énergie $\hbar ck_0$, de moment cinétique $J(J+1)\hbar^2$ et $M\hbar$ et de type Π.

– En reportant (XII-37) dans l'expression (V.11) de $A(\vec r)$ on obtient

$$\vec A(\vec r) = \int dk_0 \sum_{JM\Pi} \left[a_{k_0JM\Pi}\, \vec A_{k_0JM\Pi}(\vec r) + a^+_{k_0JM\Pi}\, \vec A^*_{k_0JM\Pi}(\vec r) \right] \tag{XII-41}$$

où $\vec A_{k_0JM\Pi}(\vec r)$ est l'onde multipolaire correspondant dans l'espace des $\vec r$ à un photon $k_0JM\Pi$ (voir § 7 de la 1ère partie). (XII-41) est le développement de l'opérateur potentiel en ondes multipolaires.

⑥ Grandeurs physiques.

Comme les développements $\underbrace{\vec A, \vec E_\perp, \vec B}_{\text{des opérateurs}}$ en ondes, soit planes soit multipolaires, coïncident avec ceux obtenus dans la 1ère partie pour les grandeurs classiques correspondantes, les calculs faits sur ces développements pour obtenir l'expression des grandeurs physiques comme énergie, impulsion, moment cinétique du rayonnement peuvent être repris tels quels sur les opérateurs (seule difficulté nouvelle : a et a^+ ne commutent pas et il faut respecter leur ordre).

On obtient ainsi :

$$\boxed{H_R = \frac{\varepsilon_0}{2}\int\left(\vec E_\perp^2 + c^2\vec B^2\right)d^3r = \sum_\lambda \int d^3k\ \frac{\hbar\omega}{2}\left(a^+_{\vec k\lambda}a_{\vec k\lambda} + a_{\vec k\lambda}a^+_{\vec k\lambda}\right)} \tag{XII-41}$$

$$\boxed{\vec{\mathcal P} = \varepsilon_0\int d^3r\ \vec E_\perp \times \vec B = \sum_\lambda\int d^3k\ \hbar\vec k\ a^+_{\vec k\lambda}a_{\vec k\lambda}} \tag{XII-42}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\mathcal J}^2 &= \left[\varepsilon_0\int d^3r\ \vec r\times(\vec E\times\vec B)\right]^2 = \int dk_0 \sum_{JM\Pi} J(J+1)\hbar^2\ a^+_{k_0JM\Pi}\,a_{k_0JM\Pi} && \text{(XII-43)} \\ \mathcal J_z &= \left[\varepsilon_0\int d^3r\ \vec r\times(\vec E\times\vec B)\right]_z = \int dk_0\sum_{JM\Pi} M\hbar\ a^+_{k_0JM\Pi}\,a_{k_0JM\Pi} && \text{(XII-44)} \end{aligned}}$$

Remarque : on pourrait écrire aussi H_R sous la forme :

$$\int dk_0 \sum_{JM\Pi} \frac{\hbar\omega_0}{2}\left[a^+_{k_0JM\Pi}\,a_{k_0JM\Pi} + a_{k_0JM\Pi}\,a^+_{k_0JM\Pi}\right] \tag{XII-45}$$

Les développements en ondes planes ou multipolaires sont donc aussi bien adaptés l'un que l'autre pour l'énergie. Mais l'impulsion totale (le moment cinétique total) ne s'exprime bien qu'en fonction des coefficients du développement en ondes planes (multipolaires)