12.3.74.

VI – Choix d'une jauge particulière : la jauge de Coulomb.

But de ce § : Pour quantifier le système global, champs + charges, il faut associer à tout couple de grandeurs conjuguées (au sens de Hamilton) 2 observables conjuguées qui ne commutent pas.

On se heurte alors à la difficulté suivante : le potentiel scalaire U n'a pas de moment conjugué, car U ne figure pas dans L ; la démarche précédente est en défaut.

Ce § expose une solution simple à cette difficulté : on choisit une jauge particulière où il est possible d'éliminer complètement U aussi bien du lagrangien que du hamiltonien (on le reexprime entièrement en fonction des coordonnées des particules). Les seuls couples de variables indépendantes sont alors $(\vec{q}_\alpha, \vec{p}_\alpha)$, $(\vec{A}, \vec{\Pi})$.

(1) Résultats des équations de Lagrange valables quelle que soit la jauge.

– Réexprimons en fonction des potentiels $\vec{A}$ et U (qui sont les vraies coordonnées des champs dans le formalisme lagrangien) les 2 équations de Maxwell

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\times\vec{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J} & (XI-1) \\ \vec{\nabla}.\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & (XI-2) \end{cases}$$

obtenues en appliquant le principe de moindre action pour $\vec{A}$ et U. On obtient :

$$\begin{cases} \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A}) - \Delta\vec{A} = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}U + \mu_0\vec{J} & (XI-3) \\ -\dfrac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}.\vec{A}) - \Delta U = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & (XI-4) \end{cases}$$

c'est à dire encore :

$$\begin{cases} \left(\Delta - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial U}{\partial t}\right) - \mu_0\vec{J} & (XI-5) \\ \Delta U + \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}.\vec{A}) & (XI-6) \end{cases}$$

– Equations du second degré en $\vec{A}$. On peut fixer $\vec{A}$ et $\dot{\vec{A}}$ à l'instant initial.

(2) Jauge de Coulomb

– Nous allons montrer qu'on peut se restreindre à un sous ensemble de solutions de XI-5 et XI-6 telles que :

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = 0 \quad \forall\ t \qquad (XI-7)$$

On dit alors que l'on a choisi la jauge de Coulomb.

– Compte tenu de (XI-7), (XI-6) s'écrit

$$\Delta U + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \quad \forall\ t \qquad (XI-8)$$

– Egalons alors les parties longitudinale et transversale des 2 membres de (XI-5).

Partie transversale

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A} = -\mu_0\vec{J}_\perp \qquad XI-9$$

Partie longitudinale

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}U = \mu_0\vec{J}_{/\!/} \qquad (XI-10)$$

(XI-10)

– Pour que 2 champs de vecteurs longitudinaux soient égaux, il faut et il suffit qu'ils aient même divergence [Dans l'espace des $\vec{k}$, cela revient à dire que si en chaque point $\vec{k}$ les 2 vecteurs sont // à $\vec{k}$ et ont même projection sur $\vec{k}$, alors ils sont égaux)

Prenons donc la divergence des 2 membres de XI-10

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Delta U = \mu_0 \vec{\nabla}.\vec{J}_{/\!/} = \mu_0 \vec{\nabla}.\vec{J} \qquad (\text{car } \vec{\nabla}.\vec{J}_\perp = 0) \qquad \text{XI-11}$$

Utilisons alors XI-8. On obtient

$$-\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\frac{\partial}{\partial t}\rho = \mu_0 \vec{\nabla}.\vec{J} \qquad \text{(XI-12)}$$

c-a-d encore en utilisant $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

$$\vec{\nabla}\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \text{(XI-13)}$$

qui est l'équation de conservation de la charge

– En conclusion si l'on impose (XI-7), U est déterminé par (XI-8). L'équation du mouvement de $\vec{A}$ est donnée par (XI-9) et (XI-10) est automatiquement satisfaite grâce à la conservation de la charge

(3) Pourquoi choisir la jauge de Coulomb ?

– Nous avons déjà vu dans un § antérieur (1ère partie § 9) que l'équation de Maxwell (XI-2) fixait à chaque instant la composante longitudinale de $\vec{E}$. En prenant la T.F. de cette équation, on obtient en effet :

$$i\vec{k}.\vec{\mathcal{E}}(\vec{k}) = ik\,\mathcal{E}_{/\!/}(\vec{k}) = \frac{\rho(\vec{k})}{\varepsilon_0} \qquad \text{(XI-14)}$$

soit encore :

$$\vec{\mathcal{E}}_{/\!/}(\vec{k}) = -\frac{i}{\varepsilon_0}\frac{1}{k}\rho(\vec{k}) \qquad \text{(XI-15)}$$

$\mathcal{E}_{/\!/}(\vec{k})$ est donc proportionnel au produit de $\rho(\vec{k})$ par $\frac{1}{k}$. $\vec{E}_{/\!/}(\vec{r})$ est donc proportionnel au produit de convolution de $\rho(\vec{r})$ par la T.F. de $\frac{1}{k}$, c-à-d par $\frac{1}{r^2}$:

$$\vec{E}_{/\!/}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}\,\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \qquad \text{(XI-16)}$$

$\vec{E}_{/\!/}(\vec{r})$ est donc le champ électrostatique <u>instantané</u> produit par la distribution de charges ρ et peut donc être entièrement exprimé en fonction des coordonnées des particules.

Si l'on choisit une jauge telle que $\vec{E}_{/\!/}(\vec{r})$ soit uniquement relié à U (et non à $\vec{A}$), il sera donc possible d'éliminer U en le remplaçant par une certaine fonction des coordonnées des particules

– La jauge de Coulomb réalise justement une telle séparation claire des composantes transversale et longitudinale de $\vec{E}$: la composante longitudinale est liée à U, la transversale à $\vec{A}$.

$$\vec{E} = \underbrace{-\vec{\nabla}U}_{\substack{\text{partie toujours longitudinale} \\ \text{(parallèle à } \vec{k} \text{ dans l'espace des } \vec{k}, \\ \text{ou rotationnel nul dans l'espace} \\ \text{des } \vec{r}\text{)}}} \quad \underbrace{-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{\substack{\text{Lorsque } \vec{\nabla}.\vec{A}=0\text{, partie} \\ \text{purement transversale } (\perp \text{ à } \vec{k} \text{ dans} \\ \text{l'espace des } \vec{k}\text{, ou divergence nulle dans} \\ \text{l'espace des } \vec{r}\text{)}}} \qquad \text{(XI-17)}$$

– A chaque instant t, U s'exprime en fonction des charges grâce à XI-13. La solution de (XI-13) (qui s'annule pour $|\vec{r}| = \infty$) s'écrit en effet :

$$U(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad \text{(XI-18)}$$

En appliquant $-\vec{\nabla}$ à (XI-18), on retrouve (XI-16). U est le potentiel électrostatique associé à la distribution de charges $\rho(\vec{r},t)$ "figée" à l'instant t.
Donc U n'est pas une variable réellement indépendante et peut être éliminé de toutes les expressions importantes comme nous le montrons plus loin.

- Inconvénient de la jauge de Coulomb : les conditions XI-12 et XI-3 ne sont pas invariantes relativistes.

(4) Elimination de U (et $\vec{E}_{\parallel}$) dans le Lagrangien.

- Considérons le terme $\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \, \vec{E}^2$ qui figure dans le lagrangien (VIII-13). En décomposant $\vec{E}$ en sa partie longitudinale et sa partie transversale comme en XI-17, on obtient aisément :

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \, \vec{E}^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \, \vec{E}_{\parallel}^2 + \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \, \vec{E}_{\perp}^2 \qquad \text{(XI-19)}$$

en posant $\quad \vec{E}_{\parallel} = -\vec{\nabla} U \quad , \quad \vec{E}_{\perp} = -\dot{\vec{A}} \qquad$ (XI-20)

Le terme croisé $\left(\varepsilon_0 \int d^3r \, \vec{E}_{\perp}\cdot\vec{E}_{\parallel}\right)$ est nul car c'est l'intégrale du produit scalaire d'un champ de vecteurs transverses par un champ de vecteurs longitudinaux (quand on passe dans l'espace des $\vec{k}$ en utilisant l'égalité de Parseval-Plancherel, on obtient 2 champs de vecteurs orthogonaux en chaque point de l'espace, dont le produit scalaire est évidemment nul)

- Calculons maintenant

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \, \vec{E}_{\parallel}^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \, (\vec{\nabla}U)\cdot(\vec{\nabla}U) \qquad \text{(XI-21)}$$

Une intégration par parties élémentaire donne :

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r (\vec{\nabla}U)(\vec{\nabla}U) = \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \, \vec{\nabla}\cdot(U\vec{\nabla}U)}_{\text{Transf. en une intégrale de surface nulle}} - \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \, U(\Delta U) \qquad \text{(XI-22)}$$

Le dernier terme de (XI-22) devient grâce à (XI-13) :

$$-\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \, U(\Delta U) = \frac{1}{2}\int d^3r \, U(\vec{r},t)\,\rho(\vec{r},t) \qquad \text{(XI-23)}$$

Lorsqu'on le combine avec le 3ème terme de VIII-13, $-\sum_\alpha e_\alpha U(\vec{q}_\alpha,t)$, écrit sous la forme VIII-14, c-à-d sous la forme $-\int d^3r \, U(\vec{r},t)\rho(\vec{r},t)$, on obtient :

$$-\frac{1}{2}\int d^3r \, U(\vec{r},t)\,\rho(\vec{r},t) \qquad \text{(XI-24)}$$

Si l'on utilise l'expression (XI-18) de $U(\vec{r},t)$, l'expression (VIII-10) de ρ, et si l'on omet les termes représentant l'énergie d'interaction d'une charge avec elle même, on obtient pour XI-24

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r \, d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r},t)\,\rho(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_\alpha\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{e_\alpha e_\beta}{|\vec{q}_\alpha-\vec{q}_\beta|} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\alpha>\beta}\frac{e_\alpha e_\beta}{|\vec{q}_\alpha-\vec{q}_\beta|} \qquad \text{(XI-25)}$$

- Le lagrangien (VIII-13) peut donc, dans la jauge de Coulomb, être exprimé entièrement en fonction de $\vec{q}_\alpha$ et $\vec{A}$. Il s'écrit alors :

$$\boxed{L = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha^{\,2} + \sum_\alpha e_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha\cdot\vec{A}(\vec{q}_\alpha,t) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\alpha>\beta}\frac{e_\alpha e_\beta}{|\vec{q}_\alpha-\vec{q}_\beta|} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\left[\dot{\vec{A}}^2 - c^2(\vec{\nabla}\times\vec{A})^2\right]} \qquad \text{(XI-26)}$$

$\vec{A}$ est supposé évidemment ici appartenir au sous espace des champs vectoriels transverses puisqu'on est en jauge de Coulomb (cf XI-12).

⑤ Elimination de U (et $\vec{E}_{//}$) dans le Hamiltonien.

- Chacune des variables $\vec{q}_\alpha$, $\vec{A}$ figurant dans XI-26 a maintenant un moment conjugué :

$$\begin{cases} \vec{p}_\alpha = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_\alpha} = m_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha + e_\alpha \vec{A}(q_\alpha, t) & \text{(XI-27)} \\ \vec{\Pi}(\vec{r},t) = \dfrac{\delta L}{\delta \dot{\vec{A}}} = \varepsilon_0 \dot{\vec{A}} = -\varepsilon_0 \vec{E}_\perp & \text{(XI-28)} \end{cases}$$

$\vec{\Pi}$ est donc, comme $\vec{A}$, transverse.

- Partons de l'expression de H donnée en (X-58) ($m_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha$ étant remplacé par $\vec{p}_\alpha - e_\alpha \vec{A}(\vec{q}_\alpha, t)$)

$$H = \sum_\alpha \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha - e_\alpha \vec{A}(\vec{q}_\alpha,t)\right]^2 + \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \left(\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2\right) \qquad \text{(XI-29)}$$

On peut comme plus haut décomposer $\vec{E}$ en $\vec{E}_{//}$ et $\vec{E}_\perp$ et aboutir à l'expression XI-21 puis XI-23 pour la contribution de $\vec{E}_{//}$. En utilisant (XI-24) et (XI-25), on obtient finalement pour H :

$$\boxed{H = \sum_\alpha \frac{1}{2m_\alpha}\left[\vec{p}_\alpha - e_\alpha A(\vec{q}_\alpha,t)\right]^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\alpha>\beta}\frac{e_\alpha e_\beta}{|\vec{q}_\alpha - \vec{q}_\beta|} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\left[\frac{\vec{\Pi}^2}{\varepsilon_0^2} + c^2(\vec{\nabla}\times\vec{A})^2\right]} \qquad \text{(XI-29)}$$

Comme $\vec{\Pi} = -\varepsilon_0 \vec{E}_\perp$ d'après XI-28, on voit que la dernière intégrale $\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \left(\vec{E}_\perp^2 + c^2\vec{B}^2\right)$ représente l'énergie du champ transverse. H représente la somme de cette energie, de l'energie cinétique des particules (1^er terme de XI-29) et de l'energie d'interaction electrostatique instantanée des diverses charges (2^e terme).

⑥ Elimination de U (et $\vec{E}_{//}$) dans l'impulsion totale $\vec{\mathcal{P}}$

- Partons de l'expression (X-27) de $\vec{\mathcal{P}}$:

$$\vec{\mathcal{P}} = \sum_\alpha \left[\vec{p}_\alpha - e_\alpha \vec{A}(\vec{q}_\alpha,t)\right] + \varepsilon_0 \int d^3r\ \vec{E}\times\vec{B} \qquad \text{(XI-30)}$$

et évaluons la contribution de $\vec{E}_{//} = -\vec{\nabla} U$

$$\varepsilon_0 \int d^3r\ \vec{E}_{//}\times\vec{B} = -\varepsilon_0\int d^3r\ \vec{\nabla}U\times\vec{B} \qquad \text{(XI-31)}$$

La composante sur i de (XI-31) s'écrit :

$$-\varepsilon_0\, \varepsilon_{ijk}\, B_k (\partial_j U) \qquad \text{(XI-32)}$$

Utilisons $\varepsilon_{ijk} B_k = \partial_i A_j - \partial_j A_i$. Il vient pour (XI-32)

$$-\varepsilon_0 (\partial_i A_j)(\partial_j U) + \varepsilon_0 (\partial_j A_i)(\partial_j U) \qquad \text{(XI-33)}$$

- 1^er terme de XI-33 : après intégration par parties, il devient

$$-\varepsilon_0(\partial_i A_j)(\partial_j U) = \underbrace{-\varepsilon_0 \partial_j\left[U(\partial_i A_j)\right]}_{\to \text{ intégrale de surface nulle}} + \underbrace{\varepsilon_0 U \partial_i \partial_j A_j}_{=0 \text{ car } \partial_j A_j = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0}$$

2^ème terme de XI-33 : après intégrations par parties, il devient :

$$\varepsilon_0(\partial_j A_i)(\partial_j U) = \underbrace{\varepsilon_0 \partial_j\left[A_i(\partial_j U)\right]}_{\to \text{ intégrale de surface nulle}} \underbrace{- \varepsilon_0 A_i \partial_j \partial_j U}_{= -\varepsilon_0 A_i \Delta U = A_i \rho \text{ (d'après XI-13)}}$$

- On a finalement

$$\varepsilon_0\int d^3r\, \vec{E}_{//}\times\vec{B} = \int d^3r\ \vec{A}(\vec{r},t)\,\rho(\vec{r},t) = \sum_\alpha e_\alpha \vec{A}(\vec{q}_\alpha,t) \qquad \text{(XI-34)}$$

(XI-34) compense partiellement le 1er terme de (XI-30) et $\vec{\mathcal{P}}$ s'écrit :

$$\boxed{\vec{\mathcal{P}} = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha + \varepsilon_0 \int d^3r \ \vec{E}_\perp \times \vec{B}} \qquad (XI-35)$$

L'impulsion totale du système est donc la somme des impulsions des particules et de l'impulsion du champ transverse.
On voit également que, dans la jauge de Coulomb, la différence entre l'impulsion et la quantité de mouvement des particules a une interprétation physique simple : c'est l'impulsion liée à la partie longitudinale du champ électrique que les particules entraînent "rigidement" avec elles.

⑦ Elimination de U (et $\vec{E}_{/\!/}$) dans le moment cinétique total $\vec{J}$.

On pourrait procéder comme plus haut à partir de l'expression (X-48) de $\vec{J}$.

. Il est plus simple ici d'imaginer que l'on refait tous les calculs des § XB1 et XB2 en partant du lagrangien XI-26. On obtient alors une expression identique à (X-46) à ceci près que $\vec{E}$ doit être remplacé par $\vec{E}_\perp$ puisque, d'après XI-28, le moment conjugué de XI-28, compte tenu du lagrangien XI-26, est $-\varepsilon_0 \vec{E}_\perp$ et non $-\varepsilon_0 \vec{E}$.

$$\vec{J} = \sum_\alpha \vec{q}_\alpha \times \vec{p}_\alpha + \varepsilon_0 \int d^3r \ \vec{r} \times (\vec{E}_\perp \times \vec{B}) - \varepsilon_0 \int d^3r \ (\vec{r} \times \vec{A})(\vec{\nabla}.\vec{E}_\perp) \qquad (XI-36)$$

Le dernier terme de (XI-36) est évidemment nul puisque la divergence d'un champ de vecteurs transverses est nulle et l'on a finalement

$$\boxed{\vec{J} = \sum_\alpha \vec{q}_\alpha \times \vec{p}_\alpha + \varepsilon_0 \int d^3r \ \vec{r} \times (\vec{E}_\perp \times \vec{B})} \qquad (XI-37)$$

On peut faire à propos de (XI-37) les mêmes commentaires physiques qu'à propos de (XI-35).