5.3.74

V – Lois de conservation pour un système de charges et de champs en interaction.

But de ce § : Introduire, à partir des formalismes lagrangien et hamiltonien, des grandeurs physiques importantes, relatives à un système de charges et de champs en interaction, et qui sont des constantes du mouvement : impulsion totale, moment cinétique total, énergie totale.

A – Impulsion totale.

① – Variation de l'action lors d'une translation infinitésimale des axes de coordonnées

a – Transformation des coordonnées du système global.

Translatons le système d'axes d'une quantité infinitésimale $\vec{\eta}$, sans toucher, ni aux champs, ni aux charges. Quelles sont les nouvelles valeurs des coordonnées $\vec{q}_\alpha$, $\vec{A}(\vec{r},t)$, $U(\vec{r},t)$ dans le nouveau système d'axes ?

–
$$\vec{q}_\alpha \longrightarrow \vec{q}_\alpha{}' = \vec{q}_\alpha - \vec{\eta} \qquad (X-1)$$

– $\vec{A}(\vec{r},t) \to \vec{A}'(\vec{r},t)$ avec $\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}'(\vec{r}\,',t)$ lorsque $\vec{r}\,' = \vec{r} - \eta$

On en déduit :
$$\vec{A}(\vec{r},t) \longrightarrow \vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r}+\vec{\eta},t) \qquad (X-2)$$

– On a de même :
$$U(\vec{r},t) \longrightarrow U'(\vec{r},t) = U(\vec{r}+\vec{\eta},t) \qquad (X-3)$$

b – Transformation de $\vec{J}$, ρ et des champs $\vec{E}$, $\vec{B}$

– D'après (X-1), $\dot{\vec{q}}_\alpha$ ne change pas car $\vec{\eta}$ ne dépend pas de t.
$$\dot{\vec{q}}_\alpha \to \dot{\vec{q}}_\alpha{}' = \dot{\vec{q}}_\alpha \qquad (X-4)$$

D'après (VIII-11), $\vec{J}(\vec{r},t) = \sum_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha\, \delta(\vec{r} - \vec{q}_\alpha(t))$. En portant dans cette formule (X-1) et (X-4), on obtient :
$$\vec{J}(\vec{r},t) \to \vec{J}'(\vec{r},t) = \sum_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha{}'\, \delta(\vec{r} - \vec{q}_\alpha{}'(t)) = \sum_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha\, \delta(\vec{r}+\vec{\eta} - \vec{q}_\alpha(t)) = \vec{J}(\vec{r}+\vec{\eta},t) \qquad (X-5)$$

Donc le champ de vecteurs $\vec{J}(\vec{r},t)$ se transforme comme le champ de vecteurs $\vec{A}(\vec{r},t)$.

– On trouve de même que :
$$\rho(\vec{r},t) \longrightarrow \rho'(\vec{r},t) = \rho(\vec{r}+\vec{\eta},t) \qquad (X-6)$$

– Enfin, le même raisonnement que celui fait plus haut pour $\vec{A}$ donne :
$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &\to \vec{E}'(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r}+\vec{\eta},t) \\ \vec{B}(\vec{r},t) &\longrightarrow \vec{B}'(\vec{r},t) = \vec{B}(\vec{r}+\vec{\eta},t) \end{aligned} \qquad (X-7)$$

c – Transformation du Lagrangien (voir formules VIII-13 et VIII-14).

– Terme $\frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha^{\,2}$: D'après (X-4), il ne change pas.

– Terme $\int d^3r \left[\vec{A}(\vec{r},t).\vec{J}(\vec{r},t) - U(\vec{r},t)\,\rho(\vec{r},t)\right]$. En utilisant (X-2, 3, 5, 6), on voit que ce terme devient
$$\int d^3r \left[\vec{A}(\vec{r},t).\vec{J}(\vec{r},t) - U(\vec{r},t)\,\rho(\vec{r},t)\right] \longrightarrow \int d^3r \left[\vec{A}(\vec{r}+\vec{\eta},t).\vec{J}(\vec{r}+\vec{\eta},t) - U(\vec{r}+\vec{\eta},t)\,\rho(\vec{r}+\vec{\eta},t)\right]$$

En posant $\vec{r}\,' = \vec{r}+\vec{\eta}$, et en utilisant le fait que $d^3r' = d^3r$, on voit que ce terme ne change pas.

– Terme $\frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r \left[\vec{E}(\vec{r},t)^2 - c^2\,\vec{B}(\vec{r},t)^2\right]$. Un raisonnement identique montre qu'il ne change pas.

Les résultats précédents étaient d'ailleurs assez évidents : l'intégrale spatiale du produit ~~de 2 et~~ scalaire de 2 champs de vecteurs, ou du produit de 2 champs scalaires est invariante par translation des axes.

– En conclusion, le lagrangien $L(t)$ est invariant lors de la translation du système d'axes. Ceci est dû au fait que L ne dépend pas explicitement des coordonnées x, y, z.

$$L(t) \longrightarrow L'(t) = L(t) \qquad (X-8)$$

d – Variation de l'action (1ère méthode).

– Comme L ne change pas, il en est de même pour S :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\; L \;\rightarrow\; S' = \int_{t_1}^{t_2} dt\; L' = S \qquad (X-9)$$

– On a par suite :

$$\delta S = 0 \qquad (X-10)$$

e – Variation de l'action (2ème méthode).

– Principe du calcul : On calcule l'action dans le nouveau système d'axes à partir des nouvelles valeurs au point $\vec{r}$, $\vec{A}'(\vec{r})$ et $U'(\vec{r})$, des potentiels (voir X-2 et X-3), et des nouvelles valeurs, $\vec{q}'_\alpha$, des coordonnées (voir X-1). La variation δS de l'action par rapport à l'ancienne valeur peut donc être également considérée comme résultant d'une variation de $\vec{q}_\alpha$, $\vec{A}(\vec{r},t)$, $U(\vec{r},t)$, calculable à partir de X-1, X-2, X-3

$$\left\{\begin{array}{l}
\delta\vec{q}_\alpha = \vec{q}'_\alpha - \vec{q}_\alpha = -\vec{\eta} \\
\delta\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}'(\vec{r},t) - \vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r}+\vec{\eta},t) - \vec{A}(\vec{r},t) = (\vec{\eta}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}(\vec{r},t) \\
\delta U(\vec{r},t) = U'(\vec{r},t) - U(\vec{r},t) = U(\vec{r}+\vec{\eta},t) - U(\vec{r},t) = \vec{\eta}\cdot\vec{\nabla}U(\vec{r},t)
\end{array}\right. \qquad (X-11)$$

– D'après la notion de dérivée fonctionnelle (voir § II), la variation correspondante δL du lagrangien s'écrit

$$\delta L = \sum_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{q}_\alpha}\cdot\delta\vec{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_\alpha}\cdot\delta\dot{\vec{q}}_\alpha\right) + \int d^3r\left(\frac{\delta L}{\delta \vec{A}}\cdot\delta\vec{A} + \frac{\delta L}{\delta \dot{\vec{A}}}\cdot\delta\dot{\vec{A}} + \frac{\delta L}{\delta U}\,\delta U\right) \qquad (X-12)$$

(on a utilisé le fait que $\frac{\delta L}{\delta \dot{U}} = 0$)

– Pour calculer δS intégrons (X-12) entre t_1 et t_2. Une intégration par parties sur les termes en $\delta\dot{\vec{q}}_\alpha$ et $\delta\dot{\vec{A}}$ donne :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\sum_\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{q}_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_\alpha}\right)\cdot\delta\vec{q}_\alpha + \int d^3r\left(\frac{\delta L}{\delta\vec{A}} - \frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta\dot{\vec{A}}}\right)\cdot\delta\vec{A} + \int d^3r\,\frac{\delta L}{\delta U}\,\delta U\right]$$
$$+ \left[\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_\alpha}\cdot\delta\vec{q}_\alpha + \int d^3r\,\frac{\delta L}{\delta\dot{\vec{A}}}\cdot\delta\vec{A}\right]_{t_1}^{t_2} \qquad (X-13)$$

A la différence de ce que nous avons rencontré jusqu'ici, le terme tout intégré obtenu lors de l'intégration par parties (2ème ligne de X-13) ne s'annule pas car les variations $\delta\vec{q}_\alpha$ et $\delta\vec{A}$ données en (X-11) ne s'annulent pas aux extrémités.

② - Cas d'un mouvement réel du système - Définition de l'impulsion totale.

a - Existence d'une constante du mouvement.

Jusqu'ici nous n'avons fait aucune hypothèse sur les fonctions $\vec{q}_\alpha(t)$, $\vec{A}(\vec{r},t)$, $U(\vec{r},t)$. Supposons maintenant qu'elles correspondent à un mouvement réel du système, c-à-d soient solutions des équations de Lagrange.

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{q}_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_\alpha} = \frac{\delta L}{\delta \vec{A}} - \frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{\vec{A}}} = \frac{\delta L}{\delta U} = 0 \qquad (X-14)$$

La 1ère ligne de X-13 s'annule alors et δS se réduit au terme tout intégré (2ème ligne). Comme on sait par ailleurs (cf formule X-10) que $\delta S = 0$, on voit que la quantité :

$$\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_\alpha}\cdot\delta\vec{q}_\alpha + \int d^3r\ \frac{\delta L}{\delta \dot{\vec{A}}}\cdot\delta\vec{A} \qquad (X-15)$$

(où $\delta\vec{q}_\alpha$ et $\delta\vec{A}$ sont donnés en X-11) prend la même valeur en t_1 et en t_2. Comme t_1 et t_2 sont quelconques, cette quantité est une constante du mouvement.

b - Définition de l'impulsion globale $\vec{\mathcal{P}}$.

En utilisant les définitions $\vec{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}_\alpha}$ et $\vec{\Pi}(\vec{r},t) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\vec{A}}(\vec{r},t)}$ des moments conjugués de $\vec{q}_\alpha$ et $\vec{A}$, ainsi que les expressions (X-11) de $\delta\vec{q}_\alpha$ et $\delta\vec{A}$, on obtient pour cette constante du mouvement

$$-\vec{\eta}\cdot\sum_\alpha \vec{p}_\alpha + \int d^3r \sum_j \Pi_j\,(\vec{\eta}\cdot\vec{\nabla})\,A_j \qquad (X-16)$$

(X-16) représente la projection sur le vecteur $-\vec{\eta}$ du vecteur

$$\vec{\mathcal{P}} = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha - \int d^3r \sum_j \Pi_j\,\vec{\nabla} A_j \qquad (X-17)$$

Comme $\vec{\eta}$ est quelconque, les 3 composantes du vecteur $\vec{\mathcal{P}}$, appelé <u>impulsion totale</u> du système charges + champs, sont des constantes du mouvement.

c - Autre expression équivalente de $\vec{\mathcal{P}}$.

La composante sur l'axe i de $\vec{\mathcal{P}}$ s'écrit (convention de sommation sur indices répétés) :

$$\mathcal{P}_i = \sum_\alpha p_{\alpha i} - \int d^3r\ \Pi_j\,\partial_i A_j \qquad (X-18)$$

Utilisons l'égalité démontrée plus haut (cf VIII-38)

$$\partial_i A_j = \partial_j A_i + \varepsilon_{ijk}(\vec{\nabla}\times\vec{A})_k = \partial_j A_i + \varepsilon_{ijk}\,B_k \qquad (X-19)$$

En reportant (X-19) dans (X-18), on obtient

$$\mathcal{P}_i = \sum_\alpha p_{\alpha i} - \int d^3r\ \Pi_j\,\partial_j A_i - \int d^3r\ \underbrace{\varepsilon_{ijk}\,\Pi_j\,B_k}_{=(\vec{\Pi}\times\vec{B})_i} \qquad (X-20)$$

Intégrons par parties le 2ème terme :

$$-\int d^3r\ \Pi_j\,\partial_j A_i = \underbrace{-\int d^3r\ \partial_j\,\Pi_j A_i}_{\text{Transf. en 1 intégrale de surface nulle pour } r\to\infty} + \int d^3r\ A_i\,\partial_j\,\Pi_j \qquad (X-21)$$

Finalement, on obtient, en remplaçant $\vec{\Pi}$ par $-\varepsilon_0\vec{E}$ (cf IX-18) :

$$\vec{\mathcal{P}} = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha + \varepsilon_0\int d^3r\ \vec{E}\times\vec{B} - \varepsilon_0\int d^3r\ \vec{A}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) \qquad (X-22)$$

d - Discussion physique.

Pour voir ce que représente la valeur du 3e terme de (X-22), utilisons le fait que nous nous intéressons à un mouvement réel du système pour lequel on a

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (X-23)$$

Portons X-23 dans X-22 et utilisons l'expression de $\rho(\vec{r},t)$ (cf VIII-10) :

$$\rho(\vec{r},t) = \sum_\alpha e_\alpha\, \delta(\vec{r}-\vec{q}_\alpha(t)) \qquad (X-24)$$

On obtient pour le 3ème terme de (X-22) :

$$-\int d^3r\ \vec{A}(\vec{r},t)\sum_\alpha e_\alpha\, \delta(\vec{r}-\vec{q}_\alpha(t)) = -\sum_\alpha e_\alpha\, \vec{A}(\vec{q}_\alpha,t) \qquad (X-25)$$

On peut regrouper ce terme avec le 1er terme de (X-22) et faire apparaître

$$\vec{p}_\alpha - e_\alpha \vec{A}(\vec{q}_\alpha,t) = m_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha \qquad (X-26)$$

c-à-d la quantité de mouvement de la particule α (cf IX-16). Finalement, la valeur de $\vec{\mathcal{P}}$ pour un mouvement réel s'écrit :

$$\vec{\mathcal{P}} = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha + \varepsilon_0 \int d^3r\ \vec{E}\times\vec{B} \qquad (X-27)$$

$\vec{\mathcal{P}}$ est donc égal à la somme des quantités de mouvement des particules et de l'intégrale du vecteur de Poynting.

B - Moment cinétique total.

Nous reprenons le raisonnement du § A en l'appliquant à une rotation infinitésimale du système d'axes, d'angle $d\varphi$ autour du vecteur unitaire $\vec{\omega}$.

(1) Variation de l'action lors d'une rotation du système d'axes.

a - Transformation des coordonnées.

- $$\vec{q}_\alpha \longrightarrow \vec{q}\,'_\alpha = \mathcal{R}\vec{q}_\alpha = \vec{q}_\alpha - d\varphi\, \vec{\omega}\times\vec{q}_\alpha \qquad (X-28)$$

- $$\vec{A}(\vec{r},t) \to \vec{A}'(\vec{r},t) \quad \text{avec} \quad \vec{A}'(\mathcal{R}\vec{r},t) = \mathcal{R}\,\vec{A}(\vec{r},t) \qquad (X-29)$$

En effet, les composantes de $\vec{A}'$, au point qui a pour coordonnées dans le nouveau système d'axes $\mathcal{R}\vec{r}$, s'obtiennent en faisant la rotation $\mathcal{R}$ sur les composantes de $\vec{A}$ au même point de l'espace ~~[illegible]~~, de coordonnées $\vec{r}$ dans l'ancien système. (X-29) peut encore s'écrire

$$\vec{A}(\vec{r},t) \to \vec{A}'(\vec{r},t) = \mathcal{R}\,\vec{A}(\mathcal{R}^{-1}\vec{r},t) \qquad (X-30)$$

c-à-d, si l'on utilise la forme de $\mathcal{R}$ pour une rotation infinitésimale :

$$\vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r}+d\varphi\,\vec{\omega}\times\vec{r},t) - d\varphi\,\vec{\omega}\times\vec{A}(\vec{r}+d\varphi\,\vec{\omega}\times\vec{r},t) \qquad (X-31)$$

En effectuant un développement de Taylor de $\vec{A}$ au voisinage de r :

$$\vec{A}(\vec{r}+d\varphi\,\vec{\omega}\times\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + d\varphi\left((\vec{\omega}\times\vec{r}).\vec{\nabla}\right)\vec{A}(\vec{r},t) \qquad (X-32)$$

et en ne gardant que les termes d'ordre 1 en $d\varphi$, on obtient :

$$\vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + d\varphi\left[-\vec{\omega}\times\vec{A}(\vec{r},t) + \left(\vec{\omega}.(\vec{r}\times\vec{\nabla})\right)\vec{A}(\vec{r},t)\right] \qquad (X-33)$$

(on a utilisé $(\vec{\omega}\times\vec{r}).\vec{\nabla} = \vec{\omega}.(\vec{r}\times\vec{\nabla})$).

- On trouve de même

$$U(\vec{r},t) \longrightarrow U'(\vec{r},t) = U(\mathcal{R}^{-1}\vec{r},t) = U(\vec{r},t) + d\varphi\,\vec{\omega}.\left(\vec{r}\times\vec{\nabla}\,U(\vec{r},t)\right) \qquad (X-34)$$

b - Transformation de $\vec{J}, \rho, \vec{E}, \vec{B}$.

$\vec{J}, \vec{E}, \vec{B}$ se transforment comme $\vec{A}$, ρ comme U.

c - Transformation du Lagrangien.

- Dans la rotation le module de $\dot{\vec{q}}_\alpha$ ne change pas. Donc $\frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha^{\,2}$ ne change pas.
- L'intégrale dans tout l'espace du produit scalaire de 2 champs vectoriels comme $\int d^3r\ \vec{J}.\vec{A}$ ou $\int d^3r\ \vec{E}.\vec{E}$ ou $\int d^3r\ \vec{B}.\vec{B}$ est invariante par rotation. Il en est de même de l'intégrale du produit de 2 champs scalaires comme $\int d^3r\ \rho\, U$
- Le lagrangien L est donc invariant par rotation

d – Variation de l'action (1ère méthode)

Il découle du § c précédent que : $\delta S = 0$ (X-35)

e – Variation de l'action (2ème méthode)

Calculons la variation δS de l'action correspondant aux variations

$$\begin{cases} \delta \vec{q}_\alpha = \vec{q}\,'_\alpha - \vec{q}_\alpha = -d\varphi \ \vec{\omega} \times \vec{q}_\alpha \\ \delta \vec{A} = \vec{A}'(\vec{r},t) - \vec{A}(\vec{r},t) = d\varphi \left[-\vec{\omega} \times \vec{A} + \left(\vec{\omega}\cdot(\vec{r}\times\vec{\nabla})\right)\vec{A} \right] \\ \delta U = U'(\vec{r},t) - U(\vec{r},t) = d\varphi \left(\vec{\omega}\cdot(\vec{r}\times\vec{\nabla})\right) U \end{cases} \qquad (X-36)$$

Un calcul en tout point identique à celui du § A1e précédent redonne (X-13), la seule différence étant que $\delta\vec{q}_\alpha$ et $\delta\vec{A}$ sont maintenant donnés par (X-36) au lieu de (X-11).

② Cas d'un mouvement réel du système – Définition du moment cinétique total $\vec{J}$.

a – Existence d'une constante du mouvement. Définition de $\vec{J}$.

Le même raisonnement que celui fait au § A2a montre que la quantité X-15 où $\delta\vec{q}_\alpha$ et $\delta\vec{A}$ sont donnés par (X-36) est une constante du mouvement. En portant X-36 dans X-15 et en utilisant les définitions de $\vec{p}_\alpha$ et $\vec{\Pi}$, on obtient pour cette constante du mouvement :

$$-d\varphi \left\{ \sum_\alpha \underbrace{\vec{p}_\alpha\cdot(\vec{\omega}\times\vec{q}_\alpha)}_{=\vec{\omega}\cdot(\vec{q}_\alpha\times\vec{p}_\alpha)} + \int d^3r \left[\underbrace{\vec{\Pi}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{A})}_{=\vec{\omega}\cdot(\vec{A}\times\vec{\Pi})} - \sum_k \Pi_k \left(\vec{\omega}\cdot(\vec{r}\times\vec{\nabla})\right) A_k \right] \right. \qquad (X-37)$$

On obtient la projection sur le vecteur $-\vec{\omega}\,d\varphi$ du vecteur

$$\vec{J} = \sum_\alpha \vec{q}_\alpha \times \vec{p}_\alpha + \int d^3r \left[\vec{A}\times\vec{\Pi} - \sum_k \Pi_k (\vec{r}\times\vec{\nabla})\, A_k \right] \qquad (X-38)$$

$\vec{J}$ est le moment cinétique total. Ses 3 composantes sont des constantes du mouvement.

b – Autre expression équivalente de $\vec{J}$.

- La composante sur i de $\vec{J}$ s'écrit (sommation sur indices répétés) :

$$J_i = \left(\sum_\alpha \vec{q}_\alpha\times\vec{p}_\alpha\right)_i + \int d^3r \left[(\vec{A}\times\vec{\Pi})_i - \varepsilon_{ij\ell}\, \Pi_k\, r_j\, \partial_\ell A_k \right] \qquad (X-39)$$

- D'après X-19,

$$\partial_\ell A_k = \partial_k A_\ell + \varepsilon_{\ell k m} B_m \qquad (X-40)$$

Reportons (X-40) dans le dernier terme de X-39

$$-\varepsilon_{ij\ell}\,\Pi_k\, r_j\, \partial_\ell A_k = -\varepsilon_{ij\ell}\,\Pi_k\, r_j\, \partial_k A_\ell - \varepsilon_{ij\ell}\,\varepsilon_{\ell k m}\,\Pi_k\, r_j\, B_m \qquad (X-41)$$

Reporté dans (X-39), le 2° terme de X-41 donne

$$-\int d^3r\, \varepsilon_{ij\ell}\, r_j \underbrace{(\varepsilon_{\ell k m}\Pi_k B_m)}_{(\vec{\Pi}\times\vec{B})_\ell} = -\int d^3r \left(\vec{r}\times(\vec{\Pi}\times\vec{B})\right)_i = \varepsilon_0 \int d^3r \left(\vec{r}\times(\vec{E}\times\vec{B})\right)_i \qquad (X-42)$$

Reporté dans (X-39), le 1er terme de X-41 donne après une intégration par parties :

$$-\int d^3r\, \underbrace{\partial_k\left(\varepsilon_{ij\ell}\,\Pi_k\, r_j\, A_\ell\right)}_{\text{Transformation en une intégrale de surface nulle}} + \int d^3r\, \varepsilon_{ij\ell}\, A_\ell\, \partial_k(\Pi_k r_j) \qquad (X-43)$$

Comme $\quad \partial_k(\Pi_k r_j) = r_j(\partial_k \Pi_k) + \Pi_k \underbrace{\partial_k r_j}_{=\delta_{ij}} = r_j(\vec{\nabla}.\vec{\Pi}) + \Pi_j \qquad (X-44)$

on obtient pour le dernier terme de (X-43) :

$$\int d^3r \left[\varepsilon_{ijl}\ r_j A_l\ (\vec{\nabla}.\vec{\Pi}) + \varepsilon_{ijl}\ \Pi_j A_l\right] = \int d^3r \left[(\vec{\nabla}.\vec{\Pi})(\vec{r}\times\vec{A})_i - (\vec{A}\times\vec{\Pi})_i\right] \qquad (X-45)$$

- En utilisant (X-39), (X-41), (X-42), (X-43) et (X-45), on voit finalement que $\vec{J}$ peut s'écrire

$$\vec{J} = \sum_\alpha \vec{q}_\alpha \times \vec{p}_\alpha + \varepsilon_0 \int d^3r\ \vec{r}\times(\vec{E}\times\vec{B}) - \varepsilon_0 \int d^3r\ (\vec{r}\times\vec{A})(\vec{\nabla}.\vec{E}) \qquad (X-46)$$

c - Discussion physique.

- Dans un mouvement réel du système, $\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$. En reportant (X-23) et (X-24) dans le dernier terme de (X-46), on voit que ce dernier terme s'écrit

$$- \sum_\alpha e_\alpha\ \vec{q}_\alpha \times \vec{A}(\vec{q}_\alpha, t) \qquad (X-47)$$

- En regroupant (X-47) avec le 1er terme de (X-46) et en utilisant (X-26), on obtient pour $\vec{J}$:

$$\vec{J} = \sum_\alpha \vec{q}_\alpha \times m_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha + \varepsilon_0 \int d^3r\ \vec{r}\times(\vec{E}\times\vec{B}) \qquad (X-48)$$

$\vec{J}$ est la somme des moments des quantités de mouvement des particules et de l'intégrale du moment du vecteur de Poynting.

C - Energie totale.

On translate l'axe des temps d'une quantité infinitésimale ε.

(1) Variation de l'action lors d'une translation infinitésimale de l'axe des temps.

a - Transformation des coordonnées.

$$\begin{cases} \vec{q}_\alpha(t) \rightarrow \vec{q}\,'_\alpha(t) = \vec{q}_\alpha(t+\varepsilon) \\ \vec{A}(\vec{r},t) \rightarrow \vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t+\varepsilon) \\ U(\vec{r},t) \rightarrow U'(\vec{r},t) = U(\vec{r},t+\varepsilon) \end{cases} \qquad (X-49)$$

+ Formules analogues pour $\vec{J}, \rho, \vec{E}, \vec{B}$

b - Transformation du Lagrangien.

Comme le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps

$$L(t) \rightarrow L'(t) = L(t+\varepsilon) \qquad (X-50)$$

c - Variation de l'action (1ère méthode).

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} L(t+\varepsilon)\,dt = \int_{t_1+\varepsilon}^{t_2+\varepsilon} L(t)\,dt$$

$$= \underbrace{\int_{t_1+\varepsilon}^{t_1} L(t)\,dt}_{-\varepsilon L(t_1)} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} L(t)\,dt}_{S} + \underbrace{\int_{t_2}^{t_2+\varepsilon} L(t)\,dt}_{\varepsilon L(t_2)} \qquad (X-51)$$

On a donc

$$\delta S = S' - S = \varepsilon\left[L(t_2) - L(t_1)\right] \qquad (X-52)$$

d - Variation de l'action (2ème méthode)

$$\begin{cases} \delta \vec{q}_\alpha = \vec{q}\,'_\alpha(t) - \vec{q}_\alpha(t) = \vec{q}_\alpha(t+\varepsilon) - \vec{q}_\alpha(t) = \varepsilon\, \dot{\vec{q}}_\alpha(t) \\ \delta \vec{A} = \vec{A}'(\vec{r},t) - \vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t+\varepsilon) - \vec{A}(\vec{r},t) = \varepsilon\, \dot{\vec{A}}(\vec{r},t) \\ \delta U = U'(\vec{r},t) - U(\vec{r},t) = \varepsilon\, \dot{U}(\vec{r},t) \end{cases} \qquad (X-53)$$

Un calcul analogue à celui du § A 1 c conduit à la formule X-13 où δq_α et $\delta \vec{A}$ sont donnés par X-53

(2) Cas d'un mouvement réel du système - Définition de l'énergie totale -

a - Existence d'une constante du mouvement.

Pour un mouvement réel du système, la 1ère ligne de X-13 s'annule. On égale alors la 2ème ligne de X-13 (où $\delta \vec{q}_\alpha$ et $\delta \vec{A}$ sont donnés par X-53) à X-52. Il vient ainsi (après avoir introduit $\vec{p}_\alpha$ et $\vec{\Pi}$) :

$$\varepsilon \left[L(t) \right]_{t_1}^{t_2} = \varepsilon \left[\sum_\alpha \vec{p}_\alpha \cdot \dot{\vec{q}}_\alpha + \int d^3r\, \vec{\Pi} \cdot \dot{\vec{A}} \right]_{t_1}^{t_2} \qquad (X-54)$$

La quantité

$$\sum_\alpha \vec{p}_\alpha \cdot \dot{\vec{q}}_\alpha + \int d^3r\, \vec{\Pi} \cdot \dot{\vec{A}} - L \qquad (X-55)$$

est donc une constante du mouvement. Ce n'est autre que l'hamiltonien H déjà introduit au § IV. H représente l'énergie totale du système charges + champs.

b - Discussion physique

Reprenons l'expression IX-21 de H. Faisons une intégration par parties sur le dernier terme :

$$-\int d^3r\, \vec{\Pi} \cdot \vec{\nabla} U = \underbrace{-\int d^3r\, \vec{\nabla}(\vec{\Pi} U)}_{\text{Transformation en une intégrale de surface nulle}} + \int d^3r\, U(\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}) \qquad (X-56)$$

Dans un mouvement réel du système, nous avons vu que $\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} = -\rho$. Remplaçons donc dans le dernier terme de (X-56) $\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}$ par $-\rho$ et utilisons l'expression X-24 de ρ. On obtient

$$-\int d^3r\, \vec{\Pi} \cdot \vec{\nabla} U = \int d^3r\, U(\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}) = -\int d^3r\, U(\vec{r},t)\, \rho(\vec{r},t) = -\sum_\alpha e_\alpha U(q_\alpha, t) \qquad (X-57)$$

Dans un mouvement réel, le dernier terme de IX-21 compense donc le second et le hamiltonien vaut donc, compte tenu de (X-26) :

$$H = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{q}}_\alpha^{\,2} + \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r\, (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) \qquad (X-58)$$

L'énergie totale du système charges + champs est la somme des énergies cinétiques des particules et de l'intégrale de la densité d'énergie du champ $\frac{\varepsilon_0}{2}(\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2)$.