18/12/73

Réinterprétation "quantique" des équations de Maxwell

But de ce §
Introduire à partir des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ une fonction $\vec{\alpha}(\vec{k},t)$ dont on montre qu'elle peut être interprétée comme la fonction d'onde des photons dans l'espace des $\vec{k}$.

1_Transformées de Fourier des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

- Equations de Maxwell

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},t)=0 \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{r},t)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r},t) \\ \vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} \end{cases} \qquad (1)$$

- Transformées de Fourier

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r},t) = \int d^3k\ \vec{\mathcal{E}}(\vec{k},t)\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ \vec{B}(\vec{r},t) = \int d^3k\ \vec{\mathcal{B}}(\vec{k},t)\ e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \end{cases} \qquad (2)$$

- Conditions de realité. Le fait que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ soient réels entraine :

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{k},t) = \vec{\mathcal{E}}^*(-\vec{k},t)$$
$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{k},t) = \vec{\mathcal{B}}^*(-\vec{k},t) \qquad (3)$$

- Equations de Maxwell dans l'espace des $\vec{k}$

$$\begin{cases} \vec{k}\cdot\vec{\mathcal{E}}(\vec{k},t)=0 \\ \vec{k}\cdot\vec{\mathcal{B}}(\vec{k},t)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{k}\times\vec{\mathcal{E}}(\vec{k},t) = i\dot{\vec{\mathcal{B}}}(\vec{k},t) \\ \vec{k}\times\vec{\mathcal{B}}(\vec{k},t) = -\frac{i}{c^2}\dot{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{k},t) \end{cases} \qquad (4)$$

- Passage des variables $\{\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{B}}\}$ aux variables $\{\vec{\mathcal{E}},\dot{\vec{\mathcal{E}}}\}$

En utilisant $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ (5)

on peut réécrire la dernière équation de Maxwell sous la forme

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{k},t) = i\,\frac{\vec{k}}{\omega^2}\times\dot{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{k},t) \qquad \omega = ck \qquad (6)$$

ce qui permet de se debarasser de $\vec{\mathcal{B}}$ au profit de $\dot{\vec{\mathcal{E}}}$

- Equations du mouvement

En reportant (6) dans la 3ème equation de Maxwell (4), on obtient :

$$\ddot{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{k},t) + \omega^2\,\vec{\mathcal{E}}(\vec{k},t) = 0 \qquad (7)$$

Ceci montre l'intérêt de passer dans l'espace des $\vec{k}$. Les $\vec{\mathcal{E}}(\vec{k},t)$ sont des variables "normales" decouplées qui évoluent independamment les unes des autres.

2 - Developpement en ondes planes progressives.

- A partir de $\vec{\mathcal{E}}$, $\dot{\vec{\mathcal{E}}}$ introduisons la fonction vectorielle $\vec{\alpha}$ par :

$$2N(k)\,\vec{\alpha}(\vec{k},t) = \vec{\mathcal{E}}(\vec{k},t) + \frac{i}{\omega}\,\dot{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{k},t) \qquad (8)$$

où $N(k)$ est un coefficient de normalisation qui sera precisé plus loin

- Reecrivons (8) en remplacant $\vec{k}$ par $-\vec{k}$ [On suppose $N(k) = N(-k)$]

$$2\,N(k)\,\vec{\alpha}(-\vec{k},t) = \vec{\mathcal{E}}(-\vec{k},t) + \frac{i}{\omega^2}\,\dot{\vec{\mathcal{E}}}(-\vec{k},t) \qquad (9)$$

- Utilisons les conditions de réalité (3) pour réécrire (9) sous la forme :

$$2\,N(k)\,\alpha^*(-\vec{k},t) = \mathcal{E}(\vec{k},t) - \frac{i}{\omega^2}\,\dot{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{k},t) \qquad (10)$$

- On peut utiliser (8) et (10) pour exprimer $\vec{\mathcal{E}}$ et $\dot{\vec{\mathcal{E}}}$ en fonction de $\vec{\alpha}$

$$\left\{\begin{array}{ll} \vec{\mathcal{E}}(\vec{k},t) = N(k)\left[\vec{\alpha}(\vec{k},t) + \vec{\alpha}^*(-\vec{k},t)\right] & (11) \\ \dot{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{k},t) = -i\omega\,N(k)\left[\vec{\alpha}(\vec{k},t) - \vec{\alpha}^*(-\vec{k},t)\right] & (12) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} \vec{\mathcal{E}}(\vec{k},t) \\ \dot{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{k},t) \end{array}\right\} \underset{(11)\ (12)}{\overset{(8)}{\rightleftarrows}} \left\{\vec{\alpha}(\vec{k},t)\right\}$$

"L'état" du champ est tout aussi bien décrit par $\{\vec{E},\vec{B}\}$, que par $\{\vec{\mathcal{E}},\dot{\vec{\mathcal{E}}}\}$, ou que par $\{\vec{\alpha}(\vec{k},t)\}$

- Notons enfin que la 1ère équation de Maxwell donne :

$$\vec{k}\cdot\vec{\alpha}(\vec{k},t) = 0 \qquad (13)$$

- Equation du mouvement des $\vec{\alpha}$.

En utilisant $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\omega\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega\right)$

on peut réécrire (7) sous la forme

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2\right)\vec{\mathcal{E}}(\vec{k},t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\omega\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega\right)\mathcal{E}(\vec{k},t) = 0 \qquad (14)$$

Or, d'après (8), $\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega\right)\vec{\mathcal{E}}(\vec{k},t)$ est proportionnel à $\vec{\alpha}(\vec{k},t)$

Donc on peut réécrire (14) sous la forme $\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\omega\right)\vec{\alpha}(\vec{k},t) = 0$,

c-à-d, après multiplication par $\hbar$:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\vec{\alpha}(\vec{k},t) = \hbar\omega\,\vec{\alpha}(\vec{k},t) \qquad (15)$$

Réinterprétation de 15 comme une équation de Schrödinger dans l'espace des $\vec{k}$.

Nous allons maintenant réexprimer les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans l'espace des $\vec{r}$ en fonction de $\vec{\alpha}$.

– Expression de $\vec{E}(\vec{r},t)$ et $\vec{B}(\vec{r},t)$ en fonction des $\vec{\alpha}(\vec{k},t)$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \underbrace{\int d^3k\ N(k)\ \vec{\alpha}(\vec{k},t)\ e^{i\vec{k}.\vec{r}}}_{\substack{\vec{E}^{(+)}(\vec{r},t) \\ \text{composante de fréquence} > 0 \ (\text{en } e^{-i\omega t})}} + \underbrace{\int d^3k\ N(k)\ \vec{\alpha}^*(\vec{k},t)\ e^{-i\vec{k}.\vec{r}}}_{\substack{\vec{E}^{(-)}(\vec{r},t) \\ \text{composante de fréquence} < 0 \ (\text{en } e^{i\omega t})}} \qquad (16)$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \int d^3k\ \frac{N(k)}{\omega}\ \vec{k}\times\vec{\alpha}(\vec{k},t)\ e^{i\vec{k}.\vec{r}} + \int d^3k\ \frac{N(k)}{\omega}\ \vec{k}\times\vec{\alpha}^*(\vec{k},t)\ e^{-i\vec{k}.\vec{r}} \qquad (17)$$

3 – Energie du champ électromagnétique $\mathcal{H}_R$.

– Calcul de $\mathcal{H}_R = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\ (\vec{E}^2 + c^2\vec{B}^2)$ (18)

$$\begin{cases} \int d^3r\ \vec{E}(\vec{r}).\vec{E}(\vec{r}) = \int d^3r\ \vec{E}^*(\vec{r}).\vec{E}(\vec{r}) = (2\pi)^3\int d^3k\ \vec{\mathcal{E}}^*(\vec{k}).\vec{\mathcal{E}}(\vec{k}) & (19) \\ \int d^3r\ \vec{B}(\vec{r}).\vec{B}(\vec{r}) = (2\pi)^3\int d^3k\ \vec{\mathcal{B}}^*(\vec{k}).\vec{\mathcal{B}}(\vec{k}) & \text{(Parseval – Plancherel)} \end{cases}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{d}) - (\vec{a}.\vec{d})(\vec{b}.\vec{c}) \qquad (20)$$

$$\int d^3k\ \vec{\mathcal{B}}^*(\vec{k}).\vec{\mathcal{B}}(\vec{k}) = \frac{k^2}{\omega^4}\ \dot{\vec{\mathcal{E}}}^*(\vec{k}).\dot{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{k}) \qquad (21)$$

$$\mathcal{H}_R = \frac{\varepsilon_0}{2}(2\pi)^3\int d^3k\ \left[\vec{\mathcal{E}}^*(\vec{k}).\vec{\mathcal{E}}(\vec{k}) + \frac{1}{\omega^2}\ \dot{\vec{\mathcal{E}}}^*(\vec{k}).\dot{\vec{\mathcal{E}}}(\vec{k})\right]$$

$$= 2\varepsilon_0(2\pi)^3\int d^3k\ N^2(k)\ \vec{\alpha}^*(\vec{k}).\vec{\alpha}(\vec{k}) \qquad (22)$$

– Choix de $N(k)$ $\qquad N(k) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0(2\pi)^3}}$ (23)

$$\mathcal{H}_R = \int d^3k\ \hbar\omega\ \vec{\alpha}^*(\vec{k}).\vec{\alpha}(\vec{k}) \qquad (24)$$

– Réinterprétation de $\mathcal{H}_R$ comme la valeur moyenne d'un opérateur hamiltonien H

$$\begin{cases} \alpha_i(\vec{k}) = \langle\vec{k},i|\psi\rangle & i = x,y,z \\ \langle\vec{k},i|H|\vec{k}',j\rangle = \delta_{ij}\ \delta(\vec{k}-\vec{k}')\ \hbar\omega & (25) \\ \mathcal{H}_R = \langle\psi|H|\psi\rangle \end{cases}$$

$\int d^3k\ \vec{\alpha}^*(\vec{k}).\vec{\alpha}(\vec{k}) = 1$ Normalisation à 1 photon. (26)

4 – Impulsion du champ électromagnétique $\vec{\mathcal{P}}$

– Calcul de $\vec{\mathcal{P}} = \varepsilon_0\int d^3r\ \vec{E}(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{r}) = \varepsilon_0(2\pi)^3\int d^3k\ \vec{\mathcal{E}}(\vec{k})\times\vec{\mathcal{B}}^*(\vec{k})$ (27)

$$= -i\,\varepsilon_0(2\pi)^3\int d^3k\ \frac{\vec{k}}{\omega^2}\left(\vec{\mathcal{E}}(\vec{k}).\dot{\vec{\mathcal{E}}}^*(\vec{k})\right)$$

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}\int d^3k\ \hbar\vec{k}\ \left[\vec{\alpha}^*(\vec{k}).\vec{\alpha}(\vec{k}) - \vec{\alpha}^*(-\vec{k}).\alpha(-\vec{k}) - \vec{\alpha}(\vec{k}).\vec{\alpha}(-\vec{k}) - \vec{\alpha}^*(-\vec{k}).\vec{\alpha}^*(\vec{k})\right] \qquad (28)$$

$$\vec{\mathcal{P}} = \int d^3k\ \hbar\vec{k}\ \vec{\alpha}^*(\vec{k}).\vec{\alpha}(\vec{k}) \qquad (29)$$

– Réinterprétation de $\mathcal{P}$ comme la valeur moyenne de l'opérateur impulsion $\vec{P}$

$\langle i,\vec{k}|\vec{P}|j,\vec{k}'\rangle = \delta_{ij}\ \delta(\vec{k}-\vec{k}')\ \hbar\vec{k}$

$\alpha_i(\vec{k})$: amplitude de probabilité pour que le photon ait l'impulsion $\hbar\vec{k}$ et la polarisation i

– Il n'est pas possible d'introduire une fonction de $\vec{r}$ qui ait la signification d'une fonction d'onde du photon dans l'espace des positions.

Ainsi, la transformée de Fourier de $\vec{\alpha}(\vec{k},t)$ s'exprime de manière non locale en fonction du champ $\vec{E}^{(+)}(\vec{r},t)$ (à cause de $N(k)$)

Probabilité de photoionisation d'un atome au point $\vec{r}$ $\sim \langle\vec{E}^{(-)}(\vec{r},t).\vec{E}^{(+)}(\vec{r},t)\rangle$

– Vrai vecteur d'état du champ électromagnétique quantifié : dans l'espace de Fock (nbres d'occupation)