Magistère Interuniversitaire de Physique

Module M2 : Applications de la Mécanique Quantique
TD 3 - Jeudi 7 mars 2002

Alexia Auffèves et Frédéric Boyer

Précession de Rabi et franges de Ramsey

1 Rappels sur les systèmes à deux niveaux. Sphère de Bloch

En Mécanique Quantique il est souvent commode de ramener le problème à l'étude d'un système à deux niveaux $|e\rangle$ (état excité) et $|g\rangle$ (état fondamental). Celui-ci étant analogue à un spin 1/2, on dispose alors d'une représentation spatiale de l'espace des états appelée *sphère de Bloch*. Le hamiltonien du système s'écrit:

$$H_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

où $\hbar\omega_0$ est l'énergie entre les deux niveaux. Notant σ_x, σ_y et σ_z les matrices de Pauli, on a

$$H_0 = \hbar\omega_0\sigma_z$$

On peut donc interpréter $|e\rangle$ et $|g\rangle$ comme les états propres d'une observable de spin (un polariseur) dirigé selon l'axe z.

1- Montrer que tout état du système peut s'écrire

$$|\Psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\phi/2}\,|e\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\phi/2}\,|g\rangle$$

Donner une interprétation géométrique de cet état. Quelle est la probabilité P_e de détecter le système dans l'état excité?

2- On suppose que l'état initial du système est

$$|\Psi(t=0)\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|e\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|g\rangle$$

Décrire l'évolution ultérieure du système. Interprétation géométrique? On appelle usuellement ce phénomène *précession de Larmor*.

3- On branche maintenant un couplage entre les deux niveaux. Le hamiltonien s'écrit:

$$H = \frac{\hbar\omega_0}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\hbar\Omega_0}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Comment s'écrivent les nouveaux états propres du système couplé? Décrire l'évolution temporelle d'un état quelconque de ce système. Interprétation géométrique? Comment évolue P_e? On appelle usuellement ce phénomène *précession de Rabi*.

2 Interaction avec un champ classique

On considère maintenant l'interaction de l'atome à deux niveaux étudié précédemment avec un champ électrique classique . Le hamiltonien de couplage atome-champ s'écrit, dans l'approximation dipôlaire

$$V = -\mathbf{D}.\mathbf{E}$$

où $\mathbf{D}$ est l'opérateur dipôle atomique et $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \phi)$. Dans la base $(|e\rangle, |g\rangle)$ on a

$$\mathbf{D} = \mathbf{d}_{\mathrm{eg}}(|e\rangle \langle g| + |g\rangle \langle e|) \tag{2}$$

où $\mathbf{d}_{\mathrm{eg}}$=$\langle e| q\mathbf{R} |g\rangle$ est l'élément de matrice dipôlaire, que l'on prend réel, entre les deux niveaux atomiques de la transition.

1- Donner l'expression du hamiltonien du système dans la base $(|e\rangle, |g\rangle)$ et écrire l'équation de Schrodinger régissant l'évolution de l'atome. On écrira le champ classique comme la superposition de deux champs tournant en sens opposés, et on posera $\mathbf{d}_{\mathrm{eg}}.\mathbf{E}_0 = \hbar\Omega_0$.

2- On introduit $|\Phi\rangle$ transformé de $|\Psi\rangle$ par la transformation unitaire R où

$$R = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\omega t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-i\omega t}{2}} \end{pmatrix}$$

a) Quelle interprétation géométrique donner à cette transformation?

b) Donner l'équation du mouvement pour $|\Phi\rangle$. On notera $\delta = \omega_0 - \omega$ le désaccord entre l'atome et le champ. Montrer que l'on peut éliminer le terme provenant de l'interaction avec le champ tournant en sens rétrograde (*approximation de l'onde tournante*). Comment évoluent géométriquement $|\Phi\rangle$? $|\Psi\rangle$?

c) Qu'arrive-t-il dans le cas $\delta = 0$? Qu'entend-on par "donner une impulsion $\pi/2$" à l'atome? Une impulsion π?

3 Franges de Ramsey

1- On se place dans le cas où l'atome et le champ sont très légèrement désaccordés. L'atome initialement dans $|e\rangle$ subit un premier pulse $\pi/2$ puis l'interaction est débranchée. L'atome et le champ évoluent librement pendant un temps T_{vol}. On branche alors à nouveau l'interaction et l'atome subit un second pulse $\pi/2$. Donner en fonction du désaccord δ l'évolution de la probabilité de mesurer l'atome dans l'état $|e\rangle$ après les deux pulses.

2- Donner une interprétation de ce phénomène en terme de franges d'interférence.

Cette technique, connue sous le nom d'*interférométrie Ramsey*, est très utilisée en métrologie et en optique quantique notamment. Donner quelques exemples d'application.