

Une transition liquide-gaz à une dimension pour des bosons en interaction attractive

avec Christopher Stergachis (Hong Kong) et Masum Ghahani (Boston)

1. Motivation: comment observer une transition liquide-gaz avec des atomes froids?

1.1 Approche "naturelle": • bosons (pas de pression de Fermi → phase gazeuse toujours stable) • interaction attractive "maximale" (lg de diffusion infinie) pour avoir un état lié à N corps "universel" (dépend seulement d'un paramètre, le paramètre à 3 corps)

↳ ça marche sur le papier...

• Janan von Stecher (2010): \exists état lié à N corps, $\forall N \in \mathbb{N}$, quelques paramètres
↑ limite de calcul numériquement faisable

• Susanna Bartsch, Werner Krauth (2013): MCO à $T \neq 0$, \exists transition liquide-gaz

↳ mais pas encore dans la expérience (forte perte à 3 corps)

1.2 Réduction dimensionnelle: passer à 1D

↳ expérimentalement:

• bosons, fort confinement transverse ($\hbar \omega_{\perp} \gg \mu$) et lg de diffusion faible et négative: pertes faibles

• il y a bien des états liés à N corps (avec Gert Johansson, Christophe Salomon, 2002) avec $N \leq 10^4$

↳ obtenu en changeant brusquement le signe de la lg de diffusion à partir d'un confinement longitudinal

2.2 Quasiparticules dans la boîte

- pour éviter calcul numérique épuisant de la quasi-structure d'onde
- si quelle condition les niveaux d'énergie sont-ils donnés par $(*) (*) (*) + K_n \in \frac{2\pi\hbar}{L} \Rightarrow ?$

2.2.1 Une grande boîte

$L \gg \lambda$ de n -ième, $n \gg 2$, le plus contraignant pour $n=2$

$$L \equiv \frac{2\hbar^2}{m|g|} = \lambda \text{ de } n=2$$

\Rightarrow on a $\frac{L}{\lambda} = \pi \left(\frac{|U_0|}{E_F} \right)^{1/2} \gg 1$ (C1)

avec $U_0 = -\frac{mg^2 N^2}{2\hbar^2}$ potentiel chimique de N -ième fondamental

$E_F = \frac{\hbar^2 (2\pi)^2}{2m}$ énergie de Fermi, facteur à la limite $\rho = \frac{N}{L}$

erreur relative sur $E_{\text{niveau}} = O(e^{-4\pi})$ (test pour $N=2$)

car décroissance exponentielle des f. d'onde

2.2.2 Régime non dégénéré

On s'attend à $\lambda_0 T_c \approx |U_0| =$ énergie de liaison dans le N -ième

dans (C1) $\Rightarrow \lambda_0 T_c \gg E_F$. On se limite donc au cas non dégénéré:

$$\lambda = \left(\frac{4 E_F}{\pi \hbar_0 T} \right)^{1/2} \ll 1$$
 (C2)

avec $\lambda^2 = \frac{2\pi\hbar^2}{m k_B T}$ lg d'onde thermique de de Broglie

Car aussi $L \gg \lambda$ donc

semi-macro de m -ième \approx gaz classique

lg d'onde de Broglie $= \frac{1}{n} \ll \lambda$ densité ρ

$$Z \text{ état } m\text{-ième} \approx \left(\frac{L}{\lambda} \right)^{d_p} \frac{1}{d_p!}$$

où $d_p =$ nombre de m -ième ($m \in \{1, \dots, N\}$)

2.2.3 Expliquez les interactions entre n-méris

diffusions élastiques entre n-méris \Rightarrow déphasage \Rightarrow déplacements d'énergie dans la bande, devient nœuds $\ll E_{cm}$

Ici, diffusion entre atomes dans le régime de Born:

$$k_{rel} \approx \frac{1}{\lambda} \gg \frac{1}{2l} : \quad \lambda = \frac{1}{N} \left(\frac{4\pi M \omega}{\hbar T} \right)^{\frac{1}{2}} \ll 1$$

(semble automatiquement varier grand N)

(signifie que $\hbar T \gg |E_0(z)|$)

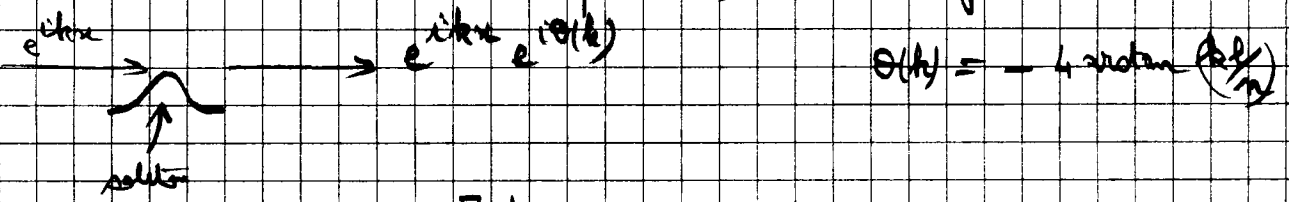
deux cas limites:

• phase purement atomique:

énergie d'interaction par atome \leftarrow

$$\frac{|g|}{\hbar T} = \frac{1}{\sqrt{N}} (N) \left(\frac{1}{2l} \right) \rightarrow 0 : \text{interactions négligeables}$$

• interactions atome - n-méris pour $n \gg 1$: Regime de Born



$$\Rightarrow k_{eff} = k + \theta'(k) \quad \xrightarrow{\hbar T \approx |g|} \text{énergie d'interaction } 2m|g|/L$$

ou n fois celle d'une paire d'atomes \hookrightarrow négligeable

2.2.4 Equations du modèle

fonction de partition $Z = \sum_{conf} Z_{conf}$

$$conf = \left\{ \begin{array}{l} (p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \\ \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = N \end{array} \right\}$$

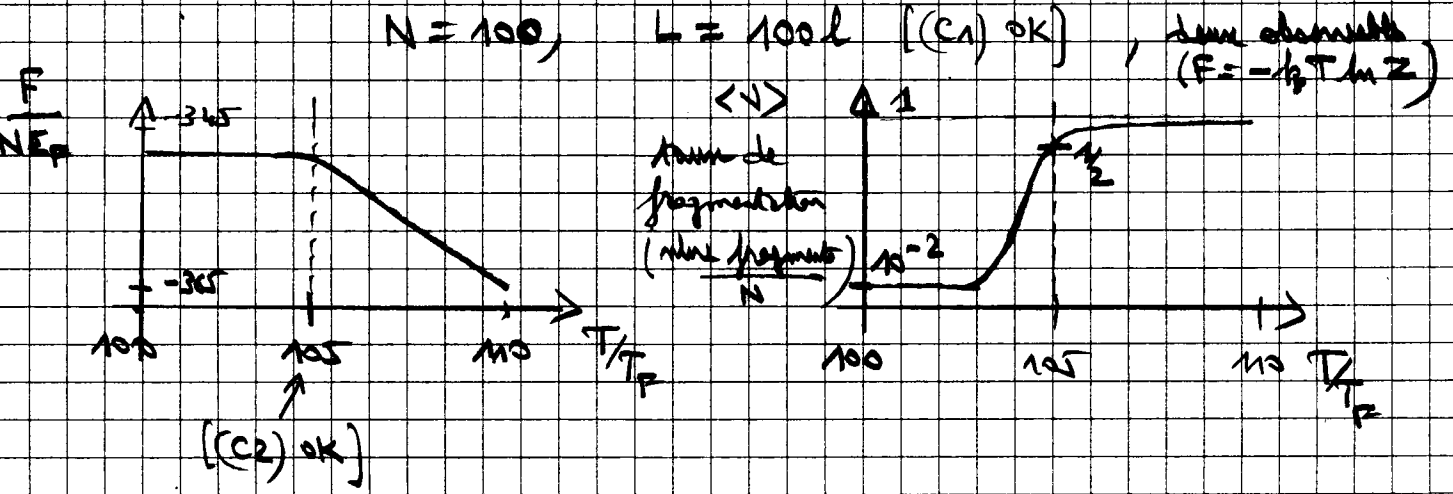
nombre de n-méris de taille n

nombre de pb non trivial (conservation du nombre de particules)

$$Z_{conf} = e^{-\beta \sum_{n=1}^{\infty} p_n \epsilon_n} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{L \lambda^{-1/2}}{\lambda} \right)^{p_n} \frac{1}{p_n!}$$

3. Explorations numériques microscopiques

nombre de particules $p(N)$ de N croît exponentiellement $\Rightarrow N \leq 150$



Interprétation transition liquide - gaz, $T_c \approx 105 T_p$
à deux phases pures;

$\rightarrow T > T_c$: gaz atomique

$$F_{\text{at}} \approx -N \frac{1}{2} T \ln \left(\frac{e}{\rho \lambda^3} \right), \quad \langle \nu \rangle = 1$$

$\rightarrow T < T_c$: N -mer fondamental = liquide

$$F_{N\text{-mer}} \approx E_0(N) \approx -\frac{1}{3} N |\mu_0|, \quad \langle \nu \rangle = \frac{1}{N} = \frac{100^2}{10^4}$$

Chgt de phase:

entropie $S = -\partial_T F \Rightarrow$ chaleur latente de chgt d'état
(transition au 1^{er} ordre)

Température critique (à 2 phases pures):

$$\left[\frac{1}{3} \beta_c^{(g)} |\mu_0| = \ln \frac{e}{\rho \lambda_c^{(g)}} \right] \Rightarrow \frac{2}{3} \beta_c^{(g)} |\mu_0| = W \left(\frac{3 T_c^{(g)} |\mu_0|}{G E_p} \right)$$

fonction de Lambert, invariance $x \rightarrow z e^x$ pour $z > -1$ argument doit être > -1
[(C1)]

donc $\frac{1}{3} T_c^{(g)} \approx 105$ pour la param de la figure

Pourquoi l'approximation à 2 phases pures marche-t-elle si bien?

4.1 Arguments simples

4.1.1 Phase gazeuse: faible taux de dimérisation

sous-ensemble de configurations: Δ dimère, $N - 2\Delta$ atoms

$$\frac{Z_{\text{gas}}}{Z_{\text{at}}} \approx \sum_{A=0}^N e^{-\beta \Delta E(A)} \frac{N!}{(N-A)! A!} \left(\frac{L\sqrt{2}}{\lambda}\right)^A \left(\frac{L}{\lambda}\right)^{-2A}$$

$$\approx N^{2A} \left(\frac{N^2 \lambda}{L}\right)^A \frac{1}{A!}$$

→ série exponentielle dans loi de Poisson

donc $\int \frac{N_{\text{atm}}}{N} \approx \sqrt{2} e^{-\beta E_0(2)} p \lambda \ll 1$ (E2)

N.B. facile en accord avec le développement du viriel

4.1.2 Phase liquide : faible taux de dissociation

cf. 4.1.2 : inclure un halo atomique seulement (sa densité $\ll \rho$ donc son taux de dissociation est très faible)

sous-ensemble de configurations :

A atomes, un seul (N-A)-mére

$$\frac{Z_{\text{liq}}}{Z_{N\text{-mére}}} \approx \sum_{A=0}^N e^{-\beta [E_0(N-A) - E_0(N)]} \left(\frac{N-A}{N}\right)^A \left(\frac{L}{\lambda}\right)^A \frac{1}{A!}$$

$\approx -A \mu_0$

$$\sum_{A=0}^N \left(e^{\beta \mu_0} \frac{L}{\lambda} \right)^A \frac{1}{A!}$$

barrière d'énergie pour la dissociation mais gain entropique de un mot de atomes

donc $\int \frac{N_{\text{at}}}{N} \approx e^{-\beta \mu_0} \frac{1}{p \lambda} \approx \frac{(\rho \lambda^3)^2}{e^{\beta \mu_0}} \ll 1$

effet plus facile que la dissociation de la phase gazeuse

4.2. Majoration

on partage les configurations en deux sous-ensembles (disjoints et complémentaires)

∃ un nombre de $m > N/2$
= la liquide

∄ nombre de $m > N/2$
= la gaz

$$0 \leq \frac{1}{N} \ln \frac{Z_{\text{liq}}}{Z_{N\text{-mére}}} \leq \frac{e^{-\beta \mu_0/2}}{\varepsilon} e^{\frac{\varepsilon \sqrt{2}}{(\varepsilon - \sqrt{2})^2}} \quad 0 \leq \frac{1}{N} \ln \frac{Z_{\text{gas}}}{Z_{\text{at}}} \leq \frac{\sqrt{2} \varepsilon}{(\varepsilon - \sqrt{2})^2}$$

avec $\varepsilon = p \lambda e^{\beta \mu_0/2}$ → vient de $E_0(n)$

A $T = T_c^{(0)}$: $\varepsilon = e^{-3/4} (\rho \lambda_c^{(0)})^{3/4} \ll 1$

$\frac{e^{-3/4} \rho^{1/2}}{\varepsilon} = e^{-3/4} (\rho \lambda_c^{(0)})^{3/4} \ll 1$

donc $\left| \frac{T_c - T_c^{(0)}}{T_c^{(0)}} \right| = \text{erreur relative sur } T_c = O(\rho \lambda_c^{(0)})^{3/4}$
 $\rho \lambda_c^{(0)} \rightarrow 0$

4.3 Quelles limites thermodynamiques?

la figure dépend seulement de N et $h/2$

$N \rightarrow \infty$ et $h = \text{cte}$
 semble naturelle mais est bizarre : $h/2 \propto N^2$
 alors $\rho_c^{(0)} h/2 \sim \frac{1}{3} \ln N$
 (C1) : $\frac{h}{2} \propto N \rightarrow \infty$ exact à $T_c^{(0)}$
 (C2) : $\rho \lambda_c^{(0)} \propto \frac{(h/N)^{1/2}}{N} \rightarrow 0$ exact à $T_c^{(0)}$
 modèle exact

$N \rightarrow \infty$ et $\frac{h}{2} = \text{cte}$
 semble bizarre mais est naturelle : $h/2 = \text{cte}$
 alors $\rho_c^{(0)} h/2$ et $\rho \lambda_c^{(0)}$ ont une limite finie
 modèle = bonne approx.
 à $T_c^{(0)}$ si $\rho \lambda_c^{(0)} \ll 1$

5. Objections, notre honneur

↪ il n'y a pas de transition liquide-gaz à 1D (pour des interactions à courte portée). Cf. Imry, Scalapino, 1974

à cause d'un argument dû à Landau : pas de coexistence de 2 phases ≠ à 1D (le morcellement ↓ F, ⇒ émulsion)

MAIS notre modèle prend en compte les morcellements arbitraires (cf. 4.2)
 • hypothèse de Landau : soit émergence du morcellement à n=1

de fragments (conf. de proportionnalité intrinsèque)

i.e., pas vrai:

$E_0(n) \propto n^3$ donc pour le N -ième en 2 modes soit

$$\frac{3}{4} |E_0(N)| \approx \frac{N}{4} |U_0|$$

↳ si $N \rightarrow \infty$, la densité du liquide diverge \Rightarrow modèle d'interaction $\propto g \delta(x_i - x_j)$ réaliste, "eau dure": $E_0(N) \propto N$ et standard appliqué

solution: ajuster g en $\frac{1}{N^2}$ (résonance de Feshbach: $a_{3D} \propto \frac{1}{N^2}$)

alors $\rho_{\text{liquide}} = \text{cte}$

i.e., $N \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{N} = \text{cte}$: alors $\frac{1}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ mais

$$\rho \frac{d}{dt} = \text{cte} \quad \text{et} \quad \frac{S_{\text{tot}}}{N} = \text{cte}$$

donc refroidissement adiabatique possible.