

## Partie III

# Propagation, diffraction



# Introduction

Nous aborderons dans ce chapitre un certain nombre de propriétés liées à la propagation des champs. Un des aspects physiquement les plus intéressants et les plus riches d'applications concerne les phénomènes de diffraction (transmission des champs électromagnétiques à travers des structures dont la taille n'est pas très grande devant la longueur d'onde). Un des objets essentiels de cette partie du cours sera donc de donner une assise rigoureuse à la théorie de la diffraction. Nous allons voir comment et au prix de quelles approximations on peut justifier les propriétés de la diffraction telles qu'elles sont enseignées dans les classes élémentaires. Nous aurons, pour cela, à utiliser des techniques très puissantes, comme celle des fonctions de Green, qui, sous d'autres formes ou d'autres noms, sont très généralement utilisées en physique.

Cette partie sera divisée en trois chapitres principaux. Dans le premier, nous établirons de façon rigoureuse la solution des équations de Maxwell en termes de potentiels retardés. Nous établirons pour ce faire la forme de la fonction de Green du champ électromagnétique, réponse des équations de Maxwell à une perturbation impulsionnelle, spatialement et temporellement. Nous intuiterons d'abord la forme de cette fonction en n'utilisant que des arguments physiques simples avant de la retrouver de façon rigoureuse. Ce chapitre fera un usage extensif de l'intégration de fonctions complexes, avec laquelle il est donc préférable d'être déjà familier.

Dans le deuxième chapitre, nous utiliserons cette solution et la fonction de Green du champ pour démontrer une formule rigoureuse (formule de Kirchhoff) relative à la propagation du champ électromagnétique. Nous utiliserons ensuite cette formule pour essayer de traiter un problème de diffraction générique, la transmission d'un champ à travers une ouverture dans un écran opaque. Nous verrons qu'on ne peut en général traiter le problème de façon rigoureuse. On devrait pour cela tenir compte des courants induits dans l'écran, ce qui est impossible. Nous ferons donc une approximation (qui est équivalente au principe de Huygens des sources secondaires) a priori très grossière mais très réaliste dans des problèmes concrets. Nous montrerons alors que le champ transmis est explicitement calculable. En faisant enfin une approximation paraxiale, nous retrouverons la diffraction dans l'approximation de Fraunhofer, telle qu'elle est enseignée généralement de façon élémentaire. Nous pourrions alors généraliser les résultats obtenus pour un écran opaque percé à des écrans semi-transparents ou même à des objets de phase.

Dans le troisième et dernier chapitre, enfin, nous traiterons brièvement et qualitativement un certain nombre d'applications pratiques de la diffraction. Nous ne ferons qu'évoquer brièvement le principe de ces techniques, sans jamais entrer dans le détail des calculs. Nous nous pencherons en particulier sur les applications de la diffraction pour le traitement optique des signaux. Nous consacrerons quelque temps à la très belle méthode de Labeyrie qui permet de s'affranchir largement des fluctuations de l'atmosphère terrestre et de rendre aux instruments astronomiques une partie de leur pouvoir de résolution théorique sans pour autant recourir à des moyens spatiaux. Nous évoquerons très brièvement le principe de l'holographie et de ses généralisations en optique non linéaire (la conjugaison de phase, par exemple). Nous montrerons enfin qualitativement, à partir de la formule de Kirchhoff, comment l'optique géométrique peut émerger du cadre de la théorie de la diffraction. Ces arguments qualitatifs seront repris sur une base beaucoup plus rigoureuse dans le quatrième appendice à cette partie.

Cette partie sera en effet prolongée de plusieurs appendices, dans lesquels on a regroupé des sujets qui touchent de près ou de loin au problème de la propagation. Il va de soi que ces appendices peuvent être omis en première lecture.

Le premier appendice, très bref, sera un rappel des propriétés de jauge du champ électromagnétique et des jauges communément utilisées. Nous insisterons en particulier sur la jauge de Coulomb qui n'est pas covariante au contraire de la jauge de Lorentz mais se trouve très utilisée dans le domaine de la physique atomique.

Dans le deuxième appendice, nous nous préoccupons de l'écriture des champs électromagnétiques dans l'espace réciproque. Nous séparerons, dans le champ, des parties longitudinales et transverses. Nous définirons les "variables normales" associées aux champs électromagnétiques dans le vide. Nous montrerons enfin que la dynamique de ces variables normales est celle d'un simple oscillateur harmonique. Nous aurons ainsi largement préparé la voie à la quantification du champ électromagnétique qui est essentiellement une quantification d'un ensemble d'oscillateurs harmoniques correspondant aux variables normales. Cette quantification sera à peine évoquée ici mais nous en aurons donné les briques essentielles, du moins pour ce qui concerne la partie électromagnétique du problème.

Dans le troisième appendice, nous nous pencherons sur le problème de la propagation des faisceaux laser. En utilisant les résultats généraux sur la diffraction, nous construirons des faisceaux "gaussiens", solution approximative des équations de Maxwell dans l'espace libre. Ils représentent de façon assez précise, dans le cadre d'une approximation paraxiale, les faisceaux directifs et localisés des lasers. Nous établirons quelques propriétés de ces faisceaux, ainsi que quelques résultats élémentaires d'optique gaussienne.

Enfin, dans le dernier appendice, nous nous occuperons du passage de l'électromagnétisme à l'optique géométrique. Nous montrerons comment on peut retrouver rigoureusement les lois de l'optique géométrique à partir des équations de Maxwell à condition de renoncer à décrire les champs à une échelle de l'ordre de la longueur d'onde. Nous préciserons ainsi les raisonnements qualitatifs donnés à la fin du dernier chapitre.

# Chapitre 1

## Potentiels retardés

Nous allons, dans ce chapitre, établir rigoureusement la solution des équations de Maxwell en termes de potentiels retardés. Nous introduirons pour cela la fonction de Green du champ électromagnétique. Nous établirons l'expression de la fonction de Green dans un référentiel donné, renonçant, pour un temps, à la covariance manifeste. Nous montrerons rapidement, à la fin de ce chapitre, que la forme ainsi obtenue peut très simplement être mise sous une forme covariante, adaptée au changement de référentiel.

### 1.1 Fonction de Green

#### 1.1.1 Position du problème

Notre problème est donc de résoudre les équations aux potentiels. En choisissant la jauge de Lorentz:

$$\partial_\mu \mathcal{A}^\mu = 0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} , \quad (1.1)$$

les équations reliant les potentiels aux sources s'écrivent simplement en termes des potentiels scalaire et vecteur:

$$\square \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (1.2)$$

$$\square V = \rho / \epsilon_0 . \quad (1.3)$$

$\square$  est ici l'opérateur d'alembertien:

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta , \quad (1.4)$$

où  $\Delta$  est le laplacien.

La forme de l'équation à résoudre est donc la même pour les trois composantes du potentiel vecteur et le potentiel scalaire. Nous résoudrons donc en fait dans ce paragraphe l'équation scalaire générique:

$$\square \phi(\mathbf{r}, t) = \mathcal{S}(\mathbf{r}, t) , \quad (1.5)$$

où  $\phi$  représente une des composantes du potentiel et  $\mathcal{S}$  la source associée. Notons bien sûr que cette séparation n'a de sens qu'en jauge de Lorentz. La jauge de Coulomb, par exemple,  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , est beaucoup plus ennuyeuse puisque les équations définissant  $\mathbf{A}$  et  $V$  sont couplées (voir appendice 1).

### 1.1.2 Définition de la fonction de Green

Plutôt que de résoudre directement l'équation (1.5), cherchons une fonction de la position et du temps,  $G(\mathbf{r}, t)$  telle que:

$$\square G(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r})\delta(t) . \quad (1.6)$$

De manière évidente,  $G$  est le potentiel rayonné par une source parfaitement localisée à l'origine de l'espace et du temps. C'est en quelque sorte la réponse percussionnelle de l'espace. Nous appellerons  $G$  la fonction de Green du potentiel.

Il est bien connu, dans la théorie de la réponse linéaire, que la réponse d'un système linéaire à une source quelconque est connue si on connaît la réponse percussionnelle. Dans le domaine du filtrage, par exemple, si on note  $g(t)$  la réponse percussionnelle du filtre (la réponse quand il est sollicité par une fonction de Dirac à l'origine des temps), la réponse  $s(t)$  à un signal d'entrée  $e(t)$  est simplement la convolution du signal d'entrée par la réponse percussionnelle:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)e(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e(t - \tau) d\tau , \quad (1.7)$$

(l'intégrale s'étend de  $-\infty$  à  $\infty$  à condition d'admettre que la réponse percussionnelle  $g(t)$  est nulle pour  $t < 0$ , une simple conséquence de la causalité). Cette convolution résulte de la linéarité du système et de la possibilité de développer le signal d'entrée sur les fonctions de Dirac:

$$e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)\delta(t - \tau) d\tau . \quad (1.8)$$

Ces résultats sont largement utilisés, en électronique par exemple. Une détermination de la réponse percussionnelle permet de caractériser complètement un amplificateur. Notons d'ailleurs que, par une transformée de Fourier élémentaire, on trouve que la composante de Fourier à la fréquence  $\omega$  du signal de sortie est proportionnelle à la composante de Fourier à la même fréquence du signal d'entrée. Le coefficient de proportionnalité, appelé susceptibilité du système à cette fréquence, n'est autre que la composante de Fourier à  $\omega$  de la réponse percussionnelle. Susceptibilité et réponse percussionnelle sont donc reliées simplement par une transformation de Fourier. Nous aurons l'occasion de revenir largement sur ces problèmes dans la dernière partie de ce cours, quand nous traiterons la susceptibilité linéaire d'un milieu matériel.

Nous allons montrer explicitement que la fonction de Green, la réponse percussionnelle, nous donne aussi la solution générale de l'équation aux potentiels. Si  $G$  obéit à l'équation (1.6), on a aussi:

$$\square_{\mathbf{r}, t} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t - t_1) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\delta(t - t_1) . \quad (1.9)$$

Les indices portant sur le d'alembertien précisent sur quelles variables portent les dérivations. On en déduit immédiatement:

$$\square_{\mathbf{r}, t} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t - t_1) \mathcal{S}(\mathbf{r}_1, t_1) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\delta(t - t_1) \mathcal{S}(\mathbf{r}_1, t_1) , \quad (1.10)$$

les termes en  $\mathcal{S}$  étant des constantes vis à vis des dérivations dans le d'alembertien. En intégrant alors les deux membres de cette équation sur toutes les valeurs d'espace et de temps de  $\mathbf{r}_1$  et  $t_1$  et en remarquant que l'intégration sur le second membre donne trivialement  $\mathcal{S}(\mathbf{r}, t)$  en raison de la présence des Dirac, on obtient:

$$\mathcal{S}(\mathbf{r}, t) = \int d^3\mathbf{r}_1 dt_1 \square_{\mathbf{r}, t} [G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t - t_1) \mathcal{S}(\mathbf{r}_1, t_1)] . \quad (1.11)$$

En remarquant finalement que l'opérateur d'alembertien du membre de gauche commute avec l'intégration, on constate que le potentiel:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int d^3\mathbf{r}_1 dt_1 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t - t_1) \mathcal{S}(\mathbf{r}_1, t_1) \quad (1.12)$$

est effectivement une solution de l'équation (1.5).

Comme pour la théorie du signal élémentaire, la solution de l'équation aux potentiels est la convolution des termes sources avec la réponse percussive du système. Résoudre l'équation aux potentiels est donc équivalent à trouver l'expression de la fonction de Green. Deux approches sont possibles à ce stade. Dans la première, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, on peut, en se fondant sur des arguments très généraux, écrire à priori la forme de la fonction de Green. Il ne reste alors qu'un coefficient arbitraire, qu'on peut identifier en essayant cette solution dans l'équation (1.6). Dans la deuxième approche, plus satisfaisante intellectuellement et à peine plus difficile, on résoudra directement cette équation en utilisant les propriétés de la transformation de Fourier.

### 1.1.3 Approche qualitative

Nous cherchons ici à donner, par des arguments très simples, la forme de la fonction de Green. Rappelons qu'il s'agit du potentiel rayonné par une source qui est localisée à l'origine et qui n'existe qu'à l'instant origine. En raison de l'invariance de l'espace par rotation, la fonction  $G$  doit être, comme sa source, à symétrie sphérique. Elle ne peut donc dépendre que de la distance  $r$  à l'origine.

Nous "savons bien" (ce sera l'objet du prochain paragraphe de le montrer rigoureusement) que les solutions à l'équation des potentiels décrivent des ondes se propageant à la vitesse  $c$ . La source étant nulle en tout instant sauf 0, la fonction  $G$  doit décrire une onde sphérique très localisée divergeant de l'origine à la vitesse  $c$  à partir de  $t = 0$ . Elle n'est donc non nulle que pour des distances telles que  $t = r/c$ .  $G$  est "donc" proportionnelle à  $\delta(r - ct)$ .

L'énergie doit se conserver. Les champs sont linéaires dans la fonction de Green. Le vecteur de Poynting est donc quadratique dans la fonction de Green. Pour que l'énergie totale transportée par cette onde soit indépendante du temps, il faut que le vecteur de Poynting soit en  $1/r^2$  au niveau du "front d'onde". La fonction de Green doit donc être proportionnelle à  $1/r$ :

$$G(r, t) \simeq \frac{1}{r} \delta(r - ct) . \quad (1.13)$$

Il nous faut enfin tenir compte de la causalité. La fonction de Green doit être nulle en tous les instants précédant l'instant origine. On peut en tenir compte en ajoutant une fonction de Heaviside du temps  $\theta(t)$ . On a alors tenu compte de toutes les propriétés essentielles de la fonction de Green, qui doit pouvoir s'écrire:

$$G(r, t) = A \frac{1}{r} \theta(t) \delta(r - ct) . \quad (1.14)$$

La constante  $A$  est a priori arbitraire. Pour l'identifier, on portera cette expression dans l'équation (1.6)<sup>1</sup>. On trouvera:

$$A = \frac{c}{4\pi} . \quad (1.15)$$

Bien sûr, ce raisonnement qualitatif, bien qu'il donne le résultat exact, est insatisfaisant. Ce n'est que par substitution dans l'équation initiale qu'on peut vérifier que la solution est effectivement convenable. Nous allons consacrer le prochain paragraphe à une solution plus rigoureuse. En particulier, nous n'aurons pas à admettre la propagation des solutions à la vitesse  $c$  qui est sans doute l'hypothèse la moins justifiée a priori dans le raisonnement précédent.

---

<sup>1</sup>Nous conseillons au lecteur d'effectuer ce calcul, qui impose une manipulation soignée des distributions. On y comprendra mieux en particulier quel rôle joue la fonction  $\theta(t)$  dans la fonction de Green. On verra qu'elle est indispensable pour obtenir un comportement convenable au voisinage de l'origine.

## 1.2 Solution rigoureuse

### 1.2.1 Fonction de Green

Pour résoudre (1.6), nous allons passer dans l'espace réciproque. Nous introduisons donc la transformée de Fourier quadridimensionnelle de  $G$  définie par:

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int G(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} d^3\mathbf{r} dt, \quad (1.16)$$

où l'intégration doit s'effectuer sur tout l'espace-temps. La relation réciproque s'écrit simplement:

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} d^3\mathbf{k} d\omega. \quad (1.17)$$

L'avantage de la transformation de Fourier est de rendre triviaux les opérateurs différentiels sur l'espace ou le temps. En prenant la transformée de Fourier du premier membre de (1.6), on obtient simplement  $(k^2 - \omega^2/c^2)\tilde{G}$ . La transformée de Fourier des fonctions de Dirac est une constante et l'équation (1.6) se met finalement dans l'espace réciproque sous la forme:

$$(k^2 - \omega^2/c^2)\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{4\pi^2}. \quad (1.18)$$

La solution de cette équation algébrique est élémentaire:

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{c^2}{4\pi^2} \frac{1}{c^2 k^2 - \omega^2}. \quad (1.19)$$

Le problème est donc immédiatement résolu. Pour pouvoir utiliser cette solution, il faut toutefois repasser dans l'espace réel par une opération de transformation de Fourier inverse qui, comme nous allons le voir, est un peu plus complexe.

La fonction de Green dans l'espace réel s'écrit donc:

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{c^2}{16\pi^4} \int \frac{e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}}{c^2 k^2 - \omega^2} d^3\mathbf{k} d\omega. \quad (1.20)$$

Il est clair cette intégration n'est pas élémentaire, puisque l'intégrande présente des pôles en  $\omega = \pm ck$ . On pourra d'ailleurs constater tout de suite que ces pôles coïncident avec la relation de dispersion pour des ondes planes dans le vide, ce qui n'est pas tout à fait un hasard. Pour régler ce problème, nous procéderons en deux temps, d'abord à l'intégration sur les fréquences puis à l'intégration sur les vecteurs d'onde.

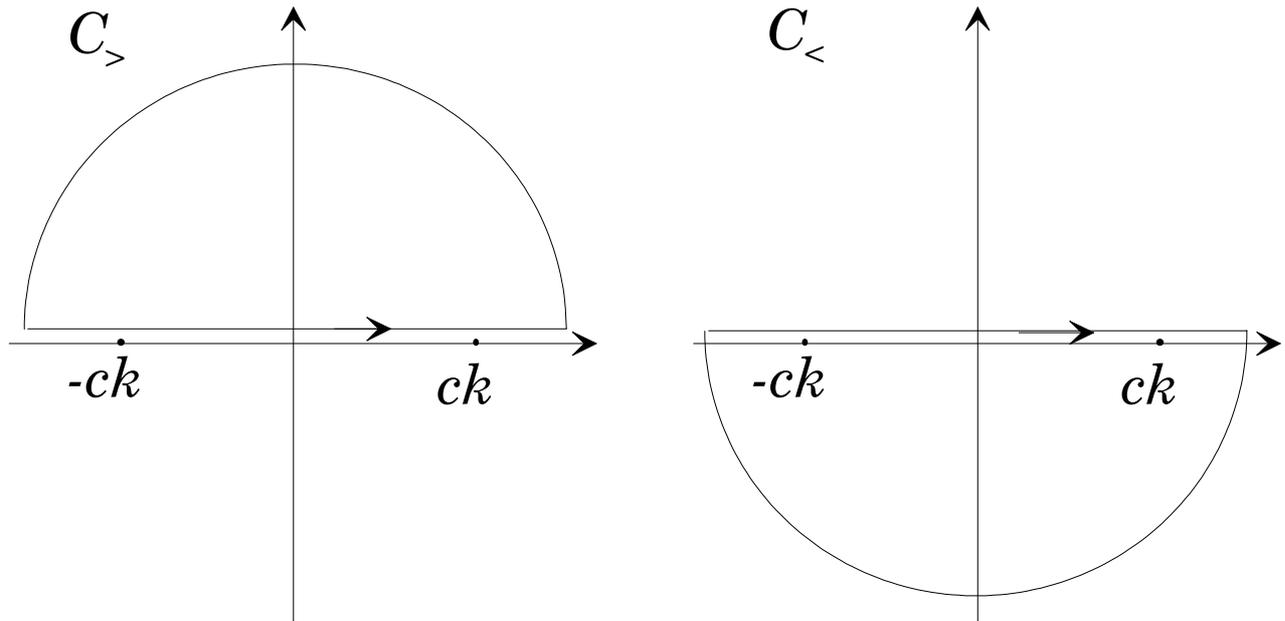
Nous avons donc à calculer:

$$I = \int -\frac{e^{-i\omega t}}{(\omega - ck)(\omega + ck)} d\omega, \quad (1.21)$$

l'intégration s'effectuant sur tout l'axe réel. La fonction à intégrer étant définie et analytique sur l'ensemble du plan complexe, nous allons procéder, comme il est d'usage en pareil cas, à une déformation du contour d'intégration. Au lieu d'intégrer sur l'axe réel, nous choisirons d'intégrer sur une droite parallèle, correspondant à des valeurs de  $\omega$  de partie imaginaire constante égale à  $\epsilon$ . Si tout se passe bien, nous pourrions prendre à la fin des calculs la limite pour  $\epsilon \rightarrow 0$  et obtenir un résultat physique<sup>2</sup>. Nous choisirons  $\epsilon > 0$ . Nous discuterons dans un moment ce qu'on obtiendrait en faisant l'autre choix possible.

Pour appliquer le théorème des résidus, il nous faut fermer le contour d'intégration par un "demi-cercle à l'infini" situé soit dans le demi plan supérieur, soit dans le demi plan inférieur. Cette fermeture

<sup>2</sup>Nous verrons en fait que le résultat final est indépendant de  $\epsilon$ , rendant trivial le passage à la limite.



**Figure 1.1:** Contours d’intégration dans le plan complexe des fréquences pour le calcul de l’intégrale sur la fréquence  $\omega$  intervenant dans la fonction de Green. Pour des temps négatifs, le contour de gauche convient. Pour des temps positifs, on choisira le contour de droite. Les pôles de la fonction à intégrer sont situés en  $\pm ck$  sur l’axe réel.

est possible à condition que cette nouvelle partie du contour ne contribue pas à l’intégrale. Si  $t$  est positif,  $e^{-i\omega t}$  tend vers 0 pour des points à distance infinie dans le demi plan inférieur, correspondant à des parties imaginaires négatives pour  $\omega$ . Pour  $t > 0$ , nous intégrerons donc sur le contour  $C_<$  représenté à droite sur la figure 1.1. En revanche, pour  $t < 0$ , nous intégrerons sur le contour  $C_>$  qui se referme par un demi-cercle dans le demi plan supérieur. Les pôles de la fonction à intégrer étant tous deux sur l’axe réel, nous trouvons donc immédiatement que l’intégrale et, donc, la fonction de Green sont nulles pour les instants négatifs.  $G$  est donc proportionnelle à la fonction de Heaviside  $\theta(t)$ . C’est une simple expression de la causalité, la source de ce potentiel n’existant qu’à l’instant origine.

Si nous avons choisi initialement une partie imaginaire  $\epsilon$  négative pour notre contour d’intégration, les choix de demi-cercles pour fermer le contour d’intégration en eussent été inchangés. En revanche, comme on s’en persuadera aisément, on aurait trouvé une fonction de Green non nulle pour  $t < 0$ , nulle pour  $t > 0$  : un potentiel qui précède la source. Une telle situation viole manifestement la causalité relativiste et ne peut convenir. Le choix d’une partie imaginaire positive pour  $\omega$  n’est donc pas du tout arbitraire<sup>3</sup>. On pourra, à titre d’exercice, poursuivre le calcul avec  $\epsilon < 0$ . Sans surprise, on trouvera, au lieu des potentiels retardés en  $r - ct$ , la solution non physique en potentiels “avancés” en  $r + ct$ . La présence de ces solutions parasites est clairement due au fait que l’équation de propagation est du second ordre en  $t$  et se trouve donc invariante dans un renversement du sens du temps.

Nous n’avons donc plus à calculer  $I$  que pour  $t > 0$ . Les résidus de la fonction sont:

$$-\frac{e^{-ickt}}{2ck} \quad \text{en} \quad \omega = ck \tag{1.22}$$

$$\frac{e^{ickt}}{2ck} \quad \text{en} \quad \omega = -ck . \tag{1.23}$$

$$\tag{1.24}$$

Compte tenu du sens dans lequel est parcouru  $C_<$ ,  $I$  est égale à  $-2i\pi$  fois la somme des résidus. On

<sup>3</sup>Nous rencontrerons le même genre d’arguments dans la partie sur l’électromagnétisme dans la matière quand nous établirons les relations de Kramers–Kronig.

trouve donc immédiatement, en regroupant les termes:

$$I = \frac{2\pi}{ck} \sin ckt . \quad (1.25)$$

En reportant cette expression dans celle de la fonction de Green, on obtient:

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{8\pi^3} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{\sin ckt}{k} d^3\mathbf{k} . \quad (1.26)$$

Pour procéder à cette dernière intégration spatiale, nous utiliserons les coordonnées sphériques  $(k, \theta, \phi)$  pour  $\mathbf{k}$  (l'intégrande est évidemment à symétrie sphérique, ce qui reflète l'invariance par rotation). L'axe vertical de ce repère sera choisi aligné avec  $\mathbf{r}$ . Dans ce calcul,  $\mathbf{r}$  apparaît comme une constante et ce choix est possible pour chaque position. L'intégrale sur  $\phi$  est triviale et donne un simple facteur  $2\pi$ . En remarquant que  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos \theta$ , l'intégrale sur  $\theta$  s'écrit simplement:

$$\int_0^\pi \sin \theta e^{ikr \cos \theta} d\theta = \frac{2}{kr} \sin kr . \quad (1.27)$$

Il ne nous reste finalement que l'intégrale sur  $r$  à calculer:

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{2\pi^2 r} \int_0^\infty \sin ckt \sin kr dk . \quad (1.28)$$

En transformant le produit de sinus en une somme de cosinus et en passant aux exponentielles complexes, on a:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, t) &= \frac{c}{8\pi^2 r} \int_0^\infty \left[ e^{ik(r-ct)} + e^{-ik(r-ct)} - e^{ik(r+ct)} - e^{-ik(r+ct)} \right] dk \\ &= \frac{c}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^\infty \left[ e^{ik(r-ct)} - e^{ik(r+ct)} \right] dk . \end{aligned} \quad (1.29)$$

Pour passer à la seconde ligne, on a remarqué que les exponentielles complexes de la première peuvent être regroupées deux par deux en procédant au changement de variable  $k \rightarrow -k$  et en étendant donc l'intégration à tout l'axe réel. Les intégrales d'exponentielles complexes sur tout l'axe donnent simplement, à un facteur  $2\pi$  près, des fonctions de Dirac et on a:

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi r} (\delta(r-ct) - \delta(r+ct)) . \quad (1.30)$$

Nous ne devons pas oublier à ce stade que le calcul n'a été effectué que pour  $t > 0$  et que la fonction de Green est en fait proportionnelle à  $\theta(t)$ . Pour des valeurs positives de  $t$ , la seconde fonction de Dirac dans l'expression précédente ne joue aucun rôle et nous pouvons finalement écrire:

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi r} \theta(t) \delta(r-ct) . \quad (1.31)$$

Nous avons maintenant une forme explicite de la fonction de Green. Avant d'aller plus loin, nous allons la mettre sous une forme légèrement différente, parfois mieux adaptée à certains calculs (nous l'utiliserons en particulier pour établir la forme des potentiels retardés). Nous allons en effet montrer qu'on peut aussi écrire:

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi r} \theta(r) \delta(t - r/c) . \quad (1.32)$$

Pour établir très simplement ce résultat, il suffit de remarquer que:

$$\delta(r-ct) = \delta(c(t - r/c)) = \frac{1}{c} \delta(t - r/c) . \quad (1.33)$$

### 1.2.2 Forme covariante

Nous avons établi les formes précédentes de la fonction de Green en distinguant bien espace et temps. Nous avons donc a priori perdu la covariance manifeste des équations de Maxwell. Il n'en est heureusement rien en fait et on peut, par de simples manipulations algébriques, mettre la fonction de Green sous une forme manifestement covariante.

Nous pouvons en effet écrire:

$$\theta(t)\delta(r - ct) = \theta(t) [\delta(r - ct) - \delta(r + ct)] . \quad (1.34)$$

Nous avons en effet déjà utilisé cette propriété (la fonction de Heaviside annule l'action de la seconde fonction de Dirac) dans l'établissement de la forme finale de la fonction de Green. La somme de fonctions de Dirac peut être réécrite:

$$\delta(r - ct) - \delta(r + ct) = 2r\delta((ct - r)(ct + r)) . \quad (1.35)$$

Pour nous en convaincre, nous pouvons considérer l'action de  $\delta((ct - r)(ct + r))$  sur une fonction régulière  $f(r, t)$ . Deux points contribuent à l'intégrale sur  $r$ :  $\pm ct$ . Au voisinage du point  $r = ct$ , la fonction de Dirac, considérée comme distribution sur  $t$ , est équivalente à  $\delta(2r(ct - r)) = \delta(ct - r)/2r$ . Cette équivalence, ajoutée à la contribution de  $r = -ct$ , établit finalement cette propriété utile.

En remarquant que  $c^2t^2 - r^2 = x_\mu x^\mu$ , où les  $x^\mu$  sont les coordonnées contravariantes du point où est calculée la fonction de Green, cette dernière peut s'écrire:

$$G(x^\mu) = \frac{c}{2\pi} \theta(x^0) \delta(x_\mu x^\mu) . \quad (1.36)$$

La fonction de Dirac au second membre est manifestement covariante. La fonction de Heaviside l'est aussi en dépit des apparences. Nous avons vu en effet que les transformations de Lorentz n'affectaient pas l'ordre temporel de deux événements situés dans ou sur le cône de lumière l'un de l'autre: passé, futur et causalité sont des invariants relativistes. Le signe de  $x^0$  est donc un invariant relativiste. Nous avons donc obtenu, avec (1.36), une forme manifestement covariante de la fonction de Green.

### 1.2.3 Potentiels retardés

La dernière étape à franchir est élémentaire. Il ne nous reste qu'à reporter la fonction de Green dans l'expression (1.12). Nous utiliserons pour cela la deuxième forme de la fonction de Green. On a alors la solution de l'équation aux potentiels sous la forme:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \theta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|) \frac{\delta(t - t_1 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \mathcal{S}(\mathbf{r}_1, t_1) d^3\mathbf{r}_1 dt_1 . \quad (1.37)$$

Nous pouvons à ce point oublier la fonction  $\theta$ . Elle ne joue de rôle que pour des points sources  $\mathbf{r}_1$  infiniment proches du point d'observation  $\mathbf{r}$ . Si la source est une répartition continue de charges, la contribution correspondante est infinitésimale. L'intégration sur le temps est alors triviale. Le seul instant  $t_1$  qui contribue est tel que la source et le point d'observation soient sur le cône de lumière l'un de l'autre (nous reverrons plus tard ce raisonnement sous une forme un peu différente en examinant le rayonnement des charges en mouvement). On a donc:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathcal{S}(\mathbf{r}_1, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} d^3\mathbf{r}_1 , \quad (1.38)$$

forme standard de la solution en termes de potentiels retardés. En ajoutant les facteurs dimensionnels, on retrouve en effet les formes habituelles pour les expressions des potentiels scalaire et vecteur:

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}_1, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} d^3\mathbf{r}_1 \quad (1.39)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_1, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} d^3\mathbf{r}_1 . \quad (1.40)$$

L'interprétation physique de ces expressions est si transparente que nous n'y reviendrons pas.

## Chapitre 2

# Diffraction: approche théorique

### Introduction

Un problème générique de diffraction est représenté sur la figure 2.1. Une source de rayonnement éclaire une portion d'espace à travers un écran opaque percé d'une ouverture. Nous cherchons à déterminer les champs ou les potentiels en présence de l'écran à partir de ce qu'ils sont dans l'espace libre. Bien sûr, le problème admet de nombreuses variantes, avec des écrans semi-transparents ou des écrans ne modifiant que la phase des champs, mais le principe du calcul reste toujours le même. Le volume dans lequel nous désirons déterminer le champ sera limité par une surface fermée  $S$  (la fermeture de la surface pourra éventuellement se faire par une portion de "sphère de l'infini"). Il est assez naturel que  $S$  coïncide avec l'écran là où il est présent. Nous allons en fait procéder en plusieurs étapes.

Nous établirons d'abord la formule de Kirchhoff qui permet de calculer le champ (ou plutôt, comme dans le chapitre précédent, une des composantes du potentiel) en tous points du volume  $\mathcal{V}$  intérieur à  $S$  si on connaît le champ en tous points de la surface  $S$  à tous les instants. Cette formule sera établie sur des bases très générales à partir de la fonction de Green. Bien sûr, elle permettrait de résoudre directement notre problème de diffraction si on connaissait le champ sur  $S$ .

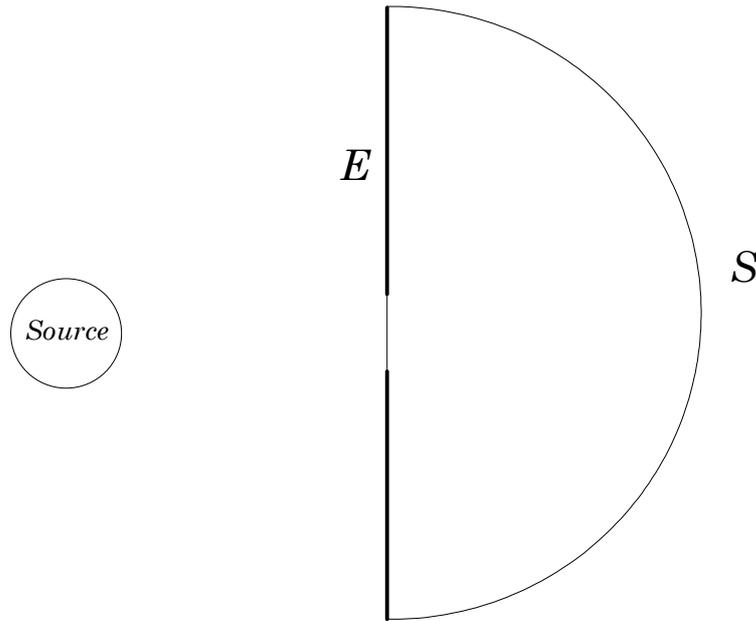
En fait, le champ de la source est clairement nul à l'infini. Il est nul aussi en tous points de l'écran, à condition de prendre  $S$  infiniment proche de l'écran du côté opposé à la source. Cela résulte de l'hypothèse que l'écran est totalement absorbant. Le problème serait donc résolu si on connaissait le champ sur la petite portion de  $S$  au voisinage immédiat du "trou" percé dans l'écran. C'est bien sûr là que réside la difficulté essentielle. Le champ dans cette région est en effet la somme du champ produit par la source et du champ rayonné par les courants induits dans l'écran. Tenir compte convenablement de ceux-ci, c'est résoudre explicitement les équations de Maxwell avec les conditions aux limites imposées par l'écran. Ce calcul est en général tout à fait impossible<sup>1</sup>. Il nous faut donc faire une approximation pour pouvoir continuer.

Cette approximation, équivalente au principe des ondelettes de Huygens, fera l'objet du second paragraphe. Nous assimilerons simplement le champ sur  $S$  "dans le trou" au champ libre des sources en l'absence d'écran. C'est évidemment une approximation très grossière. Nous pourrions cependant en justifier la validité dans la plupart des cas utiles et nous verrons dans la suite qu'elle rend étonnamment bien compte des phénomènes de diffraction les plus courants. Nous établirons alors une formule donnant de façon assez générale le champ diffracté dans le volume  $\mathcal{V}$ .

Dans le dernier paragraphe de ce chapitre, nous retrouverons la formulation élémentaire de la théorie de la diffraction en termes de transformée de Fourier de la fonction de transparence de l'écran. Nous verrons que ce régime s'établit simplement en effectuant une approximation paraxi-

---

<sup>1</sup>Un seul cas a été résolu explicitement par Sommerfeld, au début du siècle, celui de la diffraction par le bord d'un demi-plan infiniment mince. On trouvera le calcul détaillé dans le Born et Wolf.



**Figure 2.1:** Situation générique d'un problème de diffraction. Une source éclaire une portion de l'espace, limitée par une surface  $S$ , à travers une ouverture dans un écran opaque  $E$ .

ale sur l'expression obtenue au paragraphe précédent. Nous rappellerons alors brièvement un certain nombre de résultats standard relatifs à ce régime qui nous seront utiles dans une discussion qualitative des applications de la diffraction.

## 2.1 Formule de Kirchhoff

La situation qui nous préoccupe ici est donc celle représentée sur la figure 2.1 *en l'absence de l'écran*  $E$ . En d'autres termes, nous voulons calculer le champ en tous points du volume  $\mathcal{V}$  intérieur à la surface  $S$  à partir de la valeur du champ sur cette surface. Nous supposons qu'il n'existe pas de sources à l'intérieur du volume  $\mathcal{V}$  où nous calculons le champ. Si c'était le cas, il faudrait ajouter à notre résultat leur contribution, calculée par la formule des potentiels retardés. Il faut bien dire qu'on n'éclaire pas en général l'image de diffraction avec une lampe de poche placée derrière l'écran percé!

Nous considérerons bien sûr la forme générique de l'équation de propagation et, comme au chapitre précédent, nous noterons  $\phi$  la composante du potentiel que nous appellerons systématiquement "champ" par abus de langage et  $S$  sa source. Nous calculerons le champ en un point générique  $\mathbf{r}, t$  du volume  $\mathcal{V}$ . Dans toute la suite,  $\mathbf{r}_1, t_1$  désignera un point de la surface  $S$  ou du volume  $\mathcal{V}$  à un autre instant.

Comme il n'y a pas de sources dans  $\mathcal{V}$ , on a

$$\square_1 \phi(\mathbf{r}_1, t_1) = 0, \quad (2.1)$$

où  $\square_1$  désigne l'opérateur d'Alembertien portant sur les coordonnées spatio-temporelles du point  $\mathbf{r}_1, t_1$ . On a de même, en utilisant la définition de la fonction de Green:

$$\square_1 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t - t_1) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \delta(t - t_1) \quad (2.2)$$

(nous dérivons ici par rapport à  $\mathbf{r}_1$  et non par rapport à  $\mathbf{r}$ , mais le résultat est le même puisque  $\square$  ne fait intervenir que des dérivées du second ordre, insensibles au signe de l'argument). On déduit immédiatement de ces deux expressions que:

$$G \square_1 \phi - \phi \square_1 G = -\phi(\mathbf{r}_1, t_1) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \delta(t - t_1). \quad (2.3)$$

Intégrons maintenant les deux membres de cette équation sur le temps  $t_1$  et sur les points  $\mathbf{r}_1$  du volume  $\mathcal{V}$ . L'intégrale du second membre donne trivialement  $-\phi(\mathbf{r}, t)$ . On a donc:

$$-\phi(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{r}_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 [G \square_1 \phi - \phi \square_1 G] \quad (2.4)$$

Nous chercherons maintenant à transformer l'intégrale de volume en une intégrale sur la surface  $S$ . Pour cela, remplaçons maintenant le d'alembertien par son expression explicite:  $\square_1 = 1/c^2 \partial^2 / \partial t_1^2 - \Delta_1$ . L'intégrale fait alors intervenir une somme de deux termes, l'un contenant les dérivées temporelles et l'autre les opérateurs laplaciens. Les termes temporels s'écrivent:

$$G \frac{\partial^2 \phi}{\partial t_1^2} - \phi \frac{\partial^2 G}{\partial t_1^2} = \frac{\partial}{\partial t_1} \left[ G \frac{\partial \phi}{\partial t_1} - \phi \frac{\partial G}{\partial t_1} \right] \quad (2.5)$$

L'intégration temporelle est donc immédiate. Elle donne un terme proportionnel à  $\phi$  et  $G$ , évalué à  $t_1 = -\infty$  ou  $t_1 = \infty$ . Très clairement, tout modèle raisonnable doit supposer que les champs s'annulent à des instants infiniment lointains. Ce terme tout intégré est donc manifestement nul et il ne reste que les termes en laplacien:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathcal{V}} d^3\mathbf{r}_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 (G \Delta_1 \phi - \phi \Delta_1 G) . \quad (2.6)$$

Le terme à intégrer est manifestement une divergence:

$$G \Delta_1 \phi - \phi \Delta_1 G = \nabla_1 \cdot [G \nabla_1 \phi - \phi \nabla_1 G] . \quad (2.7)$$

On peut immédiatement transformer l'intégrale de volume en une intégrale sur  $S$  et écrire:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_S d\mathbf{S}_1 \cdot [G \nabla_1 \phi - \phi \nabla_1 G] , \quad (2.8)$$

où  $d\mathbf{S}_1$  est l'élément de surface de  $S$  (avec l'orientation classique de la normale sortante). Une simple convention de notations nous permet alors d'obtenir la formule de Kirchhoff sous sa forme standard. Nous définirons la "dérivée normale" d'une fonction  $\phi$  sur la surface  $S$  comme:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla_1 \phi , \quad (2.9)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal à  $S$ . Remarquant que  $d\mathbf{S}_1 = dS_1 \mathbf{n}$ , nous avons finalement:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_S \left[ G \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G}{\partial n} \right] dS_1 . \quad (2.10)$$

Nous avons donc rempli nos objectifs en exprimant le champ en tous points intérieurs à  $\mathcal{V}$  en fonction du champ uniquement sur  $S$ . Bien sûr, la connaissance du champ sur  $S$  à tous les instants est nécessaire pour reconstituer tout le champ dans  $\mathcal{V}$ . La formule de Kirchhoff ainsi établie est parfaitement générale et exacte. Notons qu'il en existe d'autres versions beaucoup plus sophistiquées, permettant par exemple de traiter les fonctions de corrélation du champ. On les trouvera décrites dans le Born et Wolf.

## 2.2 Principe de Huygens

Si la formule de Kirchhoff résout parfaitement la question en l'absence d'écran, elle ne nous est pas directement utile pour la diffraction. En effet, dans le cas de la figure 2.1, il est clair que le champ  $\phi$  est nul en tous les points de  $S$  qui sont directement situés derrière l'écran. Il est nul également

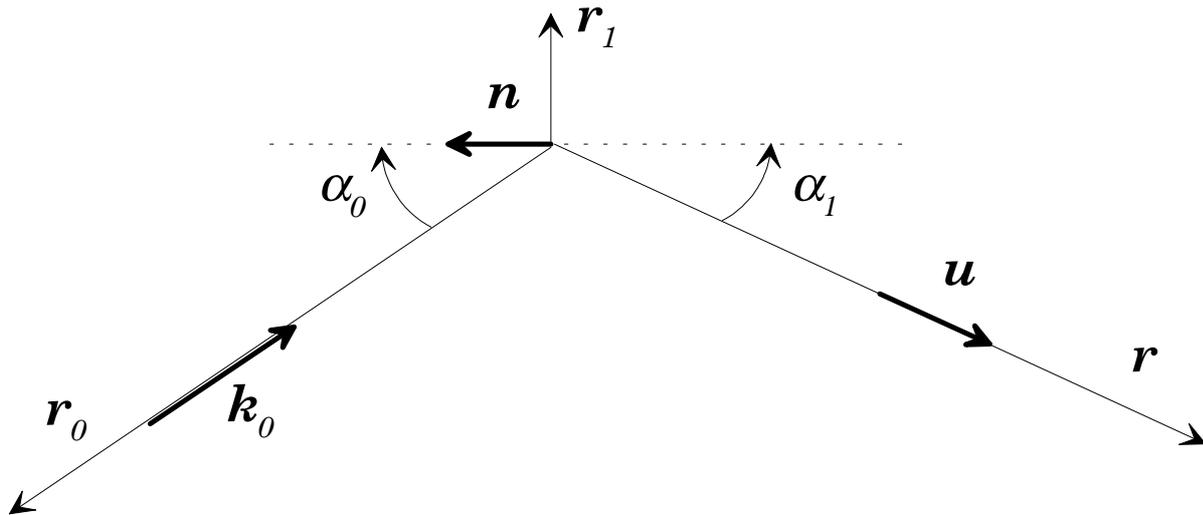


Figure 2.2: Conventions d'orientation et notations pour le calcul du champ diffracté.

sur les portions de  $S$  situées à l'infini. Il n'est non nul en fait que sur les portions de  $S$  qui sont situées immédiatement derrière le trou dans l'écran  $E$ . Le problème est que le champ à ce niveau est la somme des champs produits par les sources et des champs rayonnés par les courants induits dans l'écran. Ceux-ci, comme nous l'avons déjà vu, ne sont pas en général calculables. Il nous faut donc recourir à une approximation pour poursuivre.

Cette approximation est plutôt brutale. Nous allons supposer que *les champs en tous points de la surface  $S$  derrière le trou sont identiques aux champs rayonnés par les sources en l'absence de l'écran*. Nous négligeons ainsi les courants induits dans l'écran qui sont précisément responsables de son opacité! Nous pouvons cependant essayer d'imaginer dans quels types de conditions cette approximation pourrait être valable.

Elle est d'abord loin d'être valable si les dimensions du trou sont de l'ordre de la longueur d'onde ou plus petites. Il est clair que, dans une telle structure, les champs sont considérablement modifiés par rapport à ce qu'ils sont dans l'espace libre<sup>2</sup>. Il est clair aussi que cette approximation tombe si l'épaisseur de l'écran est beaucoup plus grande que les dimensions transverses du trou. Là aussi, les champs à la sortie n'ont rien à voir avec les champs directement rayonnés par les sources. Si cette approximation grossière a quelques chances de refléter la réalité, c'est pour des ouvertures ayant une extension grande devant la longueur d'onde et percées dans des écrans minces. Heureusement, c'est une situation qu'on rencontre souvent en optique. En fait, cette approximation est bien meilleure en pratique que ne le laisse supposer son aspect.

Nous allons pouvoir alors expliciter le calcul des dérivées de la fonction de Green et du champ et terminer le calcul de la formule de Kirchhoff. Pour simplifier encore un peu, nous allons supposer (ce qui est en général le cas en pratique) que les sources sont monochromatiques et situées loin de l'écran (à l'échelle de la taille du trou). En d'autres termes, nous allons assimiler le champ des sources à une onde plane de fréquence  $\omega$  au niveau du trou. Nous considérerons des points  $\mathbf{r}_1$  sur la portion de la surface  $S$  au "voisinage" du trou. La figure 2.2 précise un certain nombre de conventions d'orientation.

Nous choisirons une origine  $O$  située dans cette portion de  $S$ . La normale  $\mathbf{n}$  à  $S$  est orientée en direction de la source. Si le trou est assez petit, nous pourrions assimiler la portion utile de  $S$  à un

<sup>2</sup>Notons que, dans ce cas, le calcul des champs transmis est possible. En effet, les phénomènes de propagation jouant peu pour des dimensions plus petites que  $\lambda$ , on peut raisonner comme si les champs étaient statiques. On calcule donc le champ électrique, en électrostatique, à l'orifice du trou. On lui ajoute alors une dépendance sinusoïdale en temps et on peut calculer ensuite le champ rayonné, par exemple en appliquant la formule de Kirchhoff à une surface bien choisie. On trouvera des discussions de problèmes similaires dans le Jackson.

plan.  $\mathbf{n}$  est donc constant. Les sources sont situées à grande distance en  $\mathbf{r}_0$  dans une direction faisant un angle  $\alpha_0$  avec  $\mathbf{n}$ . Le vecteur d'onde de l'onde plane incidente sera noté  $\mathbf{k}_0$ . Le point d'observation  $\mathbf{r}$  est situé dans une direction faisant un angle  $\alpha_1$  avec l'opposé de  $\mathbf{n}$ . Nous noterons  $\mathbf{u}$  le vecteur unitaire de la direction d'observation. Le point courant de l'intégration est simplement repéré par sa position  $\mathbf{r}_1$ .

Nous avons donc essentiellement à calculer  $\partial\phi/\partial n$  et  $\partial G/\partial n$ . Le champ des sources au point  $\mathbf{r}_1$  s'écrit:

$$\phi(\mathbf{r}_1, t_1) = e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_1} e^{-i\omega t_1} . \quad (2.11)$$

On a donc

$$\nabla_1 \phi = i\mathbf{k}_0 \phi \quad (2.12)$$

et

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -ik \cos \alpha_0 \phi(\mathbf{r}_1, t_1) , \quad (2.13)$$

où  $k$  est le module du vecteur d'onde incident  $\mathbf{k}_0$ . Dans ce calcul, on prendra garde aux différentes orientations.

Ecrivons maintenant  $\partial G/\partial n$ . Le gradient de  $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t - t_1)$  peut s'écrire, en remarquant que la fonction de Green est à symétrie sphérique par rapport au point source ou au point d'observation:

$$\nabla_1 G = -\mathbf{u} \frac{\partial G}{\partial |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|} . \quad (2.14)$$

Nous utiliserons pour  $G$  la forme (1.32).  $\mathbf{r}$  étant dans ce cas toujours très différent de  $\mathbf{r}_1$ , la distribution  $\theta$  ne joue aucun rôle et nous pouvons l'oublier dans le calcul de la dérivée. Nous devons donc dériver  $\delta(t - t_1 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c)/4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$  ce qui donne immédiatement:

$$\nabla_1 G = \mathbf{u} \left[ \frac{\delta'(t - t_1 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c)}{4\pi c |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} + \frac{\delta(t - t_1 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} \right] , \quad (2.15)$$

où  $\delta'$  désigne la dérivée de la distribution de Dirac par rapport à son argument. Le gradient de  $G$  fait donc intervenir deux termes. L'un est en  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$ , l'autre en  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2$ . Quand l'observation a lieu à grande distance, le second terme est négligeable par rapport au premier. On peut bien sûr ne pas être très convaincu par un raisonnement d'ordres de grandeur appliqué à des distributions. Notons qu'on peut rendre le raisonnement plus rigoureux en faisant agir les deux distributions présentes dans le gradient de  $G$  sur une fonction régulière du temps et de l'espace oscillant à la fréquence  $\omega$ ,  $f$ . Le deuxième terme donne une contribution en  $f/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2$  et le premier une contribution en  $f(\omega/c)/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$ . Comme  $\omega/c$  n'est autre que la longueur d'onde  $\lambda$  du rayonnement, le premier terme est plus grand que le second par un facteur de l'ordre de  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/\lambda$ . Nous pouvons donc négliger le deuxième terme dès que la distance d'observation est notablement plus grande que  $\lambda$ . L'écriture finale de  $\partial G/\partial n$  ne pose aucun problème et on a:

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{1}{4\pi c} \cos \alpha_1 \frac{\delta'(t - t_1 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} . \quad (2.16)$$

Nous reportons alors l'expression des dérivées normales dans la formule de Kirchhoff (2.10). Nous commencerons par estimer le terme le plus complexe, en  $\phi \partial G/\partial n$ . Il s'écrit:

$$\begin{aligned} A &= - \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int dS_1 \phi \frac{\partial G}{\partial n} \\ &= \int dS_1 \frac{1}{4\pi c} \cos \alpha_1 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \phi(\mathbf{r}_1, t_1) \delta'(t - t_1 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c) , \end{aligned} \quad (2.17)$$

en procédant d'abord à l'intégrale sur  $t_1$  et en ôtant tous les termes indépendants de  $t_1$ . Dans cette expression et toutes les suivantes, l'intégrale de surface s'étend uniquement à la portion de  $S$  située

immédiatement derrière l'orifice. On pourrait étendre l'intégration à toute la surface en multipliant  $\phi$  par une fonction de transparence, nulle partout sauf dans ce domaine. Pour ne pas alourdir inutilement les notations, nous ne procéderons à cette transformation que dans le paragraphe suivant. L'intégrale sur le temps peut se calculer par parties. Le terme tout intégré est manifestement nul en raison de la présence de la distribution de Dirac. L'intégrale sur  $t_1$  s'écrit donc finalement

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \frac{\partial \phi}{\partial t_1} \delta(t - t_1 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c) = \frac{\partial \phi}{\partial t_1} \Big|_{t_1=t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|/c} . \quad (2.18)$$

$\phi$  étant une fonction oscillante à la fréquence  $\omega$ , sa dérivée temporelle à l'instant retardé peut tout aussi bien s'écrire:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t_1} \Big|_{t_1=t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|/c} = -i\omega \phi(\mathbf{r}_1, t) e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} . \quad (2.19)$$

Remarquons que nous faisons, par un artifice trivial, intervenir ici la valeur du champ estimée au point  $\mathbf{r}_1$ , non pas au temps retardé  $t_1$ , mais bien au temps d'observation  $t$ . L'avantage immédiat de cette approche est que le temps d'observation, au contraire du temps retardé, est invariable quand  $\mathbf{r}_1$  varie (nous n'avons toujours pas fait l'intégration spatiale). On a donc finalement:

$$A = -\frac{i\omega}{4\pi c} \int dS_1 \cos \alpha_1 \phi(\mathbf{r}_1, t) \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \quad (2.20)$$

Nous calculons maintenant l'autre terme dans la formule de Kirchhoff:

$$\begin{aligned} B &= \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int dS_1 G \frac{\partial \phi}{\partial n} \\ &= \int dS_1 \frac{-ik \cos \alpha_0}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \phi(\mathbf{r}_1, t_1) \delta(t - t_1 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c) . \end{aligned} \quad (2.21)$$

L'intégrale sur le temps est triviale et donne:

$$\phi(\mathbf{r}_1, t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|/c) = \phi(\mathbf{r}_1, t) e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} . \quad (2.22)$$

On a donc finalement:

$$B = -\frac{ik}{4\pi} \int dS_1 \cos \alpha_0 \phi(\mathbf{r}_1, t) \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \quad (2.23)$$

En regroupant les termes  $A$  et  $B$  et en remarquant que  $k = 2\pi/\lambda$  et  $\omega/c = k$ , on obtient finalement:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{i\lambda} \int dS_1 \chi \phi(\mathbf{r}_1, t) \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} , \quad (2.24)$$

avec

$$\chi = \frac{1}{2} (\cos \alpha_0 + \cos \alpha_1) . \quad (2.25)$$

L'interprétation physique de cette expression est transparente. Le champ au point d'observation s'écrit comme la somme d'ondes sphériques (le terme en  $e^{ikr}/r$ ) rayonnées par les différents points du trou. Chacune de ces ondes a une amplitude proportionnelle à l'amplitude de l'onde incidente (terme en  $\phi$ ), multipliée par un terme constant en  $1/i\lambda$  et par un facteur purement géométrique décrivant l'inclinaison des "rayons lumineux" par rapport à la normale,  $\chi$ . Nous retrouvons ici sur une base "rigoureuse" le principe des ondelettes de Huygens. Les premières approches théoriques de la diffraction postulaient en effet que chaque élément de surface de l'ouverture diffractante était une "source secondaire" d'une "ondelette" sphérique d'amplitude proportionnelle à celle de l'onde incidente. On retrouve ainsi l'essentiel de la formule (2.24). Il n'y manque que le préfacteur qui n'a aucune importance si on ne s'intéresse finalement qu'à l'intensité diffractée en valeur relative et le

facteur  $\chi$ . Celui-ci est très voisin de l'unité si l'écran est à peu près normal à la direction de l'onde incidente et de l'onde diffractée, ce qui est en général le cas dans une expérience de ce type. Notons que cette dépendance en cosinus des angles n'est pas sans rappeler la loi de Lambert d'émissivité des surfaces.

Le calcul pratique de l'intégrale est en général assez difficile, comme on pourra s'en convaincre aisément. Un des succès les plus marquants de l'optique ondulatoire, qui s'est longtemps opposée à une conception corpusculaire, a été la démonstration théorique et expérimentale, par Poisson, de la présence d'un maximum d'intensité sur l'axe, à distance finie, pour la diffraction par un obstacle circulaire. Le développement des calculs de diffraction au siècle dernier a suscité l'introduction de nombreuses fonctions spéciales, telles la célèbre fonction d'Airy. Des méthodes graphiques ont aussi été développées pour sommer les amplitudes diffractées (méthode des spirales de Cornu, par exemple). Avec les calculateurs numériques, ces méthodes sont tombées en désuétude. Elles ont cependant un contenu physique qui est loin d'être inintéressant (on pensera en particulier à la méthode des zones de Fresnel). On pourra consulter, pour en savoir plus, le Bruhat–Kastler d'optique, très complet sur ce sujet.

## 2.3 Diffraction de Fraunhofer

### 2.3.1 Approximation paraxiale

Nous restreindrons un peu la généralité du paragraphe précédent pour obtenir des expressions plus simples. Nous décrirons en fait une expérience typique de diffraction telle qu'elle est réalisée en optique. En général, l'écran est plan et la source l'éclaire normalement. On a donc  $\cos \alpha_0 = 1$  et  $\phi$  est une constante dans le domaine d'intégration que nous noterons  $\phi_1$ . Nous ferons aussi l'hypothèse que l'observation s'effectue à très grande distance. Nous ne garderons donc dans l'expression finale que les termes au premier ordre non trivial en  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$ . Finalement, nous supposerons que les angles de diffraction sont petits et donc que la direction d'observation est, elle aussi, pratiquement normale au plan de l'écran. On aura donc  $\cos \alpha_1 = 1$  et donc  $\chi = 1$ . Notons que cette approximation est tout à fait consistante avec l'hypothèse d'illumination normale et le principe de Huygens qui ne tient que pour des ouvertures notablement plus grande que  $\lambda$ , pour lesquelles les angles de diffraction restent modérés.

En reportant ces différentes hypothèses dans (2.24), on met le champ diffracté sous la forme:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{\phi_1}{i\lambda} \int dS_1 \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} . \quad (2.26)$$

L'intégrale, là encore, ne porte que sur la portion de  $S$  située immédiatement derrière l'ouverture. Comme l'observation se fait à grande distance, le terme  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$  varie très peu quand le point  $\mathbf{r}_1$  parcourt le domaine d'intégration. Il est donc tout à fait légitime de remplacer, à l'ordre le plus bas, ce terme par  $1/r$ , distance de l'origine (située dans le domaine d'intégration par hypothèse) au point d'observation. Le terme de phase, en revanche, doit être traité plus soigneusement. Il peut varier notablement sur le domaine d'intégration, puisqu'une variation de l'ordre de  $\lambda$  de la distance suffit. Nous allons donc développer ce terme:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)^2 \simeq r^2 \left(1 - 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1}{r^2}\right) \quad (2.27)$$

et donc:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \simeq r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1}{r} . \quad (2.28)$$

L'exponentielle complexe peut donc s'écrire:

$$e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} = e^{ikr} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} \quad (2.29)$$

en posant

$$\mathbf{k} = k \frac{\mathbf{r}}{r} = k\mathbf{u} . \quad (2.30)$$

Nous allons également étendre formellement l'intégration à tout le plan de l'écran. Nous repérerons les positions dans l'espace par un trièdre  $Oxyz$ . L'origine  $O$  est la même. Les axes  $Ox$  et  $Oy$  sont dans le plan de l'écran, l'axe  $Oz$  pointe dans la direction d'observation. Pour étendre l'intégration, nous introduisons donc la *fonction de transparence* de l'écran  $T(x, y)$ . Elle est égale à un en tous points de l'orifice, à zéro partout ailleurs. Avec ces notations, en utilisant les résultats précédents, le champ diffracté à la distance  $r$  dans la direction  $\mathbf{k}$  définie simplement par les composantes transverses  $k_x$  et  $k_y$  du vecteur  $\mathbf{k}$  s'écrit:

$$\phi(k_x, k_y, r) = \frac{\phi_1}{i\lambda} \frac{e^{ikr}}{r} \int dx_1 dy_1 T(x_1, y_1) e^{-i(k_x x_1 + k_y y_1)} . \quad (2.31)$$

Nous retrouvons ici le résultat central des cours élémentaires sur la diffraction: l'amplitude diffractée est proportionnelle à la transformée de Fourier bidimensionnelle de la fonction de transparence  $\tilde{T}(k_x, k_y)$ . Le terme nouveau dans notre approche est le préfacteur. Avant d'explorer rapidement les propriétés essentielles de la figure de diffraction, mentionnons que le calcul précédent peut être généralisé sans difficultés à une incidence arbitraire. L'onde incidente a alors une phase dépendant linéairement de la position dans l'orifice. Le résultat de ce facteur de phase additionnel est une simple translation de la transformée de Fourier. Essentiellement, la figure de diffraction est la même qu'en incidence normale mais elle se trouve centrée autour de la direction incidente (un résultat bien intuitif si on imagine une ouverture de très grande taille). Nous conseillons au lecteur d'établir les expressions correspondantes à titre d'exercice.

### 2.3.2 Différentes expressions de la figure de diffraction

Avant de nous pencher sur les propriétés générales de la diffraction, nous allons mettre (2.31) sous des formes équivalentes, correspondant à différents modes d'observation de la figure de diffraction.

Notons tout d'abord qu'on peut facilement exprimer  $\phi$  en fonction des angles  $\alpha$  et  $\beta$  que font les projections dans les plans  $xOz$  et  $yOz$  du vecteur  $\mathbf{k}$  avec l'axe  $Oz$ :

$$\begin{aligned} \alpha &= k_x/k \\ \beta &= k_y/k , \end{aligned}$$

ces angles étant tous petits dans l'approximation paraxiale. On a alors:

$$\phi(\alpha, \beta, r) = \frac{\phi_1}{i\lambda} \frac{e^{ikr}}{r} \int dx_1 dy_1 T(x_1, y_1) e^{-ik(\alpha x_1 + \beta y_1)} . \quad (2.32)$$

Telle que nous l'avons calculée, la figure de diffraction n'est observable qu'à l'infini (c'est à dire à une distance de l'écran grande par rapport à toutes les dimensions du problème). En pratique, on peut, par exemple, recueillir simplement la figure de diffraction sur un écran plan, perpendiculaire à  $Oz$ , situé à une distance  $D$  de l'origine. C'est la manière dont on procède quand la figure de diffraction est suffisamment lumineuse (par exemple quand on éclaire l'objet diffractant par un faisceau laser). En repérant les points de cet écran par leurs coordonnées  $x$  et  $y$ , on constate immédiatement que  $k_x = kx/D$  et  $k_y = ky/D$ . On peut alors mettre le champ reçu au point  $x, y$  sous la forme:

$$\phi(x, y, D) = \frac{\phi_1}{i\lambda} \frac{e^{ikD}}{D} \int dx_1 dy_1 T(x_1, y_1) e^{-i(k/D)(xx_1 + yy_1)} . \quad (2.33)$$

Si la figure de diffraction n'est pas très lumineuse, il peut être avantageux de l'observer à distance finie dans le plan focal d'une lentille convergente d'axe optique  $Oz$ . En repérant là encore le plan focal

par les coordonnées  $x$  et  $y$ , on montre facilement que la direction définie par  $\alpha$  et  $\beta$  est conjuguée par la lentille du point  $x = f\alpha$ ,  $y = f\beta$  où  $f$  est la distance focale de la lentille. En omettant les préfacteurs (qui dépendraient dans ce cas de l'ouverture numérique de la lentille), on met alors la figure de diffraction sous la forme:

$$\phi(x, y) \propto \int dx_1 dy_1 T(x_1, y_1) e^{-i(k/f)(xx_1 + yy_1)}. \quad (2.34)$$

Pour toutes ces écritures différentes, la propriété essentielle demeure: la figure de diffraction est la transformée de Fourier à deux dimensions de la fonction de transparence.

### 2.3.3 Généralisation à une transparence arbitraire

Telle que nous l'avons définie, la fonction de transparence vaut 0 ou 1 et correspond au cas d'un écran qui est soit totalement absorbant soit totalement transparent. En réalité, un objet diffractant peut modifier continûment l'amplitude de l'onde incidente et altérer sa phase. L'onde incidente étant plane et normale au plan de l'écran, l'amplitude en amont de l'écran s'écrit toujours  $\phi_1$ . La quantité qui intervient dans tous nos raisonnements pour déterminer le champ diffracté est la valeur de l'amplitude sur la surface  $S$  qui est située en aval de l'écran. Si l'écran est suffisamment mince, son effet sur l'amplitude en un point est a priori une multiplication de l'amplitude incidente en ce point par un facteur réel de réduction (ou d'amplification) d'intensité et par une phase, c'est à dire par un facteur complexe. La condition pour que l'on puisse traiter aussi simplement la transmission par un objet de phase est que celui-ci soit assez mince<sup>3</sup>. Une lentille mince, par exemple, dans un plan situé immédiatement derrière elle, ne modifie que la phase de l'onde mais pas la répartition initiale d'amplitude. Il suffit pour cela, en termes de rayons lumineux, que la déviation d'un rayon dans la traversée de l'objet soit négligeable devant les dimensions transverses caractéristiques du problème. Une lentille mince, un verre inhomogène obéiraient à ces conditions. En revanche, une sphère diélectrique pleine ou un verre fortement dépoli (et donc constitué de micro-lentilles) ne les respecteraient pas. La fonction de transparence ainsi généralisée est donc une fonction à valeurs complexes. Toutes les expressions de la figure de diffraction obtenues dans les paragraphes précédents restent valables.

### 2.3.4 Propriétés générales de la figure de diffraction

Nous allons dégager dans ce paragraphe quelques propriétés générales de la figure de diffraction qui ne sont en fait qu'une réécriture des propriétés standard de la transformée de Fourier.

#### Etendue spatiale et angulaire

Il est bien connu que l'étendue de la transformée de Fourier est inversement proportionnelle à l'étendue de la fonction. Plus la fonction de transparence aura des variations rapides, plus elle sera localisée, plus la figure de diffraction sera ouverte. Plus précisément, si  $\Delta x_1$  est l'extension caractéristique de la fonction de transparence dans la direction  $x_1$ , l'étendue de la figure de diffraction sera, en termes des différentes variables utilisées pour la décrire:

- $\Delta k_x = 1/\Delta x_1$  en termes des composantes du vecteur d'onde;
- $\Delta \alpha = 1/(k\Delta x_1)$  en termes des coordonnées angulaires;
- $\Delta x = D/(k\Delta x_1)$  pour une projection à l'infini;
- $\Delta x = f/(k\Delta x_1)$  pour l'observation dans le plan focal d'une lentille.

---

<sup>3</sup>Ce genre d'approximations est assez largement utilisé dans de nombreux domaines de la physique. On le rencontre en particulier en mécanique quantique pour décrire l'effet d'un potentiel localisé sur une onde plane incidente. Dans ce contexte, le régime qui nous intéresse porte le nom de "régime de Raman-Nath".

### Diffraction et translation

Considérons deux écrans caractérisés par deux fonctions de transmission  $T_a$  et  $T_b$ . Nous supposons que le second écran se déduit du premier par une simple translation spatiale:

$$T_b(x_1, y_1) = T_a(x_1 - x_0, y_1 - y_0) . \quad (2.35)$$

En notant  $\phi_a$  et  $\phi_b$  les deux figures de diffraction et en omettant les préfacteurs pour alléger les notations, on a:

$$\begin{aligned} \phi_b(k_x, k_y) &= \int T_b(x_1, y_1) e^{-i(k_x x_1 + k_y y_1)} \\ &= \int T_a(x_1 - x_0, y_1 - y_0) e^{-i(k_x x_1 + k_y y_1)} \\ &= e^{-i(k_x x_0 + k_y y_0)} \int T_a(x_1, y_1) e^{-i(k_x x_1 + k_y y_1)} . \end{aligned} \quad (2.36)$$

Les deux figures de diffraction sont donc identiques, à un facteur de phase près. A titre d'exercice, on pourra écrire ce facteur de phase pour les autres expressions de la figure de diffraction.

### Théorème des écrans complémentaires

Considérons encore deux écrans, de fonctions de transmission  $T_a$  et  $T_b$ . Nous dirons que ces écrans sont *complémentaires* si:

$$T_b + T_a = 1 . \quad (2.37)$$

Pour des écrans absorbants percés, la complémentarité exprime simplement que tout point opaque sur l'un est transparent sur l'autre et réciproquement. Un trou circulaire est ainsi complémentaire d'un obstacle circulaire de même diamètre. Les figures de diffraction  $\phi_a$  et  $\phi_b$  sont simplement les transformées de Fourier de  $T_a$  et  $T_b$ . La linéarité de la transformée de Fourier et la relation de complémentarité nous permettent donc d'écrire, en omettant une fois de plus les préfacteurs:

$$\phi_a + \phi_b \propto \int e^{-i(k_x x_1 + k_y y_1)} \simeq \delta(k_x) \delta(k_y) . \quad (2.38)$$

On a donc:

$$\phi_a = -\phi_b \quad (2.39)$$

partout sauf dans la direction de l'axe  $Oz$ . On en déduit le théorème des écrans complémentaires ou théorème de Babinet: *les figures de diffraction de deux écrans complémentaires sont identiques sauf sur l'axe.*

La différence entre les figures de diffraction sur l'axe a une origine très claire. Dans le cas d'un diaphragme circulaire, par exemple, il y a beaucoup moins (infiniment moins) de lumière transmise dans la direction initiale de l'onde plane éclairante que pour un obstacle circulaire complémentaire. Nous verrons dans le prochain chapitre qu'on peut utiliser un diaphragme circulaire pour filtrer une image optique. On peut par exemple purifier géométriquement un faisceau laser par ce moyen. Il est évident, bien que le filtrage soit fondé sur les propriétés de la figure de diffraction, que le faisceau transmis serait très différent si on utilisait un écran complémentaire, puisqu'il n'y aurait plus de lumière!

#### 2.3.5 Quelques exemples

Nous rappellerons très brièvement dans ce paragraphe l'expression de quelques figures de diffraction très standard, auxquelles les cours élémentaires ont du familiariser le lecteur. Si ce n'était pas le cas, nous engageons le lecteur à rétablir ces expressions.

### Fente

Nous considérons d'abord une fente rectangulaire dont les côtés sont alignés avec les axes, de largeur  $a$  selon  $Ox$ ,  $b$  selon  $Oy$ . Nous exprimerons la figure de diffraction  $\phi_f$  en termes des angles  $\alpha$  et  $\beta$  et nous omettrons une partie des préfacteurs. On a :

$$\phi_f(\alpha, \beta) \propto ab \frac{\sin(k\alpha a/2)}{k\alpha a/2} \frac{\sin(k\beta b/2)}{k\beta b/2} . \quad (2.40)$$

On se reportera aux manuels d'optique pour y voir cette figure de diffraction.

### Fentes d'Young

Nous considérons deux fentes rectangulaires identiques à la précédente séparées par une distance  $\ell$  le long de  $Ox$ . C'est la configuration de l'expérience des interférences d'Young, la plus simple des expériences d'interférométrie optique. La figure de diffraction  $\phi_y$  s'obtient immédiatement en utilisant les propriétés de translation et la linéarité de la transformation. On a :

$$\phi_y(\alpha, \beta) = \phi_f(1 + e^{-ik\alpha\ell}) , \quad (2.41)$$

où  $\phi_f$  est la figure de diffraction d'une des fentes. On peut, à partir de là, exprimer l'intensité diffractée :

$$I(\alpha, \beta) = 4I_f \cos^2 \frac{k\alpha\ell}{2} , \quad (2.42)$$

où  $I_f$  est l'intensité diffractée par une fente unique. La séparation entre les fentes étant bien sûr plus grande que leur largeur, la modulation due à la superposition des figures de diffraction des deux fentes est beaucoup plus rapide que l'extension de  $I_f$ . On retrouve donc des interférences modulant la figure de diffraction d'une fente unique. L'interfrange est, en termes de l'angle  $\alpha$ , de  $2\pi/k\ell = \lambda/\ell$ , un résultat qu'on peut retrouver de manière élémentaire en considérant la différence de marche entre les deux rayons lumineux provenant des deux fentes.

### Réseau

Le réseau généralise à  $N$  fentes disposées régulièrement les résultats précédents. On obtient, par les mêmes arguments :

$$\begin{aligned} \phi_r &\propto \phi_f \left( 1 + e^{-ik\alpha\ell} + e^{-i2k\alpha\ell} + \dots + e^{-iNk\alpha\ell} \right) \\ &= \phi_f \frac{1 - e^{-iNk\alpha\ell}}{1 - e^{-ik\alpha\ell}} \\ &\propto \phi_f \frac{\sin kN\alpha\ell/2}{\sin k\alpha\ell/2} . \end{aligned} \quad (2.43)$$

Notons que nous avons éliminé un facteur de phase global sans importance physique en cours de calcul.  $\phi_f$  est bien sûr la figure de diffraction d'une fente unique. L'allure de  $\phi_r$  est assez complexe. Elle présente essentiellement des maxima principaux pour

$$\alpha = \frac{p\lambda}{\ell} , \quad (2.44)$$

où  $p$  est un entier. Ces maxima principaux sont appelés "ordres du réseau". Leur largeur est de l'ordre de  $\lambda/4N\ell$ . Ils sont donc beaucoup plus fins que la figure de diffraction de la fente ou que l'interfrange des fentes d'Young. Cette finesse est à l'origine du pouvoir de résolution élevé, proportionnel au nombre de traits, des réseaux utilisés en spectroscopie.

L'amplitude des maxima principaux est proportionnelle à  $N$ . L'intensité est donc quadratique dans le nombre de fentes, ce qui reflète l'addition cohérente des amplitudes issues des différentes fentes. Par "cohérente", dans ce cas, on entend que ces amplitudes sont toutes en phase (plus généralement, on réserve ce terme aux cas où les amplitudes intervenant dans une sommation ont des relations de phase).

### Réseau aléatoire

Posons-nous maintenant le problème d'un réseau de  $N$  fentes réparties aléatoirement et non plus régulièrement dans le plan. Nous noterons  $x_i, y_i$  la position du centre de chaque fente. Nous ne nous préoccupons pas d'éventuels problèmes de recouvrement, supposant que les fentes sont suffisamment petites et de densité suffisamment faible. Cette situation modélise assez bien, par exemple, la diffraction par un brouillard (sur le pont de Tolbiac) de fines gouttelettes. En appliquant les mêmes arguments que précédemment, nous trouverons:

$$\phi_b(\alpha, \beta) = \phi_f \sum_i e^{-ik(\alpha x_i + \beta y_i)} \quad (2.45)$$

$\phi_f$  étant encore une fois la figure de diffraction d'un objet unique. Nous pouvons clarifier un peu cette expression en calculant le carré de son module, c'est à dire l'intensité:

$$I(\alpha, \beta) = I_f \left| \sum_i e^{-ik(\alpha x_i + \beta y_i)} \right|^2. \quad (2.46)$$

En développant le module carré dans cette expression, il apparaîtra deux types de termes. Nous aurons d'abord des termes carrés, au nombre de  $N$ , égaux tous à 1. Les doubles produits se regroupent bien sûr deux par deux pour ne donner qu'une somme de termes réels. Le nombre de ces termes est de  $N^2$  et leur module "moyen" est de 1. Leur signe en revanche dépend des relations entre les phases. Si les ouvertures sont disposées au hasard sur l'écran, la valeur de cette somme est donc le résultat d'une marche aléatoire, ou "marche du marin ivre" le long de l'axe, avec  $N^2$  pas de longueur moyenne 1. Il est bien connu que la distance ainsi parcourue est, en moyenne sur un grand nombre de réalisations, proportionnelle à la racine carrée du nombre de pas. La contribution des termes double produit à la somme est donc elle aussi de l'ordre de  $N$ . Au total, l'intensité diffractée est proportionnelle à  $N$ :

$$I \simeq NI_f. \quad (2.47)$$

La figure de diffraction de cet ensemble aléatoire de fentes est simplement proportionnelle, en termes d'intensité, à la figure de diffraction d'une des fentes. On a là un résultat complètement différent de celui du réseau, où l'interférence entre les différentes figures de diffraction les modifiait complètement. Nous avons en effet ici une addition *incohérente* des amplitudes diffractées par les différentes fentes, en raison du caractère aléatoire des relations de phase entre ces amplitudes. Une manifestation de cette incohérence est le fait que l'intensité résultante est proportionnelle à  $N$ . Dans le cas d'une addition cohérente, ce sont les intensités qui s'ajoutent, alors que ce sont les amplitudes dans le cas d'une diffusion cohérente, résultant alors dans une intensité proportionnelle à  $N^2$ .

Pour en revenir à une illustration physique de ce phénomène, on aura avantage à observer, à grande distance, un réverbère à travers un brouillard de densité moyenne. On observera, autour de la tache centrale, des anneaux faiblement colorés. Ils correspondent effectivement à la figure de diffraction en lumière blanche d'une gouttelette "moyenne". A partir de cette observation, on pourra s'amuser à estimer le diamètre moyen des gouttelettes.

## Chapitre 3

# Applications de la diffraction

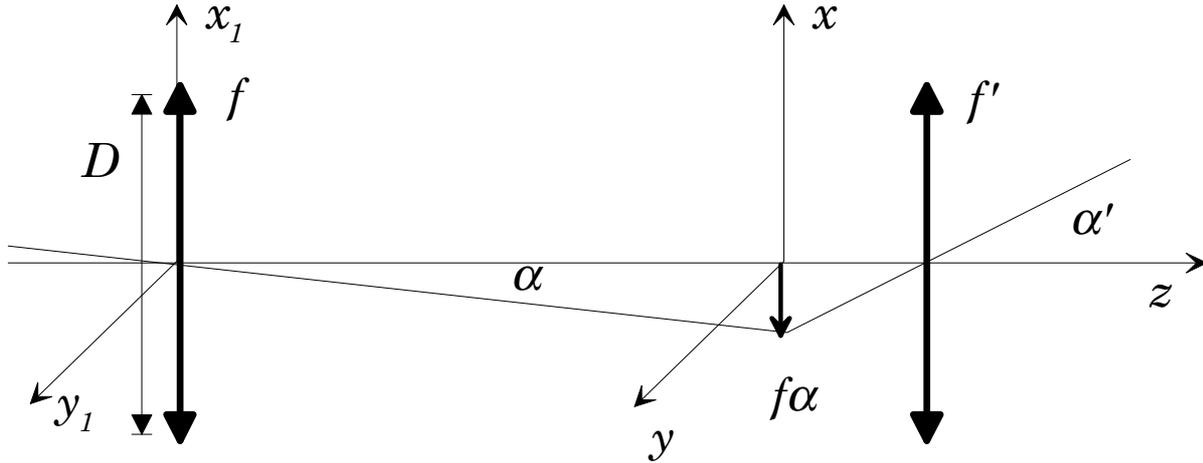
Nous allons brièvement passer en revue dans ce chapitre un certain nombre d'applications de la diffraction. Nous verrons en fait qu'elle peut jouer un rôle extrêmement néfaste dans des expériences d'optique, en limitant par exemple le pouvoir de résolution de nos instruments d'optique. Elle peut, dans le même temps, constituer un outil irremplaçable de traitement du signal optique.

Nous commencerons par parler brièvement du pouvoir de résolution des instruments d'optique. C'est un sujet si vaste que nous ne ferons que l'effleurer. Nous consacrerons ensuite un paragraphe un peu plus étoffé aux techniques de traitement du signal optique. Nous décrirons en particulier la très belle méthode de Labeyrie qui permet, avec des instruments optiques basés au sol, de s'affranchir dans une large mesure de la perte de pouvoir de résolution due aux turbulences atmosphériques. Le paragraphe suivant sera consacré à une description qualitative de l'holographie et de quelques unes de ses applications. Nous dirons aussi un mot de la conjugaison de phase optique, observée en optique non linéaire, qui peut être vue comme une holographie en temps réel. Dans le dernier paragraphe de ce chapitre, nous verrons comment les notions de diffraction permettent de justifier qualitativement l'optique géométrique et la notion de rayon lumineux, ainsi que le principe de Fermat de chemin optique extrémal.

Dans tout ce chapitre, nous resterons très qualitatifs. Nous n'écrirons pratiquement jamais d'équations. Nous nous contenterons de discuter du contenu physique des effets rencontrés. En fait, aller plus loin peut entraîner à des calculs très complexes, tout à fait hors de propos ici. Par exemple, le calcul explicite du pouvoir de résolution d'un microscope optique est extrêmement complexe. On doit, en particulier, faire intervenir les propriétés de cohérence spatiale et temporelle de la lumière qui éclaire l'objet. Les lecteurs intéressés pourront trouver dans le Born et Wolf de longues discussions de ces différents problèmes.

### 3.1 Pouvoir de résolution des instruments d'optique

La taille finie des lentilles utilisées dans les instruments d'optique est une source de diffraction qui peut sévèrement limiter leur pouvoir de résolution. Le problème général étant complexe, nous ne discuterons qu'un cas particulier mais de grande importance pratique, celui de la lunette astronomique. Celle-ci est représentée sur la figure 3.1. Elle est constituée d'une première lentille, l'objectif, de grand diamètre  $D$  et de longue focale  $f$ . Cette lentille forme une image des objets situés à l'infini dans son plan focal. L'axe optique de la lunette étant  $z$ , nous repérerons les positions dans ce plan focal par des coordonnées  $x$  et  $y$ . Une étoile située à une distance angulaire  $\alpha$  de l'axe (dans le plan  $zx$  pour fixer les idées) a son image en  $x = -f\alpha$  dans le plan focal. Une seconde lentille de beaucoup plus courte focale  $f'$ , l'oculaire, permet d'examiner "à la loupe" cette image. Le plan focal objet de l'oculaire est confondu avec le plan focal image de l'objectif. La même étoile donne donc, à la sortie de l'oculaire, un faisceau de lumière parallèle, c'est à dire une image à l'infini. L'angle sous lequel est vue cette



**Figure 3.1:** Schéma de principe d'une lunette astronomique ou d'un télescope.  $z$  est son axe optique. Le plan de la lentille d'entrée, de focale  $f$  et de diamètre  $D$  est repéré par  $x_1, y_1$ . Le plan focal de cette lentille est repéré par  $x, y$ .

image,  $\alpha'$ , est manifestement égal à  $-\alpha f/f'$ . Le grandissement angulaire de ce dispositif afocal est alors simplement  $-f/f'$ , beaucoup plus grand que 1 en module par construction.

Nous avons ainsi décrit le fonctionnement de la lunette astronomique qui n'est plus guère usitée en raison de la difficulté de produire des lentilles de très grand diamètre de qualité et de transparence suffisantes. En revanche, les télescopes les plus modernes fonctionnent exactement sur le même principe, les lentilles étant remplacées par des miroirs sphériques ou paraboliques. Notre discussion s'appliquera donc aussi bien à ces dispositifs, ainsi qu'aux jumelles, où on rajoute simplement un dispositif redresseur d'image pour obtenir une image droite.

La lumière provenant d'une étoile lointaine est, à une excellente approximation, une onde plane (nous négligerons pour le moment les problèmes de phase dus à la traversée de l'atmosphère). L'amplitude dans le plan  $x_1, y_1$  situé juste avant la lentille est donc une constante, si nous supposons pour un moment que l'étoile est sur l'axe optique. Nous pouvons alors voir la correspondance entre les amplitudes dans les plans  $x_1, y_1$  et  $x, y$  comme une expérience de diffraction typique dans le régime de Fraunhofer. L'objet diffractant est l'ouverture circulaire de la lentille d'entrée (le diaphragme d'ouverture). L'objectif donne clairement une image à distance finie de la figure de diffraction. Nous pouvons donc intuitivement la forme de l'image reçue dans le plan focal. Au lieu d'une image strictement ponctuelle comme en optique géométrique (nous négligerons aussi les imperfections optiques de la lentille), on obtient une petite tache dont le diamètre est de l'ordre de  $f\lambda/D$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde incidente. La forme détaillée de cette tache, appelée tache d'Airy, s'exprime simplement avec la fonction de Bessel d'ordre 0. On en trouvera l'expression dans le Born et Wolf. Notons seulement qu'une tache centrale, de rayon  $1.22f\lambda/D$  est entourée d'une série d'anneaux, d'intensité rapidement décroissante.

On peut estimer le pouvoir de résolution de la lunette en évaluant la distance angulaire minimale entre deux étoiles résolues dans le plan focal (on peut se convaincre aisément que l'oculaire ne limite en rien ce pouvoir de résolution si sa qualité optique est convenable). Il faut que les deux taches d'Airy soient séparées par au moins leur rayon. Il faut donc que  $f\alpha > 1.22f\lambda/D$ , soit encore  $\alpha > \lambda/D$ . Ce pouvoir de résolution est tout à fait remarquable pour les gros instruments. Si nous prenons une longueur d'onde incidente de l'ordre du micron et un diamètre d'entrée de l'ordre du mètre, la résolution théorique serait du micro-radian, c'est à dire de l'ordre du centième de seconde d'arc.

En fait, comme nous le verrons dans un prochain paragraphe, l'effet de la turbulence atmosphérique limite le pouvoir de résolution des instruments basés au sol, même dans de très bonnes conditions atmosphériques, au dixième de seconde d'arc environ. Le pouvoir de résolution d'un grand télescope

n'est donc pas supérieur à celui d'un télescope d'amateur, avec une ouverture d'une dizaine de centimètres. L'intérêt de construire de grandes machines est autre: il est de recueillir le plus de lumière possible pour pouvoir observer des objets plus faibles et donc sans doute plus lointains. Notons aussi que certaines techniques permettent de restituer à un grand instrument une partie de son pouvoir de résolution. La première et la plus astucieuse est la méthode de Labeyrie que nous discuterons dans le prochain paragraphe. L'autre, beaucoup plus récente, est l'optique adaptative. Comme l'atmosphère déforme le front d'onde de la lumière stellaire, l'idée est de compenser cette déformation en temps réel par une déformation opposée du système optique. Il faut pour cela disposer d'une référence. Ce peut être par exemple une étoile très brillante située à proximité de l'objet à imager. On interpose dans le trajet optique un miroir déformable actionné par des cales piézo-électriques. En asservissant la position de ces cales pour minimiser la taille de l'image de l'étoile de référence, on compense les fluctuations atmosphériques et on peut obtenir un pouvoir de résolution très amélioré, comparable à celui d'un télescope spatial. Les calculateurs modernes rendent possible cette correction en temps réel, à un coût infiniment moindre qu'une expérience embarquée.

Si nous appliquons maintenant notre raisonnement à l'œil, nous pouvons estimer la limite à son pouvoir de résolution due à la diffraction par la pupille. Le diamètre de celle-ci est de l'ordre du millimètre, la longueur d'onde étant encore de l'ordre du micron. Le pouvoir de résolution angulaire devrait donc être du milli-radian. C'est effectivement, comme on pourra s'en convaincre aisément en examinant à distance les graduations d'une règle, l'ordre de grandeur du pouvoir de résolution d'un œil sain. Le plus remarquable n'est sans doute pas que nos ordres de grandeur soient corrects mais que le cristallin, lentille biologique, très adaptable, atteigne pratiquement la limite de résolution imposée par la diffraction.

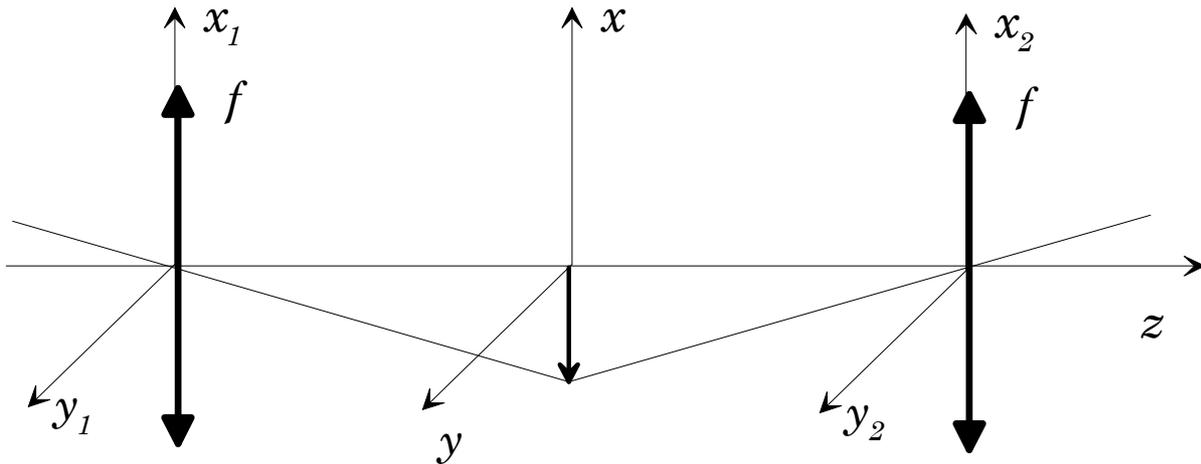
Nous pouvons aussi appliquer cette discussion au pouvoir de résolution d'un appareil photographique. On l'exprime en général en "paires de traits par millimètres" dans le plan focal. En prenant le cas d'un objectif standard ( $f = 50$  mm), ouvert à  $f/4$ , le diamètre  $D$  est de l'ordre du centimètre. Avec une longueur d'onde du micron, la limite de résolution angulaire est de  $10^{-4}$  radians. La distance correspondante dans le plan focal est de  $5 \mu\text{m}$ , correspondant à 100 paire de lignes par millimètre. On a effectivement obtenu la résolution moyenne d'un objectif de bonne qualité qui est donc bien limité seulement par la diffraction.

## 3.2 Traitement optique du signal

Ainsi que nous l'avons discuté dans le paragraphe précédent, la diffraction dans un instrument d'optique correspond à une opération de transformation de Fourier entre l'amplitude dans le plan de l'objectif et l'amplitude dans le plan focal. Une simple lentille est donc un calculateur analogique qui calcule, très bien, les transformées de Fourier bidimensionnelles. On peut donc l'utiliser pour réaliser des fonctions non triviales de traitement du signal.

### 3.2.1 Filtrage spatial

Considérons un des dispositifs optiques les plus simples, le télescope afocal représenté sur la figure 3.2. Il est identique à la lunette astronomique, si ce n'est que le grandissement vaut  $-1$  puisque les deux lentilles, que nous continuerons à appeler objectif et oculaire pour simplifier, sont de même focale. Nous supposerons qu'un objet de transparence non uniforme est placé immédiatement avant la lentille d'entrée et nous nous intéresserons à la répartition d'amplitude sur la lentille de sortie. Ces deux répartitions d'amplitudes sont, si on néglige les imperfections dues à la diffraction par la taille finie des lentilles, exactement identiques à un grandissement total de  $-1$  près. Si nous regardons maintenant le même dispositif, non du point de vue de l'optique géométrique, mais de celui de la diffraction, nous pourrions le trouver plus subtil qu'il n'y paraît.



**Figure 3.2:** Télescope afocal de grandissement unité. Les plans d'entrée, focal image et de sortie seront repérés respectivement par les coordonnées transverses  $x_1, y_1$ ;  $x, y$  et  $x_2, y_2$ . L'axe optique est encore l'axe  $z$ .

La répartition d'amplitude dans le plan focal  $x, y$  est en effet la transformée de Fourier bidimensionnelle de la répartition d'amplitude dans le plan d'entrée  $x_1, y_1$ . L'objectif forme effectivement une image dans ce plan de la figure de diffraction de Fraunhofer. La répartition d'amplitude dans le plan de sortie est donc également la transformée de Fourier de la répartition d'amplitude dans le plan focal. En définitive, la répartition dans le plan  $x_2, y_2$  est la double transformée de Fourier de la répartition dans le plan  $x_1, y_1$ . Elle lui est donc identique (à un changement de signe près pour l'orientation des axes en raison du grandissement négatif).

L'intérêt du dispositif est que nous disposons, dans le plan focal, de la transformée de Fourier de la répartition incidente. Nous pouvons donc, en insérant à ce niveau un diaphragme d'amplitude ou de phase, modifier cette transformée de Fourier et donc la figure de sortie. L'application la plus simple est le filtrage spatial. Supposons que le faisceau incident soit un faisceau laser gaussien (voir appendice 3). La répartition d'intensité devrait être une fonction lentement variable de la position. En raison d'effets d'interférences ou de défauts optiques, cette répartition est souvent imparfaite. Elle présente des structures à petite échelle (speckles ou tavelures) qui peuvent s'avérer très fâcheuses. Pour les éliminer, on peut insérer dans le plan focal un diaphragme de diamètre bien ajusté<sup>1</sup>. La répartition d'amplitude gaussienne doit en effet donner une tache de petit diamètre (essentiellement le diamètre correspondant à la limite de diffraction sur un diamètre d'entrée égal à celui du faisceau). Les tavelures et autres structures à petite échelle correspondent à des fréquences spatiales élevées et se retrouvent, dans le plan focal, à relativement grande distance de l'axe. Ces composantes de fréquence (spatiales) sont interceptées par le diaphragme. La répartition de sortie ne contient plus que les basses fréquences caractéristiques du faisceau gaussien qui se trouve donc "lissé" et débarrassé du bruit. Cette technique de "filtrage spatial" est extrêmement utile dans des expériences d'optique laser.

On peut aussi utiliser le filtrage spatial pour des problèmes d'optique plus classique. On peut ainsi, par exemple, "détramer" des photographies. Une photographie très agrandie ou transmise par des moyens numériques rudimentaires présente un tramage. L'information utile, l'image, est multipliée par une fonction maximale sur les points de la trame, nulle à mi-chemin. En un mot, l'image présente un aspect "pixellisé". Pour raisonner plus simplement, nous prendrons une image à une dimension. Imaginons qu'on ait tiré une épreuve de la photographie tramée sur film transparent. La figure utile peut alors s'exprimer comme une fonction de transparence  $F(x_1)$ . Elle est multipliée par le "tramage",

<sup>1</sup>Les résultats de l'appendice 3 permettront au lecteur intéressé de calculer le waist du faisceau dans le plan focal. Le rayon du diaphragme est typiquement choisi égal à deux fois le waist. On pourra s'amuser à estimer la perte d'intensité résultant du filtrage.

que nous prendrons comme une fonction sinusoïdale de  $x_1$  variant entre 0 et 1,  $\sin^2(x_1/x_0)$ . Plaçons notre épreuve dans le plan d'entrée de notre télescope afocal et éclairons-la par une onde plane. Dans le plan focal, nous obtenons la transformée de Fourier de la fonction de transparence de l'épreuve  $G(x_1) = F(x_1) \sin^2(x_1/x_0)$ .

Cette transformée de Fourier est le produit de convolution de la transformée de Fourier de  $F$  et de la transformée de Fourier de la sinusoïde. Celle-ci est constitué de trois pics de Dirac. L'un, sur l'axe, correspond au fait que cette fonction a une valeur moyenne non nulle. Les deux autres correspondent à la fréquence spatiale de cette fonction (apparaissant une fois pour les fréquences positives et une fois pour les fréquences négatives, puisque la fonction d'origine est réelle). Le produit de convolution est alors une opération triviale. On obtient, dans le plan focal, trois répliques de la transformée de Fourier de  $F$ , centrées sur les trois Diracs de la transformée de la fonction de tramage. Si la fréquence spatiale du tramage est très grande par rapport aux fréquences spatiales présentes dans  $F$ , ces trois répliques ne se recouvrent pas. On peut dire aussi que l'extension spatiale d'un "pixel" doit être très petite par rapport à l'extension spatiale des détails de l'image  $F$  pour que les trois images dans le plan focal soient distinctes.

Si nous plaçons dans le plan focal un diaphragme qui ne laisse passer que la réplique centrale, nous calculerons, avec la seconde lentille, la transformé de Fourier de la transformée de  $F$ , légèrement tronquée dans l'espace des fréquences. La répartition d'amplitude en sortie ne contiendra que l'image photographique utile, débarrassée de tout tramage. Bien sûr, cela s'effectue au prix d'une perte globale d'intensité et d'une perte de résolution. Les plus petits détails visibles dans l'image de sortie sont plus grands que la taille caractéristique du tramage initial. Cette technique permet de s'affranchir d'une information parasite mais elle ne permet pas de recréer l'information perdue. Elle peut être généralisée pour effectuer d'autres traitements, plus complexes. On peut en particulier se débarrasser ainsi de certains flous photographiques (bougé, mauvaise mise au point...). Ces techniques, développées en particulier par Françon, sont maintenant un peu tombées en désuétude avec le traitement numérique du signal. Un calculateur est infiniment moins efficace qu'un afocal pour calculer une transformée de Fourier bidimensionnelle mais il est beaucoup plus versatile, évite les difficultés des plaques photographiques et permet de réaliser des calculs autres que la transformée de Fourier (les transformées en ondelettes sont de plus en plus utilisées pour les traitement de signaux complexes).

Nous avons décrit deux expériences où le filtrage diminue les fréquences spatiales présentes dans l'image. On peut l'utiliser aussi pour doubler, par exemple, une fréquence spatiale. L'expérience est un grand classique des montages d'agrégation. On dispose dans le plan d'entrée une grille de pas  $a$  (nous raisonnerons à une dimension). On observe alors dans le plan focal la transformée de Fourier de cette grille. Elle fait intervenir la fréquence spatiale fondamentale de la grille,  $1/a$ , et tous ses harmoniques (seulement les harmoniques impairs pour une fonction carrée de rapport cyclique 0.5). On observe donc, de part et d'autre de l'axe, une série de taches équidistantes. Insérons maintenant, dans le plan focal, une grille de pas adapté qui ne laisse passer que les harmoniques pairs de la fréquence fondamentale. L'opération de transformée de Fourier effectuée par la lentille de sortie restituera alors une fonction modulée spatialement à une fréquence *double* de la fréquence initiale! En un mot, si le pas de la grille d'entrée est  $a$ , on observera en sortie une modulation (une grille) de pas  $a/2$ . Voici une expérience délicate mais spectaculaire qui illustre bien les possibilités du traitement optique du signal.

### 3.2.2 Méthode de Labeyrie

La méthode de Labeyrie utilise astucieusement les propriétés de la transformation de Fourier pour s'affranchir, dans les instruments astronomiques basés au sol, de l'influence de la turbulence atmosphérique. Comme prototype d'instrument, nous considérerons la lunette astronomique représentée sur la figure 3.1. Si l'atmosphère n'existait pas, la lumière provenant d'une étoile lointaine située sur l'axe serait une onde plane d'amplitude constante dans le plan  $x_1, y_1$  donnant, dans le plan focal, une

tache d'Airy dont le diamètre n'est limité que par la diffraction.

En fait, l'atmosphère perturbe les surfaces d'ondes. Son effet, si elle n'est ni trop épaisse ni trop agitée (une bonne nuit d'observation astronomique dans un très bon site), est de multiplier l'onde incidente par un facteur de phase qui peut s'écrire dans le plan d'entrée  $\exp iw(x_1, y_1, t)$ . La fonction  $w$  est variable dans le temps. Dans un très bon site, elle reste stable pendant quelques dizaines de millisecondes. Elle varie de  $2\pi$  sur une échelle spatiale  $\Delta x_1$  de l'ordre de 10 cm. La phase de l'onde étant complètement brouillée à cette échelle, on comprend bien pourquoi les plus grands télescopes n'ont pas un pouvoir de résolution meilleur que celui d'un télescope de 10 cm d'ouverture. Notons que cette vision de l'effet de l'atmosphère correspond seulement aux meilleures conditions d'observation astronomique dans un site calme et de haute altitude. Au niveau du sol, dans un lieu habituel, l'effet est beaucoup plus violent. Des effets de focalisation affectent phase et amplitude à une beaucoup plus petite échelle. Ce sont ces variations d'amplitude qui sont responsables du scintillement apparent des étoiles.

La tache observée dans le plan focal est donc la transformée de Fourier de la fonction  $w$ , tronquée au diamètre  $D$  de l'ouverture de l'objectif. C'est donc le produit de convolution d'une tache d'Airy, d'extension  $f\lambda/D$ , par la transformée de  $w$ . Celle-ci est très complexe, avec une taille totale de l'ordre de  $f\lambda/\Delta x_1$  et des détails à toutes les échelles jusqu'à celle de la fonction d'Airy. La tache focale est donc large ( $f\lambda/\Delta x_1$ ) avec des détails dont la plus petite échelle est  $f\lambda/D$  et change complètement au moins 100 fois par seconde. Une observation lente ne révèle donc qu'une vaste tache d'intensité uniforme: tout le pouvoir de résolution du télescope est perdu.

En revanche, si la source est suffisamment intense pour qu'on puisse enregistrer la tache de diffraction instantanée, elle révèle des speckles ou tavelures dont l'extension correspond encore au pouvoir de résolution théorique de l'instrument. On peut donc espérer, pour ces sources intenses, récupérer l'information. Pour illustrer la méthode, supposons que nous ayons à séparer deux étoiles. L'une est sur l'axe, l'autre est dans une direction inclinée, dans le plan  $x_1, z$ , d'un petit angle  $\theta$  par rapport à l'axe optique. Si l'atmosphère était absente, l'amplitude dans le plan d'entrée serait une constante  $\phi_1$  pour la première étoile et vaudrait  $\phi_2 \exp ik\theta x_1$  pour la seconde ( $k = 2\pi/\lambda$ ). En fait, les deux ondes planes incidentes sont déformées par l'atmosphère. Si deux fonction  $w$  différentes agissaient sur les deux ondes, la situation serait sans espoir.

Examinons donc les conditions dans lesquelles les deux ondes planes issues des deux étoiles sont multipliées par le même facteur de phase. Il faut que, dans la traversée de l'atmosphère dense, les deux ondes aient traversé les mêmes fluctuations d'indice. Il faut donc que l'écart maximum entre les trajets soit de l'ordre de la distance sur laquelle  $w$  varie notablement, une dizaine de centimètres en pratique. Cet écart est  $L\theta$ , où  $L$  mesure l'épaisseur de l'atmosphère. Notre calcul s'appliquera donc si  $L\theta < 10$  cm. En prenant  $L = 10$  km, on trouve  $\theta < 10^{-5}$  rd. La méthode de Labeyrie ne s'applique qu'à des étoiles séparées par une distance angulaire plus petite que  $10 \mu\text{rd}$ . Mais, en raison d'une coïncidence numérique remarquable, cette distance angulaire correspond précisément au pouvoir de résolution d'un télescope limité par les fluctuations atmosphériques,  $\lambda/\Delta x_1$ . Dès que les taches de speckle de deux étoiles commencent à être confondues, on peut commencer à appliquer la méthode de Labeyrie. On peut donc écrire les ondes incidentes sur la lentille d'entrée sous la forme:

$$\begin{aligned} & \phi_1 e^{iw(x_1, y_1, t)} \\ & \phi_2 e^{iw(x_1, y_1, t)} e^{ik\theta x_1} \end{aligned}$$

Les ondes provenant des deux étoiles étant manifestement incohérentes, sans aucune relation de phase, les termes d'interférences sont nuls et les éclaircissements produits par les deux sources dans le plan focal de l'objectif s'ajoutent simplement:  $I = I_1 + I_2$  avec:

$$I_1(x, y) = \left| \int \phi_1 e^{iw(x_1, y_1, t)} e^{-i(k/f)(xx_1 + yy_1)} \right|^2 \quad (3.1)$$

$$I_2(x, y) = \left| \int \phi_2 e^{iw(x_1, y_1, t)} e^{ik\theta x_1} e^{-i(k/f)(xx_1 + yy_1)} \right|^2 \quad (3.2)$$

$$= I_1(x - f\theta, y), \quad (3.3)$$

le facteur de phase additionnel dans l'amplitude de la seconde étoile produisant une simple translation de la figure de diffraction. Notons que la translation correspond précisément à la distance entre les deux images dans le plan focal en optique géométrique. La tache obtenue dans le plan focal est donc la superposition de deux taches de speckle identiques, translattées de  $f\theta$  l'une par rapport à l'autre. En corrélant la position des irrégularités de ces deux images, on pourra remonter à la distance angulaire entre les deux étoiles.

En fait, on peut très simplement extraire l'information utile par une simple expérience de diffraction. Si l'image enregistrée dans le plan focal de l'objectif est photographiée et l'épreuve développée, on obtiendra un objet dont la transmission est proportionnelle à l'intensité incidente  $I$  (pour un tirage en négatif, ce qui est en général le cas, l'opacité est proportionnelle à l'intensité incidente. Toutefois, grâce au théorème des écrans complémentaires, la figure de diffraction d'un tirage positif et d'un négatif sont identiques). Eclairons alors cet objet par une onde plane. L'amplitude diffractée dans la direction définie par les angles  $\alpha$  et  $\beta$  sera donnée par:

$$g(\alpha, \beta) = \int I(x, y) e^{-ik(\alpha x + \beta y)} dx dy. \quad (3.4)$$

Elle est donc la somme des transformées de Fourier de  $I_1$  et  $I_2$ . Si  $g_1(\alpha, \beta)$  est la transformée de  $I_1$ , celle de  $I_2$  est évidemment  $g_1 \exp(-ik\alpha f\theta)$  puisque les deux répartitions d'intensité se déduisent l'une de l'autre par une simple translation. Nous pouvons alors écrire l'intensité reçue dans la direction  $\alpha, \beta$  (qui en pratique serait reçue à distance finie au foyer d'une lentille) comme :

$$I(\alpha, \beta) = 2|g_1|^2(1 + \cos k\alpha f\theta). \quad (3.5)$$

Le terme en  $|g_1|^2$  représente la transformée de Fourier de la tache de speckle. C'est donc une tache irrégulière dont l'extension maximale  $1/k(D/\lambda f) \simeq D/f$  correspond à la taille minimale des speckles. Les structures intérieures ont une extension caractéristique  $\Delta x_1/f$  correspondant à l'extension totale de la tache de speckle. L'intensité diffractée totale superpose à cette tache aléatoire une modulation certaine à la fréquence  $kf\theta/2$ . L'examen de ces franges modulant la tache permet évidemment de mesurer la distance angulaire entre les deux étoiles. Il faut pour cela qu'on ait au moins une frange sur l'extension de la tache, ce qui s'exprime par:

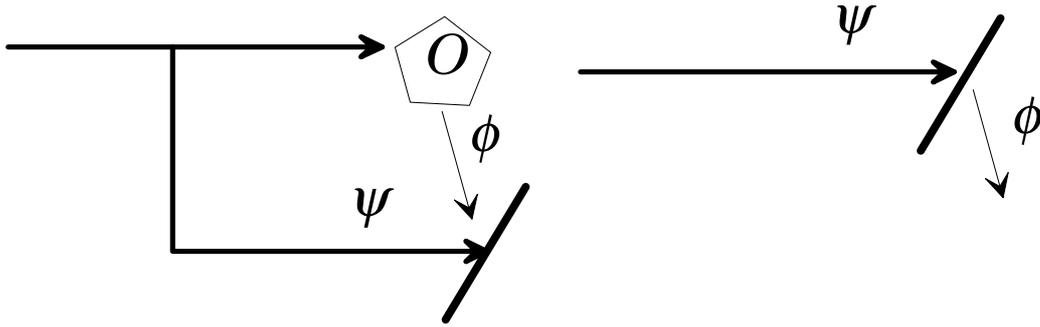
$$\frac{D}{f} > \frac{1}{f\theta k}, \quad (3.6)$$

ou encore

$$\theta > \frac{\lambda}{D}. \quad (3.7)$$

On peut donc séparer les deux étoiles dès que leur distance angulaire est plus grande que le pouvoir de résolution théorique du télescope en l'absence de toute perturbation atmosphérique. On a restitué à l'instrument tout son pouvoir de résolution!

La méthode de Labeyrie peut maintenant être réalisée de manière numérique. En enregistrant un ensemble de taches de speckle, on peut, par des techniques de reconstruction d'image, restituer une véritable image bidimensionnelle. Elle ne peut toutefois s'appliquer qu'à des objets relativement lumineux. On doit en effet enregistrer la tache de speckle en un temps court par rapport aux constantes de temps des fluctuations de l'atmosphère. En pratique, cela impose des temps de pose entre la milliseconde et la dizaine de millisecondes. Seules des étoiles relativement proches sont assez lumineuses. L'optique adaptative, elle, ne souffre pas de cette limite et permet d'obtenir le pouvoir de résolution théorique, même avec des objets très faibles.



**Figure 3.3:** Principe de l'enregistrement et de la restitution d'une image holographique. A gauche, enregistrement. La plaque photographique enregistre l'interférogramme entre une onde plane de référence, dérivée de la source cohérente éclairant l'objet, et l'onde diffusée. A gauche, restitution. La plaque photographique, éclairée par l'onde de référence, diffracte entre autres une onde identique à l'onde provenant de l'objet: on obtient une image en relief.

### 3.3 Holographie

Une des applications les plus connues de la diffraction est sans conteste l'holographie qui est maintenant entrée dans le domaine des applications grand public. L'objet essentiel de l'holographie est de restituer une vision en relief de l'objet enregistré. Il faut pour cela être capable de stocker sur une plaque photographique non seulement le module de l'onde reçue (ce que fait la photographie ordinaire) mais aussi sa phase. La vision en relief n'est complètement restituée que si l'on dispose de tout le front d'onde de l'onde d'origine. Nous commencerons par exposer brièvement, sans entrer dans le détail des calculs, le principe de l'holographie, inventée par Gabor il y a plus d'un demi siècle, mais qui n'est guère entrée dans les applications pratiques qu'avec l'invention du laser. Nous donnerons ensuite brièvement quelques applications non ludiques de l'holographie. Nous montrerons enfin comment l'holographie peut être réalisée en temps réel avec un milieu optique non linéaire.

#### 3.3.1 Principe

Le but de l'opération est de restituer toute l'information de l'onde  $\phi$  rayonnée par un objet éclairé par une source (nous ne considérerons ici que des rayonnements cohérents monochromatiques). Pour cela, on enregistre sur une plaque photographique une interférence entre l'onde  $\phi$  émise par l'objet et une onde plane cohérente  $\Psi$  (dérivée du faisceau qui éclaire l'objet et provenant, en pratique, du même laser). Le principe de l'enregistrement de l'hologramme est représenté sur la partie gauche de la figure 3.3. L'amplitude reçue en un point de la plaque photographique est alors  $\phi + \Psi$ . Après développement, la plaque photographique devient un objet dont la transparence en un point est:

$$T(x, y) = |\phi|^2 + |\Psi|^2 + \phi\Psi^* + \phi^*\Psi . \quad (3.8)$$

Les deux premiers termes décrivent une information d'intensité qui ne présente guère d'intérêt. L'enregistrement holographique est en fait contenu dans les deux derniers termes, termes d'interférences et dépendant donc de la phase de l'onde diffusée.

La restitution de l'hologramme consiste à éclairer la plaque photographique avec la même onde de référence  $\Psi$  qu'à l'enregistrement. L'onde transmise a alors la forme  $T\Psi$  qu'on peut écrire facilement comme:

$$(|\phi|^2 + |\Psi|^2)\Psi + |\Psi|^2\phi + \Psi^2\phi^* \quad (3.9)$$

Le premier terme est essentiellement une onde plane identique à l'onde de référence, multipliée par une fonction de transparence modulée qui introduira un fond de diffraction ne contenant guère d'informations. Le second terme est le terme essentiel. Il est en effet, à des facteurs d'amplitude

près, identique à l'onde diffusée par l'objet. On “voit” donc sortir de la plaque photographique, superposée à une lumière diffuse due aux autres termes, l'onde diffusée par l'objet. En un mot, on observe en arrière de la plaque une image virtuelle de l'objet.

Le dernier terme est important quant on éclaire la plaque holographique avec une onde  $\Psi^*$ , c'est à dire une onde plane se propageant dans la direction inverse de  $\Psi$ . Superposée au fond, on a en effet dans ce cas une onde  $\phi^*$ , conjuguée de phase de l'onde émise par l'objet. Au lieu d'une onde divergente provenant de l'objet, on a une onde convergeant vers le symétrique de l'objet par rapport à la plaque. En un mot, on observe une image réelle de l'objet en avant de la plaque. Ces “hologrammes avant” sont bien sûr beaucoup plus spectaculaires que les hologrammes arrière traditionnels, parce que l'objet semble sortir de la plaque et flotter dans l'espace. Une visite dans une exposition d'hologrammes s'impose à ce point. Insistons encore sur le fait que l'hologramme restitue toute l'information. L'hologramme d'un objet sous une loupe, par exemple, contient l'objet, la loupe, mais aussi l'image de l'objet agrandi par la loupe!

Nous pouvons, à partir de cette simple discussion, dégager les conditions expérimentales pour l'obtention d'un hologramme. D'abord, il est absolument crucial de disposer d'ondes présentant une stabilité de phase parfaite pendant le temps d'enregistrement. On peut réaliser une stabilité approchée, comme le faisait Gabor, avec des sources ordinaires, convenablement filtrées spatialement et en fréquence. Mais leur intensité devient très faible, les temps de pose prohibitifs et on ne peut enregistrer que des hologrammes de petits objets très lumineux. La méthode ne présente d'intérêt pratique qu'avec une source laser, très intense et parfaitement cohérente temporellement. Il faut cependant que les distances relatives entre l'objet, le laser et la plaque photographique restent constantes à beaucoup mieux qu'une longueur d'onde pendant le temps de pose. Il faut donc un montage interférométriquement stable, ce qui rend plus difficile l'enregistrement d'objets mobiles ou la cinématographie holographique. Enfin, il faut que la plaque photographique ait un grain très fin pour enregistrer fidèlement un figure d'interférences dont le pas est évidemment de l'ordre de la longueur d'onde. Un grain aussi fin implique une sensibilité relativement basse et des temps de pose longs.

Enfin, un point essentiel est de restituer l'hologramme avec une onde cohérente. Dans les premiers temps de l'holographie, on devait utiliser le laser d'enregistrement, ce qui rendait la lecture complexe. On a depuis mis au point des hologrammes visibles en lumière naturelle, tels ceux qui servent de cachet d'authentification sur les cartes de crédit. L'idée est tirée en fait du principe de la photographie Lippman en couleurs. Dans cette technique, on enregistre une image photographique avec une émulsion épaisse préparée sur un miroir. Une longueur d'onde donnée crée alors une onde stationnaire. Après développement de l'émulsion, on obtient des plans métalliques (argent) distants d'une demi-longueur d'onde du rayonnement incident (en incidence normale). Ces plans constituent une série d'interféromètres de Fabry Perot qui ne réfléchissent efficacement que les longueurs d'onde très voisine de celle d'enregistrement. Lippman pouvait ainsi réaliser des photographies de couleurs très réalistes avec une émulsion monochrome. Contrairement aux photographies couleurs basées sur des pigments, celles de Lippman sont parfaitement stables à la lumière et conservent leurs couleurs après près d'un siècle. Dans le domaine de l'holographie, le même principe peut être utilisé pour ne réfléchir que les longueurs d'onde voisines de la longueur d'onde incidente et fournir une cohérence suffisante pour lire l'hologramme. Cela explique aussi que les couleurs interférentielles observées sur ces hologrammes en lumière naturelle changent rapidement avec l'angle d'incidence.

Notons enfin que l'information sur l'objet est délocalisée sur toute la surface de l'hologramme. Une portion quelconque de l'hologramme peut être utilisée pour la reconstruction. Elle régénère en effet toute l'amplitude diffusée par l'objet et pas, comme on pourrait s'y attendre intuitivement, l'amplitude diffusée par une partie de l'objet seulement. On y perd seulement sur le champ de vision (l'objet apparaît vu à travers la plaque holographique) et sur la résolution spatiale de la reconstruction (un peu de la même manière qu'on perd sur la résolution spectrale d'un réseau en diminuant le nombre de traits).

### 3.3.2 Applications

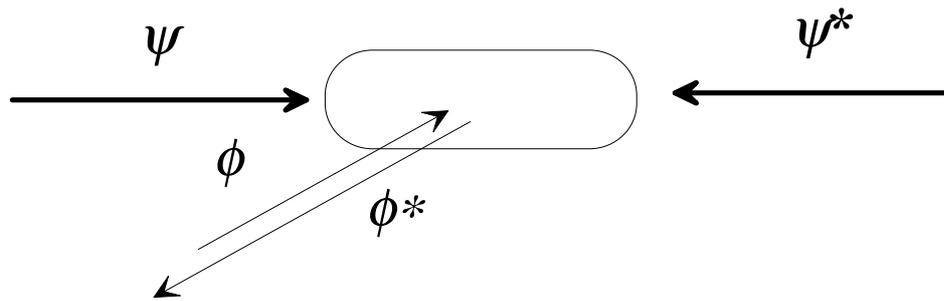
Au delà d'aspects ludiques ou artistiques, l'holographie est un précieux moyen d'observation. Une application industrielle particulièrement importante est la visualisation des vibrations des machines en mouvement. Supposons qu'on prenne, à un instant  $t$ , un hologramme instantané d'une machine en fonctionnement. On peut réaliser ce genre d'hologramme en utilisant un laser en impulsions brèves. La durée d'impulsion, en général de l'ordre de la dizaine de nanosecondes, est assez brève pour que tous les points de la machine puissent être considérés comme immobiles, assez longue cependant pour que le faisceau soit cohérent (la longueur de cohérence est alors de quelques mètres<sup>2</sup>). L'onde enregistrée sur la plaque holographique sera notée  $\phi$ . Pour simplifier notre analyse qualitative, nous considérerons d'abord que la machine est réduite à un seul point en mouvement. A l'instant  $t$ , nous avons donc réalisé l'hologramme d'un point à la position  $\mathbf{r}$ . A un instant ultérieur  $t'$ , on enregistre, sur la même plaque, l'onde  $\phi'$  correspondant à la nouvelle position  $\mathbf{r}'$  du point. On développe (ou on traite numériquement dans les versions modernes). La transmission de la plaque contient alors un terme en  $\Psi^*(\phi + \phi')$ . L'onde restituée est alors  $\phi + \phi'$ . On aurait la même image en éclairant, à un seul instant, deux points sources situés aux positions  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{r}'$  avec une seule source cohérente. La relecture de l'hologramme doit donc fournir des interférences entre ces deux points sources cohérents. Quand on tient compte de tous les points de l'objet en mouvement, on observe sur l'image reconstituée des franges d'interférences qui révèlent les déplacements de l'objet entre les instants  $t$  et  $t'$ . Ces franges sont analogues aux franges d'égale épaisseur des lames minces d'air. Elles sont localisées à la surface de l'objet. Le simple examen de l'image holographique révèle les mouvements avec une résolution égale à la longueur d'onde optique. En synchronisant les impulsions laser sur le fonctionnement de l'appareil, on peut réaliser une analyse stroboscopique des vibrations. Cette méthode n'est pas plus sensible que les méthodes interférométriques standard mais elle permet une vue d'ensemble du mouvement de la pièce.

Une autre application importante de l'holographie est la réalisation de composants optiques. Imaginons, par exemple, qu'on prenne l'hologramme d'un point source. Eclairé par l'onde de référence, une onde plane, il fournit une image virtuelle du point source. L'onde plane incidente se transforme en une onde sphérique divergente. L'hologramme se comporte donc comme une lentille divergente. Si, au contraire, on réalise un hologramme avant du point source, l'onde plane incidente devient une onde sphérique convergente et l'hologramme est une lentille convergente.

Réaliser ainsi une simple lentille ne présente guère d'intérêt dans le domaine optique. L'intensité de l'onde reconstituée est en effet notablement inférieure à l'intensité de l'onde transmise. L'intérêt est plus important quand on entre dans le domaine des rayons X. Tous les matériaux dans ce domaine ont en effet un indice de réfraction extrêmement voisin de un et il est impossible de réaliser des composants d'optique réfractive. On peut réaliser des miroirs avec des matériaux cristallins mais ils ne fonctionnent qu'en incidence rasante et sont extrêmement coûteux. En revanche, on peut aisément fabriquer, par des techniques de microlithographie, des structures absorbantes avec des détails extrêmement fins. On peut donc synthétiser l'hologramme qui se comportera comme une lentille. Un domaine nouveau de microscopie X a pu apparaître ainsi avec les optiques holographiques et les sources intenses de rayonnement synchrotron. En utilisant l'analogie formelle entre équations de Maxwell et équation de Schrödinger, on peut aussi préparer des hologrammes pour des ondes de matière. Il est ainsi possible de focaliser des ondes de matière ou de réaliser des images avec des atomes refroidis par laser. Avec des températures ordinaires, les longueurs d'onde de de Broglie des atomes sont si petites (de l'ordre du picomètre) qu'on ne peut réaliser les structures correspondantes. Avec des atomes refroidis, en revanche, la longueur d'onde de de Broglie est de l'ordre d'une longueur d'onde optique. On peut alors aisément réaliser des structures holographiques. Les très belles expériences de Shimizu (Tokyo) ont démontré la faisabilité de cette technique qui pourrait être employée dans le domaine de

---

<sup>2</sup>La longueur de cohérence, dans ce cas très simple, est au plus égale au produit de la vitesse de la lumière par la durée de l'impulsion. Il s'agit de la différence de marche maximale qui donne lieu à des interférences visibles dans un interféromètre de Michelson



**Figure 3.4:** Principe d'une expérience de conjugaison de phase optique, qui se ramène à une holographie en temps réel.

la microlithographie pour des dépôts très bien contrôlés.

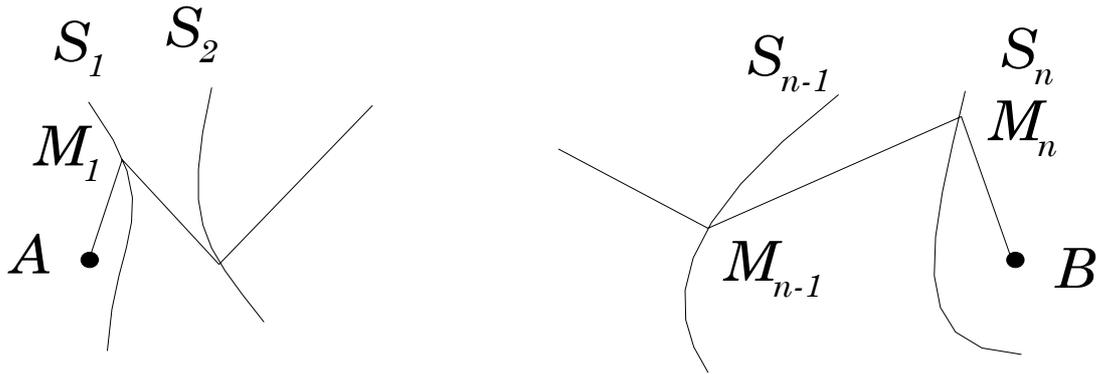
Les composants holographiques sont utiles également pour réaliser des fonctions optiques non classiques. Le balayage du faisceau laser sur le tambour photosensible des imprimantes laser ou du faisceau des lecteurs de codes barres, par exemple, est réalisé par un miroir holographique mis en rotation. Le coût de production de masse de ces objets est infiniment inférieur à celui des miroirs prismatiques initialement utilisés.

### 3.3.3 Holographie et conjugaison de phase

Telle que nous l'avons décrite jusqu'ici, l'holographie procède en deux temps: enregistrement de la figure d'interférences et restitution ultérieure. Il est possible de réaliser les deux étapes simultanément si on peut disposer d'un matériau dont l'indice ou l'absorption dépende de l'intensité en chaque point. C'est effectivement le cas avec les matériaux optiques non linéaires. Considérons le dispositif représenté sur la figure 3.4. Un cristal spécial (on utilise souvent du Niobiate de Lithium ou une de ses variantes) est éclairé par deux ondes planes intenses contra-propageantes,  $\Psi$  et  $\Psi^*$ . On envoie, dans une autre direction, une onde  $\phi$  qui joue le rôle de l'onde diffusée en holographie. Les ondes  $\Psi$  et  $\Psi^*$  vont bien sûr jouer le rôle des ondes de référence et de reconstruction. Le matériau non linéaire acquiert, en plus de la polarisation linéaire qui décrit simplement l'indice, une densité de polarisation  $P$  proportionnelle au produit de trois termes qui sont les champs incidents ou leurs complexes conjugués. Pour décrire vectoriellement ce processus, il faudrait bien sûr une polarisabilité tensorielle de rang 4. Pour une discussion qualitative, nous nous contenterons de voir que cette non-linéarité confère au milieu un indice de réfraction  $n$  qui, en plus d'un terme constant correspondant à la réponse linéaire (voir partie 5), présente un terme non linéaire proportionnel à l'intensité. Parmi tous les termes apparaissant dans le développement de cette non-linéarité sur les amplitudes des différentes ondes, on aura ceux correspondant à  $|\phi + \Psi|^2$ . Sur le milieu, s'inscrit donc un réseau de modulation d'indice à trois dimensions, qui est précisément l'hologramme de l'onde  $\phi$  par l'onde de référence  $\Psi$ . La "lecture" simultanée de cet hologramme par l'onde  $\Psi^*$  va fournir une onde  $\phi^*$  qui est précisément la conjuguée complexe de l'onde  $\phi$ . Ce milieu réalise donc la conjugaison de phase de l'onde incidente, ce qui ne peut s'effectuer par aucun dispositif d'optique linéaire.

Nous avons ici vu de manière globale le principe de la génération. On peut aussi le comprendre en termes holographiques. Le mélange de  $\Psi$  et de  $\phi$  crée dans le milieu non linéaire une répartition d'intensité qui n'est autre que l'hologramme de l'onde  $\phi$  avec la référence  $\Psi$ . En raison de son caractère non linéaire, le milieu acquiert un indice de réfraction modulé spatialement par cet hologramme. L'onde  $\Psi^*$  est diffractée par cette répartition d'indice. En fait, elle vient simplement lire l'hologramme avant et recrée l'onde  $\phi^*$ .

Un tel miroir à conjugaison de phase présente des propriétés optiques extraordinaires. Imaginons qu'on place en face de lui un point source. Il crée une onde sphérique divergente. En se réfléchissant sur le miroir, elle devient une onde sphérique convergente qui revient se focaliser exactement sur le point



**Figure 3.5:** Passage à la limite géométrique. L'amplitude reçue du point source  $A$  au point  $B$  peut se mettre sous la forme d'une somme de termes associés à toutes les lignes brisées passant de  $A$  à  $B$  ou de tout chemin à la limite continue. Seuls les chemins proches de la trajectoire prévue par l'optique géométrique contribuent notablement.

source. Quand on sait que rien n'empêche un miroir à conjugaison de phase d'avoir un coefficient de réflexion supérieur à un (l'énergie nécessaire étant prise dans les ondes intenses  $\Psi$  et  $\Psi^*$ ), on comprendra l'intérêt potentiel de ce dispositif. On peut ainsi par exemple réaliser un laser constitué d'un miroir à conjugaison de phase et de n'importe quel objet vaguement réfléchissant passant à proximité. La conjugaison de phase assure le retour parfait de l'onde sur l'objet réfléchissant et les conditions de phase correctes pour créer une cavité.

On peut aussi utiliser la conjugaison de phase pour optimiser les communications. Dans un matériau hétérogène comme l'atmosphère, la propagation distord les fronts d'onde. Un point source donne donc un front d'onde loin de la forme sphérique idéale. Si on renvoie cette onde par un miroir à conjugaison de phase, on change le signe des défauts de phase. Le retour inverse dans le milieu (s'il n'a pas notablement varié pendant le temps d'un aller et retour) annule exactement ces défauts et l'onde de retour se focalise exactement sur le point source comme s'il n'y avait pas eu de défauts.

### 3.4 Limite de l'optique géométrique

La diffraction peut nous permettre de mieux comprendre comment se fait le passage de l'électromagnétisme de Maxwell à la notion de rayons lumineux. Ce point sera discuté très en détail dans l'appendice 4 à cette partie mais nous allons donner ici l'essentiel des arguments qualitatifs nécessaires. Nous venons de voir qu'une onde plane est très peu affectée, très peu diffractée, si elle ne passe qu'à travers des ouvertures ayant une taille notablement plus grande que  $\lambda$ . Il est donc possible de réaliser un pinceau lumineux rectiligne, dans un milieu homogène, dont l'extension soit grande devant  $\lambda$  et néanmoins très petite à l'échelle macroscopique qui est celle de la plupart des composants optiques. Nous venons de retrouver la notion de rayon lumineux. Comme les lois de changement de vecteur d'onde au passage entre deux matériaux diélectriques sont précisément les lois de Descartes (on consultera à ce sujet la fin de la cinquième partie), ces rayons lumineux obéissent précisément aux lois de l'optique géométrique.

Nous allons préciser un peu ces notions en montrant qualitativement, à partir de la formule de Kirchhoff, qu'on peut exprimer le champ reçu en un point comme une somme d'amplitudes associées à différents chemins possibles connectant ce point au point source. Nous montrerons alors que seuls les chemins situés dans un tube d'une extension transverse de quelques  $\lambda$  autour de la trajectoire prédite par l'optique géométrique contribuent effectivement à la somme. La situation que nous décrivons est représentée schématiquement sur la figure 3.5.

On cherche à calculer l'amplitude reçue en  $B$ , la source étant située en  $A$ . Nous supposons d'abord que le milieu entre  $A$  et  $B$  est homogène. Formellement, en utilisant la formule (2.24), on peut exprimer le champ (au sens d'une composante du potentiel) en  $B$  en fonction du champ sur une

surface  $S_n$  entourant complètement  $B$  et passant à très faible distance au niveau de la ligne droite qui joint  $A$  à  $B$ . Nous n'avons pas ici d'approximation liée au principe de Huyghens, puisqu'il n'y a pas de diaphragme. Pour une surface  $S_n$  suffisamment régulière, les approximations assimilant l'onde incidente à une onde plane (au moins localement) et la surface à un plan (localement là aussi) sont sans doute valables. On aura donc:

$$\phi_B \simeq \int_{S_n} \chi_n \frac{\phi_n(\mathbf{r}_n) \exp(ik|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_B|)}{|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_B|} dS_n, \quad (3.10)$$

où  $\mathbf{r}_n$  est la position courante sur  $S_n$ ,  $\phi_n$  l'amplitude en ce point et  $\chi_n$  le facteur d'inclinaison géométrique.

L'amplitude  $\phi_n$  peut elle aussi s'exprimer comme l'intégrale sur une surface  $S_{n-1}$ , proche de  $S_n$ . Et ainsi de suite, jusqu'à une surface  $S_1$  entourant immédiatement le point source  $A$ . On aura finalement  $\phi$  comme une intégrale sur toutes les surfaces simultanément, c'est à dire, aussi bien, une intégrale sur toutes les lignes brisées qui passent de  $A$  à  $B$  en s'appuyant sur les surfaces intermédiaires. Le terme à intégrer contient des termes d'amplitudes, lentement variables et de peu d'importance comme on le verra. Le terme important est le terme de phase qui s'écrit simplement:

$$\exp[ik(AM_1 + M_1M_2 + \dots + M_nB)] = e^{ikL}, \quad (3.11)$$

où les  $M_i$  sont les points de la ligne brisée sur les surfaces intermédiaires et  $L$  est la longueur totale de la ligne brisée.

Les phases associées à deux lignes brisées différentes sont complètement différentes dès que ces lignes s'écartent l'une de l'autre d'une petite fraction de  $\lambda$ . Les amplitudes étant comparables, les contributions à l'amplitude de toutes ces lignes sont négligeables. Toutes, sauf celles qui se trouvent au voisinage d'une trajectoire qui rend extrémale la longueur du trajet. Il s'agit en l'occurrence d'un minimum et de la simple ligne droite entre  $A$  et  $B$ . Toutes les trajectoires ne s'écartant que de quelques  $\lambda$  par rapport à cette ligne contribuent de façon équivalente à la somme. Toutes les trajectoires passant plus loin ont une influence négligeable. On peut donc insérer un diaphragme de taille grande devant  $\lambda$  au voisinage de cette ligne droite sans modifier la propagation: on retrouve bien, de façon moins qualitative, la notion de rayon lumineux.

Notons que le raisonnement que nous faisons ici dans le domaine optique peut s'appliquer, avec des modifications mineures, à la mécanique quantique. On trouve qu'une amplitude de transition est la somme d'amplitudes associées à tous les chemins possibles entre l'état initial et l'état final. Dans une limite semi-classique, les effets quantiques sont presque négligeables et seuls contribuent les chemins situés à quelques longueurs d'onde de de Broglie de la trajectoire classique.

Le raisonnement précédent peut être aisément modifié pour prendre en compte les inhomogénéités de l'indice de réfraction du milieu. Le vecteur d'onde local étant proportionnel à l'indice, on trouve que le facteur de phase peut s'écrire dans ce cas:

$$\exp[ik_0(n_1AM_1 + n_2M_1M_2 + \dots + n_nM_nB)] = e^{ik_0 \int n dl}, \quad (3.12)$$

où  $n_i$  est l'indice au voisinage du point  $M_i$ . On trouve donc que ne contribuent notablement que les trajectoires situées au voisinage immédiat de celles qui extrémalisent l'intégrale  $\int n dl$ , c'est à dire le temps de parcours. En un mot, nous retrouvons le principe de Fermat qui est à la base de l'optique géométrique. Encore une fois, ces raisonnements ne sont que qualitatifs. Nous les rendrons beaucoup plus précis dans l'appendice 4.



# Appendice 1

## Jauges

Nous reviendrons très brièvement dans cet appendice sur les problèmes de choix de jauge. Nous savons bien que les équations de Maxwell et donc toutes les prédictions physiques sont invariantes dans une modification des potentiels s'écrivant:

$$\mathcal{A}'^\mu = \mathcal{A}^\mu + \partial^\mu \phi \quad (1.1)$$

en notations quadridimensionnelles ou

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \phi \quad (1.2)$$

$$V' = V - \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1.3)$$

en notations standard,  $\phi$  étant, dans ces expressions, une fonction arbitraire de l'espace et du temps. On peut utiliser cette liberté de jauge pour tenter de simplifier la forme des équations décrivant les potentiels.

Le choix le plus répandu, celui que nous avons déjà largement utilisé, est celui de la jauge de Lorentz qui s'écrit:

$$\partial_\mu \mathcal{A}^\mu = 0 \quad (1.4)$$

ou encore

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 . \quad (1.5)$$

Cette jauge a plusieurs mérites. D'abord, elle est réalisable. Partant de potentiels  $\mathcal{A}'^\mu$  vérifiant une condition de jauge arbitraire, on peut leur rajouter la 4-divergence d'une fonction  $\phi$  pour qu'ils vérifient la jauge de Lorentz. Il suffit pour cela de résoudre:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = \partial_\mu \mathcal{A}'^\mu , \quad (1.6)$$

ce qui est possible avec des conditions aux limites ordinaires (tous les potentiels nuls à l'infini dans l'espace temps). Ensuite, la jauge de Lorentz est explicitement covariante : elle s'écrit comme la nullité d'un 4-scalaire. Enfin, et ce n'est pas son moindre mérite, elle conduit à des équations aux potentiels extrêmement simples, puisqu'elles découplent le potentiel vecteur dont la seule source est le courant et le potentiel scalaire dont la seule source est la densité de charges. Nous avons vu dans le premier chapitre que ces équations admettaient la solution explicite en termes de potentiels retardés.

Si la jauge de Lorentz présente des avantages importants, il en est une autre qui est largement utilisée, en particulier dans le domaine de la physique atomique. C'est la jauge de la magnétostatique, ou jauge de Coulomb. Elle s'écrit

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 . \quad (1.7)$$

Manifestement, elle n'est pas covariante. Si elle est satisfaite dans un référentiel, elle ne le sera plus après une transformation de Lorentz. Cette jauge n'a donc de sens que dans un référentiel donné,

dans lequel nous nous placerons désormais. Nous devons maintenant vérifier que cette jauge peut être satisfaite. Supposons qu'on ait des potentiels  $\mathbf{A}'$  et  $V'$  qui ne satisfont pas à la jauge de Coulomb. Les potentiels issus d'une transformation de jauge y satisferont à condition que  $\Delta\phi = -\nabla \cdot \mathbf{A}'$ . Cette équation est l'équation de Poisson de l'électrostatique qui admet une solution unique avec des conditions aux limites convenables. On peut donc toujours choisir de travailler en jauge de Coulomb.

Ecrivons maintenant les équations aux potentiels dans cette jauge. En raison de la jauge,  $\nabla \cdot \mathbf{E} = -\Delta V$  et l'équation de  $V$  s'écrit simplement:

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} . \quad (1.8)$$

C'est tout simplement l'équation de l'électrostatique. En jauge de Coulomb, le potentiel scalaire se calcule comme en électrostatique. C'est donc un potentiel instantané, en ce sens que le potentiel en  $\mathbf{r}, t$  dépend des sources en  $\mathbf{r}_1$  au même instant:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}_1, t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} d^3\mathbf{r}_1 . \quad (1.9)$$

Bien sûr, l'électromagnétisme ne violera pas pour autant la causalité relativiste. Les champs électriques, eux, ne dépendront que des sources aux instants retardés. Clairement, tout l'intérêt de la jauge de Coulomb réside dans cette simplicité du potentiel scalaire. En physique atomique, par exemple, on traite le couplage d'un atome, en liaison coulombienne, avec un champ oscillant. Tout naturellement, la jauge de Coulomb séparera dans la dynamique du système le champ statique liant l'électron, représenté par le simple potentiel scalaire, du champ oscillant incident.

L'équation au potentiel vecteur est en revanche plus complexe. En écrivant que  $\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j} + (1/c^2) \partial \mathbf{E} / \partial t$  et en substituant l'équation donnant le champ électrique en fonction des potentiels:

$$\square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \nabla V}{\partial t} . \quad (1.10)$$

Cette équation est beaucoup plus complexe que l'équation au d'Alembertien obtenue en jauge de Lorentz. Elle couple effectivement le potentiel vecteur au gradient du potentiel scalaire. En un mot, la résolution d'un problème d'électromagnétisme en jauge de Coulomb revient à d'abord trouver le potentiel scalaire électrostatique, pour ensuite l'utiliser comme terme source dans le potentiel vecteur. Nous verrons dans le prochain appendice comment on peut aborder le problème en séparant variables longitudinales et transverses du champ.

## Appendice 2

# Espace réciproque

Nous utiliserons dans cet appendice la transformation de Fourier sur les variables d'espace (nous garderons le temps à part pour conserver sous forme directe les propriétés dynamiques) pour transposer les équations de Maxwell dans l'espace réciproque. Après avoir défini les transformations mises en jeu, nous définirons dans le premier paragraphe les champs transverses et longitudinaux. Nous montrerons, dans le second paragraphe, que la jauge de Coulomb introduite dans l'appendice précédent permet de séparer très naturellement la dynamique des champs longitudinaux, purement électrostatiques, de celle des champs transverses. Nous nous pencherons alors sur la dynamique des champs transverses dans l'espace libre et nous explorerons l'analogie formelle entre l'électromagnétisme et la dynamique de l'oscillateur harmonique en introduisant les variables normales du champ. Nous montrerons enfin, dans un dernier paragraphe, le lien entre cette approche et la décomposition en ondes planes introduite dans les classes élémentaires.

Au delà d'une simple curiosité, cet appendice est en fait une introduction directe à la quantification du champ. C'est en effet en termes de variables normales ou de collection d'oscillateurs harmoniques qu'on quantifie le champ. Nous n'aborderons pas du tout ici cette quantification dont nous ne ferons que planter les jalons classiques. Un exposé très clair en est donné dans "Introduction à l'électrodynamique quantique" de Cohen, Dupont-Roc et Grynberg.

### 2.1 Espace réciproque

Nous allons simplement écrire dans ce paragraphe les équations de l'électromagnétisme (équations de Maxwell et équations aux potentiels) en termes de transformées de Fourier spatiales (l'approche est donc un peu différente de ce que nous avons fait pour établir l'expression de la fonction de Green). Les opérateurs de l'analyse vectorielle devenant de simples vecteurs, l'écriture de ces équations sera bien sûr beaucoup plus simple que dans l'espace réel.

#### 2.1.1 Transformation de Fourier

Nous transformerons les quantités scalaires et vectorielles. Le champ électrique s'écrira par exemple:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} . \quad (2.1)$$

La transformation inverse s'écrit:

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{r} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} . \quad (2.2)$$

Le champ électrique étant réel, il vérifie:

$$\mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) . \quad (2.3)$$

On a donc:

$$\int \mathcal{E}^*(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} = \int \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} = \int \mathcal{E}(-\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} . \quad (2.4)$$

Si cette propriété est vraie pour tout  $\mathbf{r}$ , alors:

$$\mathcal{E}(-\mathbf{k}, t) = \mathcal{E}^*(\mathbf{k}, t) . \quad (2.5)$$

Nous ferons la même opération sur le champ magnétique (transformée de Fourier  $\mathcal{B}$ ), les potentiels  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{V}$  et les sources ( $\tilde{\rho}$  et  $\tilde{\mathbf{j}}$ ). En termes de ces variables, les équations de Maxwell s'écrivent simplement:

$$i\mathbf{k} \times \mathcal{E} = -\dot{\mathcal{B}} \quad (2.6)$$

$$i\mathbf{k} \times \mathcal{B} = \mu_0 \tilde{\mathbf{j}} + \dot{\mathcal{E}}/c^2 \quad (2.7)$$

$$i\mathbf{k} \cdot \mathcal{E} = \tilde{\rho}/\epsilon_0 \quad (2.8)$$

$$i\mathbf{k} \cdot \mathcal{B} = 0 \quad (2.9)$$

(nous avons indiqué par un point les dérivations temporelles dans l'espace réciproque pour alléger les notations). L'équation de conservation de la charge devient:

$$i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{j}} + \dot{\tilde{\rho}} = 0 , \quad (2.10)$$

les liens entre champs et potentiels s'écrivent:

$$\mathcal{B} = i\mathbf{k} \times \mathcal{A} \quad (2.11)$$

$$\mathcal{E} = -i\mathbf{k}\mathcal{V} - \dot{\mathcal{A}} . \quad (2.12)$$

Enfin les jauges de Coulomb et de Lorentz s'écrivent respectivement:

$$i\mathbf{k} \cdot \mathcal{A} = 0 \quad (2.13)$$

et

$$i\mathbf{k} \cdot \mathcal{A} + \dot{\mathcal{V}}/c^2 = 0 . \quad (2.14)$$

Le lecteur pourra à titre d'exercice transposer ainsi d'autres équations importantes de l'électromagnétisme.

### 2.1.2 Champs longitudinaux et transverses

Les équations de Maxwell dans l'espace réciproque font intervenir des produits scalaires et vectoriels avec le vecteur d'onde. Il est donc logique et probablement fructueux de décomposer les champs et potentiels vectoriels en leurs composantes longitudinales, parallèles à  $\mathbf{k}$ , et transverses, perpendiculaires à  $\mathbf{k}$ . Introduisant le vecteur unitaire  $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{k}/k$ , nous définirons par exemple la partie longitudinale du champ électrique dans l'espace réciproque par:

$$\mathcal{E}_{\parallel} = (\boldsymbol{\kappa} \cdot \mathcal{E}) \boldsymbol{\kappa} \quad (2.15)$$

et la partie transverse par:

$$\mathcal{E}_{\perp} = \boldsymbol{\kappa} \times (\mathcal{E} \times \boldsymbol{\kappa}) . \quad (2.16)$$

Le champ électrique total dans l'espace réciproque est bien sûr la somme de ses composantes longitudinales et transverses:

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}, t) = \mathcal{E}_{\parallel} + \mathcal{E}_{\perp} . \quad (2.17)$$

La même décomposition peut s'effectuer pour le champ magnétique et le potentiel vecteur.

La linéarité de la transformation de Fourier nous permet alors d'écrire les champs dans l'espace réel comme une somme de deux composantes, transformées de Fourier inverses des champs transverses et longitudinaux dans l'espace réciproque. On aura ainsi:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{r}, t) , \quad (2.18)$$

où  $\mathbf{E}_{\parallel}$  est la transformée de  $\mathcal{E}_{\parallel}$  et  $\mathbf{E}_{\perp}$  celle de  $\mathcal{E}_{\perp}$ . Il est évident que les désignations "longitudinal" ou "transverse" ne correspondent à aucune propriété géométrique particulière dans l'espace réel. Seuls les champs dans l'espace réciproque ont une interprétation géométriquement simple. Notons aussi qu'on peut exprimer directement les composantes transverses (et donc, par différence, longitudinales) du champ dans l'espace réel à partir du champ total. La transformation fait intervenir un noyau intégral qu'on trouvera détaillé dans *Introduction à l'électrodynamique quantique* de Cohen. On y constatera que l'expression d'une des composantes du champ transverse fait apparaître toutes les composantes du champ complet.

Les conditions de Jauge s'expriment facilement en fonction des composantes transverses et longitudinales. La jauge de Coulomb, en particulier, devient très simple, puisqu'elle exprime simplement que le potentiel vecteur  $\mathcal{A}$  est purement transverse. On a donc:

$$\mathcal{A}_{\parallel} = 0 . \quad (2.19)$$

Cette jauge, en dépit de son manque d'invariance relativiste, rend beaucoup plus simple la géométrie des champs dans l'espace réciproque.

*Nous nous placerons donc, jusqu'à la fin de cet appendice, en jauge de Coulomb.*

Comme  $\mathcal{A}$  est transverse,  $\mathbf{k} \times \mathcal{A} = \mathcal{B}$  l'est aussi, ainsi que  $\partial\mathcal{A}/\partial t$ . En revanche, le gradient du potentiel scalaire est longitudinal. On a donc directement:

$$\mathcal{E}_{\perp} = -\dot{\mathcal{A}} \quad (2.20)$$

$$\mathcal{E}_{\parallel} = -ik\mathcal{V} . \quad (2.21)$$

En jauge de Coulomb, le potentiel scalaire se calcule comme en électrostatique. Le champ électrique longitudinal dans l'espace réel  $\mathbf{E}_{\parallel}$  est donc simplement le champ électrique calculé comme en électrostatique! On voit ici, de manière plus détaillée que dans l'appendice précédent, tout l'intérêt de la jauge de Coulomb pour traiter un problème de physique atomique. Considérons un atome d'hydrogène soumis à une onde plane et essayons d'écrire les équations du mouvement de l'électron. L'onde incidente n'a pas de potentiel scalaire. Le champ électrique longitudinal est donc entièrement dû au proton. Il se calcule comme en électrostatique et donne un potentiel de liaison Coulombien en  $1/r$ . L'onde plane, pour sa part, contribue uniquement à la partie transverse des champs. De manière toute naturelle, la jauge de Coulomb sépare la contribution, en général dominante, de l'interaction électrostatique avec le noyau de la contribution du champ incident. Cette dernière peut souvent être considérée comme une perturbation simple par rapport au champ de liaison (ce n'est que dans le domaine des impulsions laser très brèves et très intenses qu'on peut sortir de ce régime et atteindre même des situations où le champ de liaison devient une petite perturbation par rapport au champ laser incident).

## 2.2 Variables normales

Nous allons dans ce paragraphe souligner l'analogie très forte entre la dynamique des champs électromagnétiques et celle d'une collection d'oscillateurs harmoniques. On avait déjà pu prendre conscience de cette analogie en écrivant la densité de lagrangien du champ électromagnétique, en  $E^2 - B^2$ , et en remarquant l'analogie formelle avec le lagrangien d'un oscillateur unidimensionnel, en  $v^2 - x^2$ . Pour ne pas trop alourdir le débat, nous ne discuterons de cette analogie que dans l'espace libre de charges et de courants.

### 2.2.1 Electromagnétisme dans l'espace libre

Si  $\tilde{\rho}$  et  $\tilde{\mathbf{j}}$  sont nuls, les équations de Maxwell dans l'espace réciproque se simplifient beaucoup. On a

$$\dot{\mathcal{E}} = ic^2 \mathbf{k} \times \mathcal{B} \quad (2.22)$$

et

$$\dot{\mathcal{B}} = -i\mathbf{k} \times \mathcal{E} \quad (2.23)$$

Les champs électriques et magnétiques sont strictement transverses. On en déduit à nouveau que le potentiel scalaire  $\mathcal{V}$  est nul.

Nous introduirons, pour décrire le champ, deux nouvelles variables que nous nommerons *variables normales du champ*:

$$\alpha(\mathbf{k}, t) = -\frac{i}{2\mathcal{N}}(\mathcal{E} - c\boldsymbol{\kappa} \times \mathcal{B}) \quad (2.24)$$

$$\beta(\mathbf{k}, t) = -\frac{i}{2\mathcal{N}}(\mathcal{E} + c\boldsymbol{\kappa} \times \mathcal{B}) . \quad (2.25)$$

Ce changement de variables est bien sûr inversible et  $\alpha$  et  $\beta$  suffisent à déterminer complètement les champs. Dans les expressions précédentes,  $\mathcal{N}$  est un facteur de normalisation, pouvant dépendre de  $\mathbf{k}$  mais pas de  $t$ , que nous ne précisons pas davantage<sup>1</sup>. Notons également que, par construction, ces variables sont uniquement transverses. La condition de réalité des champs  $\mathcal{E}^*(\mathbf{k}, t) = \mathcal{E}(-\mathbf{k}, t)$  se reflète sur  $\alpha$  et  $\beta$ . On vérifiera immédiatement, par simple substitution, que:

$$\beta^*(\mathbf{k}, t) = -\alpha(-\mathbf{k}, t) \quad (2.26)$$

$$\alpha^*(\mathbf{k}, t) = -\beta(-\mathbf{k}, t) . \quad (2.27)$$

Ces expressions prouvent que les variables  $\beta$  sont déterminées de façon univoque dès que l'on connaît les  $\alpha$ , qui sont donc les seuls paramètres dynamiques libres ou encore les seuls degrés de liberté du problème. Nous allons donc en écrire les équations dynamiques.

### 2.2.2 Dynamique des variables normales

On écrit  $\dot{\alpha}$  par simple dérivation et on remplace les dérivées temporelles des champs électriques et magnétiques par les équations de Maxwell correspondantes. On a donc:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\frac{i}{2\mathcal{N}}(\dot{\mathcal{E}} - c\boldsymbol{\kappa} \times \dot{\mathcal{B}}) \\ &= \frac{ck}{2\mathcal{N}}[c\boldsymbol{\kappa} \times \mathcal{B} + \boldsymbol{\kappa} \times (\boldsymbol{\kappa} \times \mathcal{E})] . \end{aligned} \quad (2.28)$$

Le dernier terme dans le crochet de la seconde ligne est simplement égal à  $-\mathcal{E}$  puisque le champ est, dans le vide, purement transverse. On a donc finalement:

$$\dot{\alpha} = -ick\alpha = -i\omega\alpha , \quad (2.29)$$

en posant, une fois de plus,  $\omega = ck$ .

Pour comparer cette équation à celle de la dynamique d'un oscillateur, nous considérerons un mouvement unidimensionnel avec la coordonnée  $x$  et l'impulsion conjuguée  $p$ . Le hamiltonien s'écrit  $H = p^2/2m + m\omega x^2/2$ . En posant

$$\alpha = x + ip/m\omega , \quad (2.30)$$

---

<sup>1</sup>Sa valeur ne doit être précisée que quand on procède à la quantification du champ électromagnétique. On choisit alors le facteur  $\mathcal{N}$ , en fonction du volume dans lequel on quantifie le champ, pour que l'énergie d'un photon unique soit précisément égale à  $h\nu$ .

(on notera la similarité avec les variables normales du champ), on trouve:

$$\dot{\alpha} = -i\omega\alpha, \quad (2.31)$$

précisément l'équation décrivant l'évolution de la variable normale du champ.

Chaque vecteur d'onde est donc associé à une variable normale (à deux dimensions puisque transverse) qui a la même dynamique qu'un oscillateur harmonique. Notons que l'on peut se ramener à un problème à une dimension. Pour chaque  $\mathbf{k}$ , on peut définir deux vecteurs de base orthogonaux à  $\mathbf{k}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}'$ . En écrivant que  $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\varepsilon} + \alpha_{\boldsymbol{\varepsilon}'}\boldsymbol{\varepsilon}'$ , on montre que les deux variables normales scalaires  $\alpha_{\boldsymbol{\varepsilon}}$  et  $\alpha_{\boldsymbol{\varepsilon}'}$  ont la dynamique d'un oscillateur harmonique unidimensionnel. Si on appelle *mode du champ* une valeur de  $\mathbf{k}$  et une polarisation, chaque mode du champ électromagnétique est un oscillateur harmonique.

Nous avons franchi là une étape essentielle vers la quantification du champ. On apprend, dans les premiers cours de mécanique quantique, à quantifier l'oscillateur harmonique. Ses niveaux d'énergie sont non dégénérés, égaux à  $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ , où  $n$  est un nombre entier positif ou nul qui décrit le nombre d'excitations élémentaires ou quanta ou phonons. L'énergie d'un mode quantifié du champ prend donc le même ensemble de valeurs. Le nombre  $n$  décrit alors le nombre de quanta d'énergie électromagnétique, le nombre de photons en un mot. Comme toujours en mécanique quantique, les variables classiques sont remplacées par des opérateurs. Les variables  $\alpha_{\boldsymbol{\varepsilon}}$  sont remplacées par les opérateurs d'annihilation de photons qui transforment l'état  $|n\rangle$  à  $n$  photons en l'état  $\sqrt{n}|n-1\rangle$  à  $n-1$  photons (l'opérateur adjoint  $a^\dagger$  étant évidemment l'opérateur de création de photons).

Tant que la quantification se limite à un seul mode (à une seule valeur de  $\mathbf{k}$  et de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ), il n'y a aucune difficulté. La plupart des expériences modernes d'optique quantique peuvent se décrire assez précisément en termes de photons et des opérateurs  $a$  et  $a^\dagger$ . En effet, dans la plupart de ces expériences, on ne s'intéresse qu'à quelques modes, définis par des faisceaux laser ou par des cavités résonnantes. La situation se complique un peu quand on veut considérer l'espace libre. Il faut alors sommer tous les modes. L'énergie du fondamental (aucun photon dans aucun mode) ou du vide de rayonnement devient alors infinie. Il s'agit en effet de sommer les énergies de point 0,  $1/2\hbar\omega$ , d'une infinité de modes. Un zéro d'énergie infini ne serait pas trop grave mais il y a des problèmes plus sérieux. L'effet de ce continuum de modes vides sur un atome, par exemple, est divergent: les niveaux d'énergie sont infiniment modifiés par ce couplage. Il faut donc se débarrasser soigneusement de ces infinis, de ces divergences dues à des sommations sur tous les modes. Les techniques modernes de théorie des champs, de renormalisation, le permettent. En un mot (plus que qualitatif) on peut comprendre qu'une particule chargée isolée du champ n'existe pas. Un électron, par exemple, est "habillé" par les fluctuations de vide. Cet habillage produit une modification infinie des paramètres (masse, charge) de la particule "nue". Mais ce que nous mesurons dans une expérience, la masse ou la charge physique, sont des quantités finies qui tiennent compte de cet habillage. En introduisant dans la théorie des paramètres qui ne sont pas ceux d'une charge isolée mais d'une charge en interaction avec le vide de rayonnement, on peut se débarrasser de ces infinis et obtenir même des prédictions quantitatives d'une précision remarquable.

### 2.2.3 Décomposition en ondes planes

Ayant explicitement la dynamique des variables normales, nous pouvons, toujours dans l'espace libre, écrire la dynamique du champ dans l'espace réel. On a:

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{k}, 0)e^{-i\omega t}\boldsymbol{\varepsilon} + \alpha_{\boldsymbol{\varepsilon}'}(\mathbf{k}, 0)e^{-i\omega t}\boldsymbol{\varepsilon}'. \quad (2.32)$$

<sup>2</sup>Nous prenons ici une base de polarisations linéaires, ce qui est le plus commode à écrire. On pourrait aussi décomposer les variables normales sur une base de polarisations circulaires en prenant une base constituée de superpositions linéaires à coefficient complexes de nos vecteurs.

En portant cette expression dans celle du champ transverse:

$$\mathcal{E} = i\mathcal{N}[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}, t) - \boldsymbol{\alpha}^*(-\mathbf{k}, t)] \quad (2.33)$$

(nous avons utilisé le lien entre  $\boldsymbol{\beta}$  et  $\boldsymbol{\alpha}$ ) et en faisant la transformée de Fourier inverse, on trouve finalement:

$$\mathbf{E} = 2\text{Re} \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} \mathcal{N}(\mathbf{k}) \sum_{\boldsymbol{\varepsilon}} \alpha_{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\varepsilon} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (2.34)$$

où la somme sous l'intégrale porte sur deux polarisations transverses arbitraires pour chaque valeur de  $\mathbf{k}$ . Cette expression est sans surprise. On retrouve, par des voies un peu détournées, le fait que le champ dans l'espace libre peut se décomposer comme une somme d'ondes planes, transverses, de polarisations linéaires.

## Appendice 3

# Faisceaux gaussiens

Nous chercherons à donner, dans cet appendice, un modèle raisonnable de faisceau laser. Très clairement, l'onde plane ne convient pas pour décrire ces faisceaux. Ils sont bien localisés transversalement. Leur divergence, assez faible, est de l'ordre de la limite imposée par les lois de la diffraction et leur extension transverse. Quand on s'éloigne de l'axe, l'intensité est d'abord stationnaire, puis décroît lentement. Enfin, quand on focalise un tel faisceau au moyen d'une lentille, il existe une taille minimale à la tache focale. Nous allons essayer, à partir de la théorie de la diffraction, de construire un modèle raisonnable pour un tel faisceau dans le premier paragraphe. Nous adopterons une démarche pragmatique mais on pourrait la rendre plus rigoureuse et plus convaincante en montrant qu'on construit ainsi, au moins dans le cadre d'une approximation paraxiale, une solution explicite des équations de Maxwell dans l'espace libre.

Le deuxième paragraphe sera consacré à une revue des propriétés essentielles des modes gaussiens. Nous nous pencherons aussi brièvement sur les modes d'ordre supérieur. Nous discuterons ensuite, dans le paragraphe suivant, des liens entre faisceaux gaussiens et cavités laser. Nous montrerons en particulier qu'une superposition stationnaire de deux faisceaux gaussiens respecte naturellement les conditions aux limites imposées par deux miroirs sphériques dans une configuration Fabry Perot. Nous aurons alors compris pourquoi les lasers produisent effectivement le plus souvent des modes gaussiens. Enfin, nous conclurons ce chapitre par un bref survol de l'optique des modes gaussiens, en nous penchant en particulier sur les transformations de modes au passage par une lentille.

### 3.1 Construction d'un mode gaussien

Les modes laser sont relativement invariants par translation. Ils divergent légèrement mais la forme de la répartition d'amplitude dans un plan perpendiculaire à l'axe change peu. Or les modifications de cette forme peuvent être décrits par la théorie de la diffraction. L'amplitude en un plan lointain peut se calculer, en première approximation, comme la transformée de Fourier de l'amplitude en un plan proche de l'origine. La seule fonction dont la forme reste invariante par transformation de Fourier est la gaussienne. Il est donc naturel d'essayer de construire un faisceau dont la répartition d'amplitude dans un plan transverse soit gaussienne.

Nous considérerons donc un faisceau d'axe optique  $Oz$ . Un plan transverse passant par l'origine sera repéré par les axes  $Ox_1$  et  $Oy_1$ . Nous noterons  $\phi$  l'amplitude du champ ou plutôt d'une des composantes du potentiel. Nous supposons donc que, dans le plan passant par  $O$ , la répartition d'amplitude est de la forme:

$$\phi(x_1, y_1) = \phi_0 e^{-(x_1^2 + y_1^2)/w_0^2} . \quad (3.1)$$

Dans tous les calculs, nous omettrons toujours les facteurs  $\exp -i\omega t$ . Il est évident, surtout pour des faisceaux laser, que nous ne considérerons que des champs monochromatiques. La dépendance temporelle est alors simplement en facteur de toutes nos expressions et peut être simplement omise.  $\phi_0$

est une amplitude que nous pouvons supposer réelle sans restreindre la généralité. Nous appellerons, pour des raisons qui seront évidentes dans le prochain paragraphe,  $w_0$  le “waist” du faisceau. Nous supposerons le waist notablement plus grand que  $\lambda$ , longueur d’onde du faisceau. Si ce n’était pas le cas, aucun calcul analytique ne serait possible à partir de la théorie de la diffraction.

Nous chercherons, à partir de là, à calculer la répartition d’amplitude dans un plan  $Mxy$ , perpendiculaire à  $Oz$ ,  $M$  étant situé à la cote  $z$ . Nous ne nous cantonnerons pas pour ce calcul au régime de Fraunhofer. Nous laisserons, à titre d’exercice, le lecteur le traiter. Il est évident que l’on trouvera une répartition gaussienne de l’intensité, avec une largeur variant linéairement avec la distance  $z$ . Cette approximation ne permet pas de définir correctement le faisceau pour des distances  $z$  de l’ordre de  $w_0$ . Nous allons voir que le principe de Huygens, dans ce cas très simple, permet de s’affranchir de l’approximation de Fraunhofer et d’effectuer un calcul plus précis, valable dans cette région. Bien sûr, nous retrouverons les résultats de Fraunhofer pour des distances suffisamment grandes.

Nous avons en effet:

$$\phi(x, y) = \frac{1}{i\lambda} \int dx_1 dy_1 \chi \frac{\phi(x_1, y_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}, \quad (3.2)$$

avec les notations standard du chapitre 2. Les vecteurs  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}$  sont ici de coordonnées respectives  $(x_1, y_1, 0)$  et  $(x, y, z)$ . Nous allons maintenant approcher l’intégrande en supposant que l’observation n’est pas à trop courte distance. Comme pour la diffraction de Fraunhofer, nous allons traiter très cavalièrement les termes d’amplitude en confondant  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$  avec  $|z|$  (approximation qui tiendra si la distance d’observation n’est pas trop petite par rapport au waist). Le faisceau est évidemment symétrique par rapport au plan  $z = 0$ . Nous supposerons donc dans la suite  $z > 0$  et reconstruirons ensuite l’autre partie du faisceau par symétrie. Nous traiterons aussi cavalièrement le facteur  $\chi$  que nous supposerons égal à 1, ce qui est sans doute assez bien vérifié dans le cadre d’une approximation paraxiale. En revanche, nous développerons la phase à un ordre plus élevé que pour le calcul de Fraunhofer:

$$ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \simeq ik \left( z + \frac{(x - x_1)^2}{2z} + \frac{(y - y_1)^2}{2z} \right). \quad (3.3)$$

En tenant compte de la répartition supposée dans le plan  $Ox_1y_1$ , on a:

$$\phi(x, y) = \frac{\phi_0 e^{ikz}}{i\lambda z} \int dx_1 dy_1 \exp\left(-\frac{x_1^2 + y_1^2}{w_0^2}\right) \exp ik \left[ \frac{(x - x_1)^2}{2z} + \frac{(y - y_1)^2}{2z} \right]. \quad (3.4)$$

Cette intégrale est explicitement calculable, puisqu’elle ne fait intervenir que des facteurs gaussiens. Pour faire le calcul, nous allons réarranger les termes en  $x$  pour faire apparaître un carré. On se convaincra sans problèmes que:

$$\begin{aligned} -\frac{x_1^2}{w_0^2} + ik \frac{(x - x_1)^2}{2z} &= \frac{ik}{2z} \left( 1 + \frac{2iz}{kw_0^2} \right) \left[ x_1^2 - \frac{2xx_1}{1 + 2iz/kw_0^2} + \frac{x^2}{1 + 2iz/kw_0^2} \right] \\ &= \frac{ik}{2z} \left( 1 + \frac{2iz}{kw_0^2} \right) \left[ x_1 - \frac{x}{1 + 2iz/kw_0^2} \right]^2 - \frac{ik}{2z} \frac{x^2}{1 + 2iz/kw_0^2} + \frac{ik}{2z} x^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Les termes en  $x^2$  sont des constantes pour l’intégration qui nous occupe et peuvent donc être mis de côté. En les regroupant et en se livrant à des opérations identiques sur les  $y$ , on peut écrire:

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \frac{\phi_0 e^{ikz}}{i\lambda z} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2(1 + 2iz/kw_0^2)}\right) \int dx_1 dy_1 \\ &\quad \exp\left[\frac{ik}{2z}(1 + 2iz/kw_0^2) \left(x_1 - \frac{x}{1 + 2iz/kw_0^2}\right)^2\right] \\ &\quad \exp\left[\frac{ik}{2z}(1 + 2iz/kw_0^2) \left(y_1 - \frac{y}{1 + 2iz/kw_0^2}\right)^2\right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

En posant  $u = x_1 - x/(1 + 2iz/kw_0^2)$ , l'intégrale sur  $x_1$  se ramène à:

$$\int_D du \exp \left[ \left( \frac{ik}{2z} - \frac{1}{w_0^2} \right) u^2 \right], \quad (3.7)$$

le contour d'intégration dans le plan complexe étant la droite  $D$  des points de valeur imaginaire égale à  $\text{Im} (x/(1 + 2iz/kw_0^2))$ . Considérons le contour fermé  $\mathcal{C}$  constitué de  $D$ , de l'axe réel parcouru dans le sens négatif et de deux portions de cercle de l'infini. La fonction à intégrer n'admettant aucun pôle dans le plan complexe, l'intégrale sur de contour est nulle. La contribution des portions à l'infini étant nulle elle aussi, l'intégrale sur  $D$  est égale à l'intégrale de la même fonction sur l'axe réel. Or

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \exp(-\alpha u^2) = \sqrt{\pi/\alpha} \quad (3.8)$$

même si  $\alpha$  est complexe, à condition que les intégrales soient convergentes. Le produit des intégrales sur  $x_1$  et  $y_1$  est donc simplement égal à  $\pi/[1/w_0^2 - ik/2z]$  et on a:

$$\phi = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \frac{\pi}{1/w_0^2 - ik/2z} \exp \left( -\frac{x^2 + y^2}{w_0^2(1 + 2iz/kw_0^2)} \right), \quad (3.9)$$

ce qui achève notre calcul du point de vue formel. Avant d'aller plus loin, notons que, comme nous l'espérons, la répartition d'amplitude est essentiellement gaussienne.

Pour alléger les notations, nous poserons:

$$b = \frac{kw_0^2}{2} = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}. \quad (3.10)$$

Ce paramètre joue visiblement un rôle central dans nos équations. Nous l'appellerons, pour des raisons qui apparaîtront clairement dans l'avant dernier paragraphe de cet appendice, paramètre confocal. On peut alors définir deux longueurs utiles:

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{b^2}} \quad (3.11)$$

et

$$R(z) = \frac{b^2}{z} + z. \quad (3.12)$$

On définira aussi une phase par

$$\Psi = \arctan \left[ \frac{z}{b} \right]. \quad (3.13)$$

Avec ces définitions et un peu d'algèbre, on mettra le champ sous la forme

$$\phi = e^{ikz} \frac{w_0}{w(z)} e^{-i\Psi} e^{-(x^2+y^2)/w^2(z)} e^{ik(x^2+y^2)/2R(z)} \quad (3.14)$$

Avant de discuter plus en détails les propriétés de ce faisceau, dont la structure gaussienne est évidente, il faudrait préciser ce qu'est la validité de nos approximations. A priori, notre calcul n'est correct que pour des distance  $z$  grandes par rapport au waist. En fait, l'expression que nous obtenons est meilleure. Elle décrit correctement le faisceau pour toutes les distances. On pourra, pour s'en convaincre, porter directement cette expression dans l'équation de propagation des potentiels. On verra qu'elle est une solution de cette équation à condition de faire une approximation paraxiale (on suppose les coordonnées transverses lentement variables par rapport à la longueur d'onde ou les angles de diffraction faibles ce qui revient bien sûr au même). Nous avons donc, un peu par chance, exhibé une solution approximative des équations de Maxwell qui présente toutes les caractéristiques que nous

souhaitions. Nous aurions pu, de manière plus systématique, partir des équations de propagation et de l'approximation paraxiale et en construire une solution. Nous aurions alors trouvé tout un ensemble de solutions, dont celle que nous venons d'exhiber. Les autres, appelées faisceaux gaussiens d'ordre supérieur, seront brièvement évoquées dans le paragraphe suivant.

Nous n'avons ici calculé, a priori, qu'une des composantes du potentiel. Il faudrait les écrire toutes et dériver correctement le potentiel pour trouver la structure des champs électriques et magnétiques. Si la divergence du faisceau n'est pas trop grande, on peut toutefois simplifier beaucoup le calcul. Toutes les quantités relatives au faisceau varient en effet sur une échelle de longueur beaucoup plus grande que  $\lambda$ . On pourra donc sans doute assimiler localement le faisceau gaussien à une onde plane. Les champs électriques et magnétiques seront perpendiculaires à la direction de propagation locale qui est perpendiculaire aux surfaces d'onde ou surfaces d'égale phase du faisceau. Comme les ouvertures sont faibles, les champs ont pratiquement une orientation constante sur le profil du faisceau. En dépit de la géométrie plus complexe, on peut donc continuer à parler d'une polarisation unique pour notre faisceau.

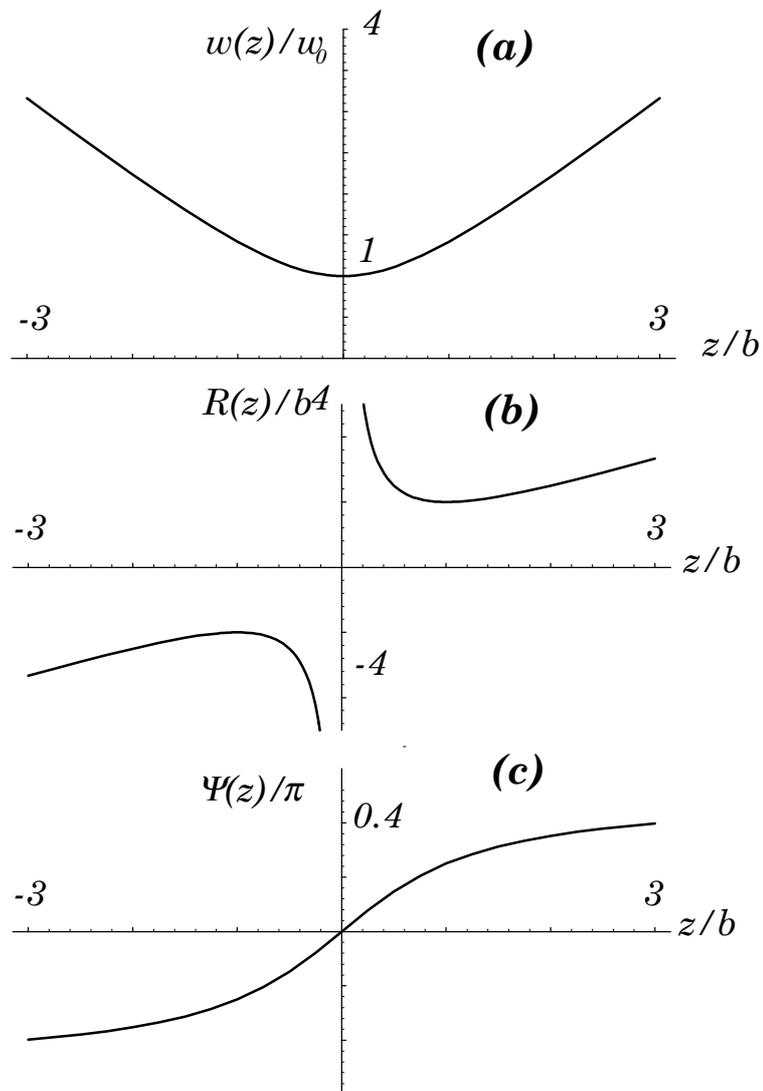
Notons enfin qu'on peut construire des solutions exactes des équations de Maxwell qui se réduisent dans le cadre paraxial aux modes gaussiens ordinaires mais qui les généralisent pour des divergences arbitraires. On les nomme "complex source points" ou CSP. Elles sont obtenues en effet en calculant formellement le rayonnement émis par un dipôle ponctuel situé en  $iz$  le long de l'axe  $Oz$ . On obtient alors une solution complètement vectorielle des équations de Maxwell. La forme détaillée est trop complexe pour trouver sa place ici.

## 3.2 Propriétés essentielles

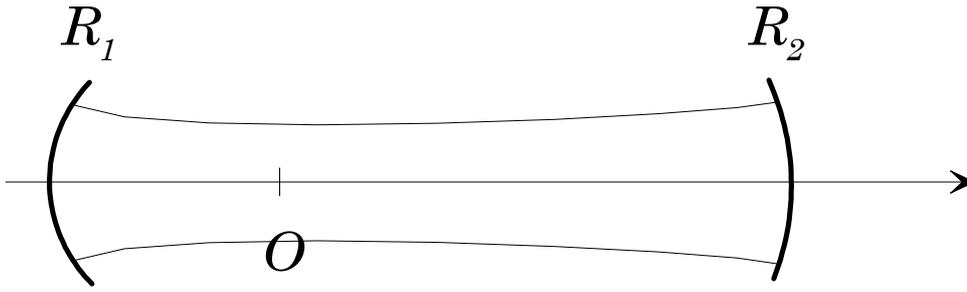
L'interprétation physique de la formule (3.14) est relativement transparente. Le facteur  $\exp(-(x^2 + y^2)/w^2(z))$  décrit une répartition gaussienne de l'intensité avec une largeur  $w(z)$ . La fonction  $w$ , normalisée à  $w_0$ , est représentée sur la figure 3.1(a). Bien que nous n'ayons fait formellement le calcul que pour  $z > 0$ , il est clair qu'il peut être étendu dans la région  $z < 0$  et que le faisceau est symétrique par rapport à l'origine. Bien sûr, la largeur vaut exactement  $w_0$  en  $z = 0$ . Ensuite, le faisceau s'élargit, une conséquence naturelle de la diffraction. A grande distance, la taille du faisceau est pratiquement une fonction linéaire de  $z$ , correspondant à une ouverture angulaire constante. Cette ouverture angulaire est égale à  $2\lambda/\pi w_0$ , très voisine de ce qu'on obtient par des arguments qualitatifs de diffraction à la Fraunhofer. On notera en particulier que l'extension latérale du faisceau est multipliée par  $\sqrt{2}$  pour  $z = b$ . Si on imagine le faisceau à trois dimensions, on comprendra bien pourquoi le paramètre  $w_0$  est appelé waist ("taille" en anglais).

Le facteur  $\exp(ik(x^2 + y^2)/2R(z))$  dans (3.14) affecte la phase du champ. Il coïncide avec la phase d'une onde sphérique de rayon  $R(z)$ . La surface équiphase, ou surface d'onde, passant par  $z$  est donc une sphère de rayon  $R$  (à des petites corrections près dues au terme en  $\Psi$ ). Le rayon  $R$  est représenté, normalisé à  $b$ , en fonction de  $z/b$  sur la figure 3.1(b). A très grande distance,  $R \simeq z$ . Le centre de courbure des surfaces d'onde est donc l'origine. On retrouve là aussi une conséquence directe de la formule de Huygens dans le régime du champ lointain. En revanche, à l'origine,  $R$  est infini: la surface d'onde est un plan, ce que nous avons effectivement supposé initialement. Le rayon de courbure minimal en module est atteint pour  $z = \pm b$  et vaut  $2b$ . Cela justifie le nom de paramètre confocal choisi pour le paramètre  $b$ . Les surfaces d'onde en  $z = \pm b$  forment en effet deux sphères de même rayon de courbure, le centre de l'une étant situé au sommet de l'autre. C'est précisément la configuration du Fabry Perot confocal, largement utilisé en optique laser. Nous verrons dans le prochain paragraphe de cet appendice comment relier la géométrie des modes gaussiens à la cavité laser qui les définit.

Le terme  $\exp -i\Psi$  est une phase supplémentaire. Le paramètre  $\Psi$  est représenté en fonction de  $z/b$  sur la figure 3.1(c). Sur une étendue de l'ordre de  $b$ ,  $\Psi$  passe de  $-\pi/2$  à  $\pi/2$ . Ce saut de phase par passage au foyer est en fait bien connu en interférométrie classique. Des expériences telles que celles des demi-lentilles montrent clairement que, pour un faisceau quelconque, la phase subit une rotation



**Figure 3.1:** (a) Largeur  $w(z)$  d'un faisceau gaussien, normalisé à  $w_0$  en fonction de  $z/b$ . (b) Rayon de courbure  $R(z)$  de la surface d'onde, normalisé à  $b$ , en fonction de  $z/b$ . (c) Phase  $\Psi$  normalisée à  $\pi$  en fonction de  $z/b$ .



**Figure 3.2:** Cavité laser Fabry Perot. Elle est constituée de deux miroirs sphériques de rayons de courbure  $R_1$  et  $R_2$  situés en  $z_1 < 0$  et  $z_2 > 0$ . Elle est de longueur  $L$ . Elle soutient un mode gaussien dont le waist est situé à l'origine.

de  $\pi$  au passage d'un point focal. On trouvera dans le Born et Wolf des cartes détaillées (et fort complexes) du champ électrique au voisinage d'un foyer pour un faisceau à profil rectangulaire. Ici, la géométrie du faisceau est beaucoup plus simple.

Le dernier terme qui mérite commentaire est le préfacteur  $w_0/w(z)$ . Il exprime tout simplement la conservation de l'énergie. En prenant le module au carré du "champ", on obtient un terme proportionnel au flux d'énergie. L'intégrale du terme gaussien d'amplitude est alors proportionnel à  $w$ . Le préfacteur rétablit la constance de l'énergie transportée le long du faisceau.

Nous n'avons considéré en fait ici que le plus simple des faisceaux gaussiens. Nous aurions pu choisir, dans le plan de référence, une forme plus complexe où la gaussienne serait multipliée par un polynôme de Hermite en fonction de  $x_1$  et de  $y_1$ . On retrouve alors un faisceau qui se propage en conservant la même forme de répartition d'amplitude. L'aspect du mode au voisinage de son waist est constitué de taches séparées par des zéros d'intensité correspondant aux zéros des polynômes de Hermite dans les deux directions. Le mode gaussien d'ordre zéro est alors celui qui correspond au polynôme le plus simple, une constante. Les autres faisceaux sont appelés "modes gaussiens d'ordre supérieur". On note souvent  $TEM_{np}$  ces faisceaux.  $TEM$  désigne un mode transverse électromagnétique. Les champs électriques et magnétiques sont en effet perpendiculaires à la direction de propagation, avec l'approximation paraxiale.  $n$  et  $p$  désignent les nombres de zéros des polynômes dans les directions  $x_1$  et  $y_1$ . Le mode gaussien fondamental est appelé  $TEM_{00}$ . C'est en général celui qu'on cherche à réaliser, car il permet, à divergence donnée, d'obtenir la plus petite tache focale. Notons que les différents modes gaussiens forment une base orthogonale de l'ensemble des faisceaux paraxiaux admettant l'axe  $z$  comme direction de propagation (le produit scalaire étant l'intégrale de recouvrement d'un des faisceaux avec le complexe conjugué de l'autre). Tout faisceau peut donc a priori se décomposer sur cette base.

### 3.3 Cavités laser

Un laser est généralement constitué d'une cavité Fabry Perot, plus ou moins remplie par un milieu amplificateur de lumière (voir figure 3.2). Quand le gain sur un aller et retour dans la cavité excède les pertes (à travers les miroirs ou à travers le milieu), l'intensité se renforce dans un aller et retour. On atteint alors le seuil d'oscillation: à partir d'une petite fluctuation de champ, due par exemple à l'émission spontanée par le milieu atomique, l'amplitude croît. Cette divergence est limitée par le phénomène de saturation, qui fait très généralement décroître le gain du milieu amplificateur en fonction de l'intensité présente dans la cavité. On atteint alors un équilibre entre gain et pertes et un régime stationnaire où l'intensité reste constante.

Pour savoir quelle est la géométrie du faisceau produit par un tel laser, on peut chercher à construire un faisceau qui respecte les conditions aux limites imposées par les miroirs. Il faut donc créer une onde stationnaire à partir de deux faisceaux ne différant que par leur direction de propagation dont

les surfaces d'onde soient des sphères, coïncidant avec la surface des miroirs. Les modes gaussiens fondamentaux conviennent a priori. En écrivant la condition d'existence d'une onde stationnaire et l'accord entre le rayon de courbure des surfaces d'onde et celui des miroirs, nous pourrions déterminer complètement la géométrie de ce faisceau à partir de celle de la cavité. C'est à ce calcul que nous allons nous employer.

La géométrie de la cavité est représentée sur la figure 3.2. Nous noterons  $z_1$  la position du miroir 1 par rapport au waïst de nos faisceaux gaussiens contrapropageants,  $z_2$  celle du miroir 2. En prenant par convention l'origine de l'axe au waïst des faisceaux, nous simplifierons beaucoup les écritures. Toutefois, il ne faut pas perdre de vue que  $z_1$  est alors une inconnue ( $z_2$  étant déterminée à partir de  $z_1$  par la longueur de la cavité). Les rayons de courbure des miroirs seront notés respectivement  $R_1$  et  $R_2$ . Dans la configuration représentée sur 3.2, nous conviendrons que les deux rayons de courbure sont positifs. Les résultats que nous allons obtenir sont plus généraux que cette géométrie et admettraient que l'un ou l'autre des rayons de courbure soit négatif.

La première condition à écrire est que l'on puisse former une onde stationnaire entre les deux miroirs. Les deux faisceaux ayant des géométries identiques, il suffit d'écrire les conditions pour le faisceau aller. Si les surfaces d'onde sont confondues avec les miroirs, ce que nous imposerons dans un moment, il suffit d'écrire cette condition de phase aux sommets. La variation de phase sur le faisceau aller, entre  $z_1$  et  $z_2$  doit donc valoir  $p\pi$  où  $p$  est un entier arbitraire. On doit donc avoir:

$$k(z_2 - z_1) + \Psi(z_2) - \Psi(z_1) = kL + \Psi(z_2) - \Psi(z_1) = p\pi . \quad (3.15)$$

L'équation est assez complexe, en raison des termes en  $\Psi$ . Elle admet toutefois une seule solution: la longueur de la cavité est fixée de manière univoque quand on fixe  $p$ . On retrouve ici tout simplement la condition de résonance de la cavité Fabry Perot. On peut fixer un peu les choses si la distance entre les miroirs et entre miroirs et waïst est grande devant le paramètre confocal du faisceau (ce qui n'est guère le cas, comme nous le verrons, pour les cavités standard). On a en effet  $\Psi(z_2) - \Psi(z_1) = \pi$  et la condition de résonance s'écrit simplement:

$$L = \left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} , \quad (3.16)$$

la condition obtenue naïvement en négligeant les termes en  $\Psi$  étant  $L = p\lambda/2$ .

L'accord en rayon de courbure entre les surfaces d'onde et les miroirs s'écrit donc simplement:

$$R(z_1) = -R_1 \quad (3.17)$$

$$R(z_2) = R_2 , \quad (3.18)$$

le signe étant imposé par nos conventions de prendre positifs les rayons de courbure des miroirs. Si on y ajoute le fait que la longueur de la cavité est  $L$ , nous avons à résoudre le système:

$$z_1 + \frac{b^2}{z_1} = -R_1 \quad (3.19)$$

$$z_2 + \frac{b^2}{z_2} = R_2 \quad (3.20)$$

$$z_2 - z_1 = L . \quad (3.21)$$

Les inconnues sont le waïst  $w_0$  du faisceau et sa position par rapport aux miroirs. Comme nous avons choisi le waïst comme origine, nous pourrions prendre comme inconnues  $z_1$  et  $z_2$  (la troisième équation donnant trivialement l'un en fonction de l'autre). En soustrayant les deux premières équations, en faisant systématiquement intervenir la distance  $z_2 - z_1$  c'est à dire  $L$ , on écrira sans peine:

$$b^2 = z_1 z_2 \left(1 - \frac{R_1}{L} - \frac{R_2}{L}\right) . \quad (3.22)$$

Introduisons alors deux nouveaux paramètres donnés par:

$$g_1 = 1 - \frac{L}{R_1} \quad (3.23)$$

$$g_2 = 1 - \frac{L}{R_2} . \quad (3.24)$$

On a  $R_1/L = 1/(1 - g_1)$  et:

$$b^2 = \frac{z_1 z_2 (g_1 g_2 - 1)}{(1 - g_1)(1 - g_2)} \quad (3.25)$$

En multipliant la première équation de notre système par  $z_1$ , la deuxième par  $z_2$  et en en faisant enfin la différence, nous avons aussi:

$$z_2^2 - z_1^2 = L(z_2 + z_1) = R_2 z_2 + R_1 z_1 , \quad (3.26)$$

et

$$(L - R_2)z_2 + (L - R_1)z_1 = 0 . \quad (3.27)$$

En divisant par  $R_1 R_2$ , on en tire sans difficultés:

$$\frac{g_2}{R_1} z_2 + \frac{g_1}{R_2} z_1 = 0 . \quad (3.28)$$

En exprimant enfin  $z_1$  en fonction de  $L$  et  $z_2$ , on obtient

$$z_2 = L \frac{g_1 R_1}{g_2 R_2 + g_1 R_1} \quad (3.29)$$

ou encore

$$z_2 = L \frac{g_1(1 - g_2)}{g_1 + g_2 - 2g_1 g_2} . \quad (3.30)$$

On en déduit:

$$z_1 = -L \frac{g_2(1 - g_1)}{g_1 + g_2 - 2g_1 g_2} \quad (3.31)$$

et, par simple substitution:

$$b^2 = L^2 \frac{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}{(g_1 + g_2 - 2g_1 g_2)^2} , \quad (3.32)$$

ce qui achève la résolution du système.

Nous avons donc ainsi exprimé la position et la valeur du waist du faisceau en fonction des paramètres géométriques de la cavité. Nous n'aurons toutefois une solution acceptable que si  $b^2 > 0$ , c'est à dire si:

$$0 < g_1 g_2 < 1 . \quad (3.33)$$

Le point représentatif de la cavité dans un plan  $g_1, g_2$  doit donc être dans le premier ou le troisième quadrant, entre les axes et les deux branches de l'hyperbole  $g_1 g_2 = 1$ . Cette condition est une condition de stabilité pour la cavité laser. On peut en effet, d'un point de vue purement optique, remplacer les trajets aller et retour entre les miroirs de la cavité par une propagation dans une série de lentilles, convergentes ou divergentes selon la courbure des miroirs, espacées de  $L$ . Traiter ce petit problème en optique géométrique ne pose aucun problème si on écrit la matrice de transfert correspondant à un passage par deux lentilles consécutives ou un aller et retour dans la cavité. La propagation sur un grand nombre de passages ou d'allers et retour sera décrite par cette matrice élevée à une grande puissance. En général, la position ou l'angle du faisceau avec l'axe, qui sont les paramètres naturels de l'optique matricielle, divergent dans cette opération. C'est seulement, comme on pourra le vérifier, si la condition (3.33) est remplie que le rayon reste à distance finie de l'axe. Cette condition est donc

une pure condition d'optique géométrique qui exprime que les deux miroirs confinent effectivement la lumière au voisinage de l'axe.

On prend donc bien garde, sauf dans quelques cas particuliers (milieux de très grand gain) de réaliser des cavités laser stables. Dans le plan  $g_1, g_2$ , nous pouvons examiner quelques points particuliers, à la frontière du domaine de stabilité

- $g_1 = g_2 = 0$ . On a alors  $R_1 = R_2 = L$ . La cavité est une cavité Fabry Perot confocale, le centre de courbure d'un miroir étant confondu avec le sommet de l'autre. C'est, de loin, la configuration de cavité la plus utilisée en technologie laser. Elle présente, entre autres, l'avantage que les modes gaussiens d'ordre supérieur se trouvent dégénérés en fréquence avec le mode fondamental. On peut voir facilement que  $b = L/2$ , ce dont nous pouvions nous douter, et que  $w_0 = \sqrt{L\lambda/2\pi}$ . Comme cette cavité est à la limite du domaine de stabilité, on rapproche en général légèrement les deux miroirs.
- $g_1 = g_2 = 1$  Les deux miroirs sont plans. C'est aussi une cavité à la limite de la stabilité, puisqu'on trouve évidemment un waist infini.
- $g_1 = g_2 = -1$  On trouve alors  $R_1 = R_2 = L/2$ . La cavité est une cavité concentrique. En fait les deux miroirs forment deux calottes d'une même sphère. On trouve dans ce cas, par un passage à la limite sans difficultés, que le waist devrait être nul. Bien sûr, cette solution n'a aucun sens physique, les conditions de l'approximation paraxiale étant violées depuis longtemps.

### 3.4 Optique gaussienne

On utilise bien sûr les faisceaux gaussiens dans des systèmes optiques composés entre autres de lentilles minces. Il est donc important de savoir comment se transforme le faisceau au passage dans ce composant essentiel de l'optique. Nous allons voir que, si les résultats sont le plus souvent très voisins de ceux de l'optique géométrique standard, ils en sont parfois aussi éloignés de manière non intuitive.

Pour décrire une lentille mince, nous allons examiner son influence sur la phase d'une onde incidente. L'axe de la lentille sera bien sûr confondu avec  $Oz$ . Comme la lentille est très mince, la déviation des rayons lumineux est négligeable et la répartition transverse d'amplitude n'est pas modifiée. Nous avons déjà rencontré ces arguments, dans le chapitre 2, quand nous avons introduit la notion d'objet de phase pour la fonction de transmission d'un diaphragme. Considérons, pour fixer les idées, une lentille plan-convexe d'indice  $n$ . La face d'entrée est plane, la face de sortie est une sphère de rayon  $R$ . L'épaisseur de verre traversée par le faisceau à la distance  $x^2 + y^2$  de l'axe est:

$$\ell = \ell_0 - \frac{x^2 + y^2}{2R}, \quad (3.34)$$

où  $\ell_0$  est l'épaisseur maximale (nous avons bien sûr, de manière consistante avec l'approximation paraxiale, remplacé la sphère par une parabole). Nous pouvons omettre ici les termes en  $\ell_0$ , qui décriraient le déphasage d'une lame mince d'épaisseur égale à celle de la lentille. Ils provoquent seulement un déphasage global de l'onde incidente. L'amplitude de l'onde en sortie est donc multipliée par le facteur de phase:

$$\exp\left(-ik(n-1)\frac{x^2 + y^2}{2R}\right) = \exp\left(-ik\frac{x^2 + y^2}{2f}\right). \quad (3.35)$$

Nous avons fait intervenir  $f = R/(n-1)$ . Pour interpréter ce résultat, on pourra s'apercevoir qu'une onde incidente plane émerge avec la phase d'une onde sphérique convergente de rayon de courbure  $f$ .  $f$  est donc la distance focale de la lentille, un résultat élémentaire d'optique géométrique. Le résultat

que nous venons d'obtenir avec une lentille convergente peut se généraliser à toutes les lentilles minces. Il suffit, avec nos notations, de compter  $f$  négativement quand la lentille est divergente.

Considérons maintenant un faisceau gaussien incident. Il est décrit, dans le plan de la lentille, par  $w(z)$  et  $R(z)$  ainsi que par la phase  $\Psi(z)$ . La répartition transverse d'intensité n'étant pas modifiée, l'amplitude reste une fonction gaussienne de la distance à l'axe, de même largeur. En revanche, la phase due à la lentille s'ajoute à celle du faisceau. L'onde résultante est encore une onde sphérique, avec une courbure  $R'$  telle que:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} - \frac{1}{f}. \quad (3.36)$$

Il est donc évident que le faisceau émergent est lui aussi gaussien, décrit par des paramètres  $w'(z')$  et  $R'(z')$ ,  $z'$  étant la distance du waist (encore inconnu) de ce faisceau à la lentille. Notons à ce point que la phase  $\Psi$  d'un faisceau gaussien peut se calculer facilement à partir de  $w$  et  $R$ . Toute l'influence de la phase de la lentille ayant été inclus dans le terme en  $R'$ , la phase  $\Psi'$  est évidemment égale à  $\Psi$ . En général,  $\Psi'$  ne coïncide pas avec la phase du nouveau faisceau calculée à partir de  $w'$  et  $R'$ . Il peut donc exister en plus du changement de géométrie un déphasage global. Les nouveaux paramètres du faisceau peuvent se calculer en résolvant l'équation de conjugaison (3.36) et  $w' = w$ . On en déduit la cote  $z'$  et le nouveau paramètre confocal  $b'$  qui fixent la position et l'étendue du nouveau waist.

Ce calcul est un peu complexe, faisant intervenir des équations du quatrième ordre. Nous n'examinerons que quelques cas simples. Le faisceau incident a son waist à l'origine que nous supposons éloignée de la lentille. Le rayon de courbure  $R$  de ce faisceau est donc essentiellement égal à la cote  $z$  de la lentille. Considérons d'abord le cas où  $R'$  s'annule. Il est évident que le waist émergent est situé sur le plan de la lentille. Cela se produit, d'après l'équation de conjugaison, si  $R = f$ , c'est à dire si le waist du faisceau incident est situé au foyer de la lentille. En optique géométrique, l'image de ce plan est à l'infini. Nous voyons bien ici que l'optique gaussienne n'est pas toujours intuitive et qu'en particulier le waist du faisceau image n'est pas toujours confondu avec l'image géométrique du plan du waist d'entrée. En revanche, en supposant que le waist du faisceau émergent est, lui aussi, situé loin de la lentille, le rayon de courbure  $R'$  donne directement sa position qui coïncide avec l'image géométrique, comme le montre la relation de conjugaison. On peut montrer aussi que, dans ce cas, les deux waists sont dans un rapport égal au grandissement géométrique de la lentille.

## Appendice 4

# Approximation eikonale

Nous avons vu, à la fin du chapitre trois, comment on pouvait passer qualitativement de l'électromagnétisme à la notion de rayon lumineux en utilisant les concepts de la diffraction. Nous avons vu aussi quels liens existaient alors entre le principe de Fermat et cette approche. Nous allons, dans cet appendice, rendre beaucoup plus rigoureuse cette approche. Nous partirons des équations de Maxwell et nous ferons un changement de variables, tout à fait rigoureux, pour distinguer deux échelles de longueur dans la variation des champs. Nous aurons d'une part la longueur d'onde dont l'échelle décrit les variations de phase du champ dans la direction de la propagation. Nous aurons aussi la variation spatiale "transverse" des champs due au fait que nous ne propageons pas en général des ondes planes. Nous ferons alors, dans le deuxième paragraphe, l'approximation de l'optique géométrique qui revient à négliger l'échelle spatiale de la première variation devant la seconde. En supposant ainsi que les "enveloppes" des champs varient lentement devant la longueur d'onde, nous retrouverons la notion de rayon lumineux, clairement définie en examinant le transport d'énergie. Enfin, dans le troisième paragraphe, nous écrirons l'équation décrivant la trajectoire des rayons lumineux. Nous montrerons aussi que cette équation est celle que l'on obtient directement à partir du principe de Fermat. Nous nous livrerons pour cela à un calcul variationnel très inspiré de ceux de la première partie de ce cours.

Notons que la technique que nous allons employer ici pour passer à l'optique géométrique s'utilise aussi dans des domaines variés. En mécanique quantique, par exemple, de nombreuses méthodes d'approximations semi-classiques sont fondées sur ce genre d'approche. Si les calculs ne sont pas directement transposables (ils sont relativement plus complexes ici en raison de la nature vectorielle du champ), leur esprit reste similaire.

Dans tout cet appendice, nous ne considérerons que la propagation dans un milieu diélectrique, sans propriétés magnétiques (les milieux magnétiques étant en général opaques, l'optique y est sans grand intérêt). Nous ne considérerons aussi que des champs monochromatiques, oscillant à la fréquence  $\omega$ . Nous noterons  $\epsilon_r$  la permittivité diélectrique du milieu et  $n = \sqrt{\epsilon_r}$  son indice de réfraction à cette même fréquence. Nous supposerons, pour faciliter les calculs, ces quantités réelles et scalaires. Nous ne traiterons donc que de milieux sans absorption ni biréfringence (des généralisations relativement immédiates permettent de tenir compte de ces effets). En revanche, nous ne ferons aucune hypothèse sur l'homogénéité du milieu et permettrons à ces quantités de varier avec la position. Les différentes quantités décrites ici sont définies et commentées dans la cinquième partie de ce cours sur la propagation dans les milieux matériels. Enfin, nous ne traiterons que la propagation libre indépendamment des sources. C'est bien en général le problème posé par une expérience d'optique.

### 4.1 Eikonale

Nous partons donc des équations de Maxwell pour des champs monochromatiques. Elles s'écrivent, en notant  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$  et  $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$  les amplitudes complexes des champs électrique et magnétique en un point

(nous nous débarrassons ainsi de toute la dépendance temporelle qui est en facteur dans tout ce qui va suivre):

$$\nabla \times \mathbf{E}_0 = ick_0 \mathbf{B}_0 \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \epsilon_r \mathbf{E}_0 = 0 \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad (4.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_0 = -i \frac{k_0}{c} \mathbf{E}_0, \quad (4.4)$$

en posant  $k_0 = \omega/c$ .

Si nous imaginons ce que doit être un rayon lumineux, la phase des champs dans la direction de propagation doit varier rapidement (sur une échelle  $1/k_0$ ) alors que, perpendiculairement à cette direction, l'amplitude varie lentement. Nous allons donc changer de variables pour faire apparaître d'une part une variation rapide de la phase avec une échelle  $k_0$  et d'autre part une variation plus lente de l'amplitude. En un mot, nous faisons apparaître les enveloppes lentement variables des champs d'une part et la modulation rapide due à leur caractère oscillant d'autre part. Ce genre d'approximations d'enveloppes lentement variables est assez couramment utilisée. Nous poserons donc:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}(\mathbf{r}) e^{ik_0 \mathcal{S}(\mathbf{r})} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{b}(\mathbf{r}) e^{ik_0 \mathcal{S}(\mathbf{r})} \quad (4.6)$$

$$(4.7)$$

où  $\mathcal{S}$ , appelée eikonale, est une fonction réelle de  $\mathbf{r}$ . Ce changement de variable n'est bien sûr pas univoque. Il n'a pas vocation à l'être, puisque nous n'étudions que la propagation dans l'espace libre, indépendamment des sources. Le champ ne serait complètement défini que si nous pouvions spécifier aussi les sources. Pour le débat qui nous occupe maintenant, la définition de la notion de rayon lumineux dans la propagation libre, cette question est sans intérêt. Nous pouvons néanmoins constater que les champs des sources à grande distance, qui seront détaillés dans la partie suivante, peuvent tous se mettre sous la forme précédente avec un choix très naturel pour l'eikonale.

Porter ce changement de variables dans les équations de Maxwell ne pose aucun problème technique. Pour la première on a:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{e} e^{ik_0 \mathcal{S}} &= \nabla e^{ik_0 \mathcal{S}} \times \mathbf{e} + e^{ik_0 \mathcal{S}} \nabla \times \mathbf{e} \\ &= ik_0 (\nabla \mathcal{S}) e^{ik_0 \mathcal{S}} \times \mathbf{e} + e^{ik_0 \mathcal{S}} \nabla \times \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

La première équation de Maxwell s'écrit donc:

$$\nabla \mathcal{S} \times \mathbf{e} + \frac{\nabla \times \mathbf{e}}{ik_0} = c \mathbf{b}. \quad (4.9)$$

Pour la deuxième:

$$\nabla \cdot \epsilon_r \mathbf{e} e^{ik_0 \mathcal{S}} = \nabla \epsilon_r \cdot \mathbf{e} e^{ik_0 \mathcal{S}} + \epsilon_r \mathbf{e} \cdot ik_0 (\nabla \mathcal{S}) e^{ik_0 \mathcal{S}} + \epsilon_r e^{ik_0 \mathcal{S}} \nabla \cdot \mathbf{e} \quad (4.10)$$

et donc

$$\mathbf{e} \cdot \nabla \mathcal{S} = -\frac{1}{ik_0} [(\nabla \ln \epsilon_r) \cdot \mathbf{e} + \nabla \cdot \mathbf{e}] \quad (4.11)$$

Par des calculs similaires, on montre que les deux dernières équations de Maxwell se mettent sous la forme:

$$\nabla \mathcal{S} \cdot \mathbf{b} = -\frac{1}{ik_0} \nabla \cdot \mathbf{b} \quad (4.12)$$

$$\nabla \mathcal{S} \times \mathbf{b} + \frac{\epsilon_r}{c} \mathbf{e} = -\frac{1}{ik_0} \nabla \times \mathbf{b}. \quad (4.13)$$

Insistons sur le fait que tous ces calculs sont exacts. Bien entendu, les quatre équations de Maxwell ne permettent pas de déterminer les 7 fonctions inconnues de nos nouvelles variables. On retrouve le fait que ce changement de fonctions est ambigu.

## 4.2 Approximation de l'optique géométrique

Nous allons maintenant faire réellement l'approximation de l'optique géométrique. Nous allons supposer que les enveloppes lentement variables et l'eikonale varient toutes sur une échelle de longueur très supérieures à la longueur d'onde. Dans les équations de Maxwell, coexistent des dérivées de ces quantités par rapport à la position et des termes faisant intervenir  $1/k_0$ . Avec notre approximation, ces derniers termes sont négligeables par rapport aux premiers (nous laissons la justification mathématique au lecteur!). L'approximation de l'optique géométrique consiste à négliger ces termes et à écrire les équations de Maxwell pour les enveloppes lentement variables sous la forme:

$$\nabla \mathcal{S} \times \mathbf{b} + \frac{\epsilon_r}{c} \mathbf{e} = 0 \quad (4.14)$$

$$\nabla \mathcal{S} \times \mathbf{e} - c\mathbf{b} = 0 \quad (4.15)$$

$$\mathbf{e} \cdot \nabla \mathcal{S} = 0 \quad (4.16)$$

$$\mathbf{b} \cdot \nabla \mathcal{S} = 0. \quad (4.17)$$

Notons tout de suite que les champs électrique et magnétique sont perpendiculaires au gradient de l'eikonale. La phase de l'onde étant essentiellement déterminée par le terme en  $k_0 \mathcal{S}$ , les surfaces d'onde, ou surfaces équiphasées, sont perpendiculaires au gradient de  $\mathcal{S}$ . Le gradient de l'eikonale pointe donc dans la direction locale de propagation. Les champs électrique et magnétique sont donc perpendiculaires à cette direction, contenus dans la surface d'onde. L'énergie électromagnétique se propage donc dans la direction du gradient de l'eikonale, perpendiculairement aux surfaces d'onde. Nous développerons plus avant ces arguments énergétiques dans un moment. Notons aussi que la deuxième équation montre alors que  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\nabla \mathcal{S}$  forment un trièdre direct. Notre onde a donc localement la structure d'une onde plane de vecteur d'onde effectif  $k_0 \nabla \mathcal{S}$ . Il est évident qu'une approximation de champs lentement variables doit, comme ce sera le cas pour le rayonnement des sources à grande distance, conduire à une structure locale d'onde plane.

### 4.2.1 Equation de l'eikonale

Les deux premières équations de Maxwell ainsi écrites doivent admettre une solution pour  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{b}$ . Si on se donne  $\nabla \mathcal{S}$  en un point, ces deux équations forment, en termes des composantes cartésiennes des champs, un système linéaire homogène  $6 \times 6$ . En général, il n'admet que la solution triviale identiquement nulle. Pour que  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{b}$  existent dans le cadre de cette approximation, il faut qu'en chaque point le gradient de l'eikonale prenne la valeur particulière qui annule le déterminant de ce système. Plutôt que d'écrire ainsi cette condition d'existence, nous allons procéder par substitution. De la seconde équation, on tire:

$$\mathbf{b} = \nabla \mathcal{S} \times \mathbf{e} / c, \quad (4.18)$$

qu'on porte dans la première. On obtient alors:

$$\nabla \mathcal{S} \times (\nabla \mathcal{S} \times \mathbf{e}) + \epsilon_r \mathbf{e} / c = 0. \quad (4.19)$$

En développant le double produit vectoriel et en utilisant le fait que  $\mathbf{e}$  est perpendiculaire au gradient de l'eikonale et en introduisant finalement l'indice de réfraction, on met la condition d'existence des champs sous la forme:

$$(\nabla \mathcal{S})^2 = n^2 \quad (4.20)$$

En tous points, l'eikonale doit vérifier cette relation pour que les champs existent. Une partie de l'arbitraire sur sa définition est donc levée.

### 4.2.2 Notion de rayon lumineux

Pour préciser la notion de rayon lumineux, nous allons nous pencher sur les propriétés énergétiques des champs ainsi définis. Ecrivons d'abord le vecteur de Poynting, en valeur moyenne temporelle:

$$\overline{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{b}^*}{\mu_0} \quad (4.21)$$

où l'étoile désigne la conjugaison complexe. Notons que l'eikonale, pur facteur de phase, s'élimine des quantités énergétiques en valeur moyenne. En exprimant alors le champ magnétique à partir de la deuxième équation de propagation, en développant le double produit vectoriel et en exploitant la géométrie, on a:

$$\overline{\mathbf{\Pi}} = \frac{\epsilon_0 c}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^*) \nabla \mathcal{S} . \quad (4.22)$$

Pour éclairer cette équation, nous allons écrire la densité moyenne d'énergie électromagnétique,  $\overline{u}$ . On a (voir cinquième partie):

$$\overline{u} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{4} \operatorname{Re} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^* + \frac{1}{4\mu_0} \operatorname{Re} \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^* . \quad (4.23)$$

On peut montrer rapidement que les contributions électriques et magnétiques à l'énergie sont égales (notons que c'est toujours le cas pour une onde plane qui est la structure locale de notre champ). En remplaçant, dans l'énergie électrique,  $\mathbf{e}^*$  par son expression en fonction de  $\mathbf{b}^*$  déduite de (4.14),  $\mathbf{e}^* = (c \nabla \mathcal{S} \times \mathbf{b}^*) / \epsilon_r$  (on notera que par définition  $\nabla \mathcal{S}$  est réel), on obtient un produit mixte:

$$\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{4} \operatorname{Re} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^* = \frac{\epsilon_0 c}{4} [\mathbf{e}, \mathbf{b}^*, \nabla \mathcal{S}] . \quad (4.24)$$

En remplaçant  $\mathbf{b}^*$  par son expression en fonction de  $\mathbf{e}^*$  déduite de (4.15) dans l'énergie magnétique, en remarquant que  $\mu_0 c = 1/\epsilon_0 c$ , on constate sans peine que la contribution magnétique a une expression identique. Finalement, la valeur moyenne de l'énergie totale s'écrit:

$$\overline{u} = \frac{\epsilon_0 n^2}{2} \operatorname{Re} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^* . \quad (4.25)$$

En rapprochant cette expression de celle du vecteur de Poynting, on constate que celui-ci est proportionnel à la densité locale d'énergie. Pour alléger les notations, nous appellerons  $\mathbf{s}$  le vecteur unitaire du gradient de l'eikonale:

$$\mathbf{s} = \frac{\nabla \mathcal{S}}{|\nabla \mathcal{S}|} = \frac{\nabla \mathcal{S}}{n} \quad (4.26)$$

(on notera ici l'importance de l'hypothèse  $n$  réel). On a alors:

$$\overline{\mathbf{\Pi}} = \frac{c}{n} \overline{u} \mathbf{s} . \quad (4.27)$$

On a donc bien une propagation de l'énergie dans la direction perpendiculaire aux surfaces d'onde, avec une vitesse  $c/n$  puisque le rapport entre le flux d'énergie et sa densité moyenne n'est autre que la vitesse de propagation (une vitesse de groupe en l'occurrence). Nous pouvons donc maintenant assimiler les lignes du champ  $\nabla \mathcal{S}$  aux rayons lumineux de l'optique géométrique. A condition de ne pas les limiter à une échelle de l'ordre de  $\lambda$  — et de sortir donc de nos approximations d'enveloppes lentement variables — les lignes de  $\nabla \mathcal{S}$  décrivent effectivement les lignes géométriques de propagation de l'énergie. Comme ces lignes sont perpendiculaires aux surfaces d'onde, on obtient ainsi directement le théorème de Malus, qui indique que les rayons lumineux sont perpendiculaires aux surfaces d'onde<sup>1</sup>. Il nous reste maintenant à établir la trajectoire de ces rayons.

<sup>1</sup>Notons que le théorème de Malus ne tient que dans les milieux diélectriques isotropes (dont la permittivité diélectrique est un scalaire). Dans les milieux biréfringents, on a encore localement une structure d'onde plane. Cette fois,  $\mathbf{D}, \mathbf{B}$  et la direction de propagation de la phase (le vecteur d'onde local) forment un trièdre direct. Mais le vecteur de Poynting est encore déterminé par  $\mathbf{E}$ . Comme la relation entre  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$  est tensorielle dans ces milieux, les deux vecteurs ne sont pas nécessairement alignés. Le vecteur de Poynting, qui définit la direction de propagation de l'énergie et donc la direction des rayons lumineux, n'est pas nécessairement aligné avec la direction de propagation de la phase, normale aux surfaces d'onde. Le théorème de Malus est donc en général inapplicable dans ces milieux.

### 4.3 Equation des rayons lumineux

#### 4.3.1 Rayons et eikonale

Les rayons lumineux sont donc les lignes du champ de gradient de  $\mathcal{S}$ . Il nous reste à établir la forme de ces lignes. Nous chercherons donc le rayon lumineux passant par un point arbitraire. Le rayon peut être défini par la forme intrinsèque  $\mathbf{r}(s)$ , position du point en fonction de l'abscisse curviligne  $s$  comptée sur le rayon à partir du point initial. Le rayon est effectivement une ligne de  $\nabla\mathcal{S}$  si, en chaque point, le vecteur tangent à la trajectoire est confondu avec le vecteur unitaire  $\mathbf{s}$  du gradient (on prendra garde à ne pas confondre ce vecteur  $\mathbf{s}$  avec l'abscisse curviligne  $s$  le long du rayon en dépit d'une fâcheuse homonymie). On doit donc avoir:

$$\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad (4.28)$$

ou encore, en multipliant les deux membres par  $n$ , longueur du gradient de l'eikonale:

$$n \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla\mathcal{S}. \quad (4.29)$$

Essayons d'écrire une équation intrinsèque pour  $\mathbf{r}$  en éliminant l'eikonale. Pour cela, afin de manipuler commodément les indices, nous quittons pour un moment les notations standard de l'analyse vectorielle et adoptons les conventions d'Einstein de sommation. Nous écrirons les indices indifféremment en position contravariante ou covariante puisque nous faisons un calcul seulement avec des composantes purement spatiales. Ecrivons donc la quantité:

$$\frac{d}{ds} n \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad (4.30)$$

en distinguant les composantes et en utilisant l'équation (4.29):

$$\frac{d}{ds} n \frac{d\mathbf{r}_i}{ds} = \frac{d}{ds} \partial_i \mathcal{S}. \quad (4.31)$$

Mais:

$$\frac{d}{ds} \partial_i \mathcal{S} = \partial_j [\partial_i \mathcal{S}] \frac{d\mathbf{r}^j}{ds}. \quad (4.32)$$

En remplaçant dans cette expression  $d\mathbf{r}^j/ds$  par  $\partial^j \mathcal{S}/n$ , on a:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} n \frac{d\mathbf{r}_i}{ds} &= \frac{1}{n} \partial_j [\partial_i \mathcal{S}] \partial^j \mathcal{S} \\ &= \frac{1}{2n} \partial_i [\partial_j \mathcal{S} \partial^j \mathcal{S}] \\ &= \frac{1}{2n} \partial_i [n^2], \end{aligned} \quad (4.33)$$

où nous avons utilisé l'équation fondamentale de l'eikonale dans le second membre. Finalement, l'équation intrinsèque du rayon lumineux s'écrit donc, en revenant aux notations standard:

$$\frac{d}{ds} n \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla n. \quad (4.34)$$

Elle permet de déterminer complètement la trajectoire du rayon si on connaît la répartition spatiale d'indice.

### 4.3.2 Applications

Pour regarder fonctionner cette équation, nous allons examiner rapidement quelques répartitions d'indice assez couramment rencontrées. Notons tout d'abord que notre équation ne s'applique pas a priori au cas d'un indice discontinu, tel que celui au voisinage d'un dioptré. On peut toutefois, en prenant la limite d'une variation continue de plus en plus rapide, en déduire les lois de la réfraction.

Commençons par un milieu homogène, d'indice constant. Le gradient est nul et l'indice sort du premier membre, mettant l'équation du rayon lumineux sous la forme:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = 0, \quad (4.35)$$

dont la solution est évidemment une droite. Nous retrouvons donc la propagation rectiligne de la lumière dans un tel milieu.

Considérons maintenant un milieu dont l'indice ne dépend que de la coordonnée  $z$ , avec une dépendance linéaire :  $n = n_0(1 + az)$ . C'est par exemple le cas de l'air quand il y a formation de mirage. L'air est beaucoup plus chaud au contact du sol, exposé au soleil, qu'en altitude. La densité, et donc l'indice, sont donc des fonctions croissantes de l'altitude  $z$ . Pour fixer les idées, nous considérerons un rayon se propageant de manière pratiquement horizontale dans un plan  $xOz$ . Nous pouvons alors, en première approximation, confondre l'abscisse curviligne  $s$  et la coordonnée  $x$ . Nous pouvons alors décrire le rayon simplement par son altitude  $z$  en fonction de  $x$ . La seule composante non nulle de l'équation (4.34) est selon  $z$  et se met sous la forme:

$$\frac{d}{dx} n \frac{dz}{dx} = an_0. \quad (4.36)$$

En remarquant que  $n$  sort de la dérivation par rapport à  $x$  et en négligeant la variation de  $n$  par rapport à  $n_0$  sur l'étendue verticale de la trajectoire (il serait à peine plus difficile d'en tenir compte), nous mettons l'équation du rayon sous la forme:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = a, \quad (4.37)$$

dont la solution est évidemment une parabole dont la concavité est dirigée vers le haut. Un rayon incident vers le sol en incidence rasante est réfléchi, ce qui donne au sol l'aspect d'un miroir à grande distance, d'où l'apparition de lacs au cœur des déserts...

Considérons enfin le problème de la fibre optique à gradient d'indice. Il existe des fibres à saut d'indice, dont le cœur, d'un diamètre de quelques microns, a un indice plus élevé que le reste de la fibre. La lumière est alors guidée par réflexion interne totale sur le dioptré limitant le cœur. Il existe aussi des fibres à gradient d'indice, où la variation d'indice est continue et en général parabolique en fonction de la distance à l'axe. Il faudrait évidemment, comme les dimensions transverses sont de l'ordre de la longueur d'onde, au moins pour les fibres monomodes, recourir à une approche ondulatoire. Nous allons nous contenter ici de comprendre qualitativement le confinement de la lumière par une image géométrique. Nous postulerons donc que l'indice est à une distance  $r$  de l'axe de la forme  $n = n_0(1 - ar^2)$  ( $a > 0$ ). Nous emploierons une géométrie très voisine de celle du mirage. Dans un plan  $xOz$  ( $x$  est l'axe de la fibre), nous écrivons la trajectoire d'un rayon paraxial. Nous pouvons encore confondre  $s$  et  $x$ , remarquer que  $n$  est indépendant de  $x$  et varie très peu par rapport à sa valeur  $n_0$  sur l'axe. Le rayon est alors entièrement décrit par  $z(x)$  et son équation de propagation s'écrit:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -2az, \quad (4.38)$$

dont la solution est évidemment une sinusoïde. Le rayon oscille donc autour de l'axe dont il reste à distance finie. Les rayons sont effectivement guidés dans cette géométrie. On remarquera que, si  $a$  était négatif, on obtiendrait des solutions divergentes où le rayon s'éloigne indéfiniment de l'axe. Comme on pouvait s'y attendre, une fibre ne guide la lumière que si l'indice est maximal au centre.

### 4.3.3 Principe de Fermat

Nous avons ici dérivé l'équation de propagation des rayons lumineux de l'approche eikonale. Elle peut en fait être déduite aussi du principe de Fermat, principe variationnel qui stipule que le trajet effectivement suivi par la lumière réalise un extremum du temps de parcours (en général un minimum). Montrons que c'est effectivement le cas par un calcul élémentaire de variations (on pourra se reporter aux résultats de la première et de la deuxième partie pour se familiariser à nouveau avec ces calculs dont nous ne détaillerons pas ici le principe).

Nous considérons un rayon lumineux décrit par l'équation intrinsèque  $\mathbf{r}(s)$  et un rayon infiniment proche, partant du même point et arrivant au même point. L'écart entre ces deux rayons peut s'écrire  $\delta\mathbf{r}(s)$ , paramétré par l'abscisse curviligne sur le rayon de référence. Le temps de parcours sur le rayon de référence,  $\int n ds$ , est extrémal. Sa variation au premier ordre dans les  $\delta\mathbf{r}$  quand on passe au rayon varié doit être nulle. Or,

$$\delta \int n ds = \int (\delta n) ds + \int n \delta ds , \quad (4.39)$$

où le premier terme décrit la variation d'indice quand on passe d'une trajectoire à l'autre, le second la variation de longueur de l'élément de trajectoire. On a évidemment:

$$\delta n = \nabla n \cdot \delta \mathbf{r} . \quad (4.40)$$

Pour estimer le second terme, nous considérons un élément différentiel  $ds$  de la trajectoire de référence. L'élément correspondant de la trajectoire variée a pour longueur:

$$ds + \delta ds = \sqrt{ds^2 + 2d\mathbf{r} \cdot d\delta\mathbf{r}} , \quad (4.41)$$

d'où on tire sans peine:

$$\delta ds = \frac{d\mathbf{r}}{ds} d\delta\mathbf{r} . \quad (4.42)$$

Dans tout ce calcul, nous avons considéré les accroissements de trajectoire comme des infiniments petits par rapport aux éléments différentiels de ces mêmes trajectoires. En écrivant finalement l'intégration par parties traditionnelles:

$$\int n \frac{d\mathbf{r}}{ds} d\delta\mathbf{r} = - \int \frac{d}{ds} n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \delta\mathbf{r} , \quad (4.43)$$

où le terme tout intégré est nul puisque trajectoire de référence et trajectoire variée coïncident aux extrémités, on met en facteur  $\delta\mathbf{r}$ . L'intégrale de variation n'est nulle pour tout accroissement que si le facteur de  $\delta\mathbf{r}$  est nul. Il est évident que l'équation ainsi obtenue est précisément (4.34). L'approche eikonale est donc strictement équivalente au principe de Fermat.

