IV - PRINCIPE D'ACTION DE SCHWINGER

A. Introduction.

Dans les chapitres précédents, nous avons donné un énoncé des postulats de Feynman de la mécanique quantique et montré comment les notions de fonction d'onde, d'équation d'onde et d'opérateurs s'en déduisaient simplement. Rappelons seulement que nous avons défini l'amplitude de probabilité $< x''t'' \mid x't' >$ par la relation

(1) $$< x''t'' \mid x't' > = \sum_H N \exp \frac{i}{\hbar} S_H$$

et l'élément de matrice d'un opérateur G associé à la grandeur classique g par

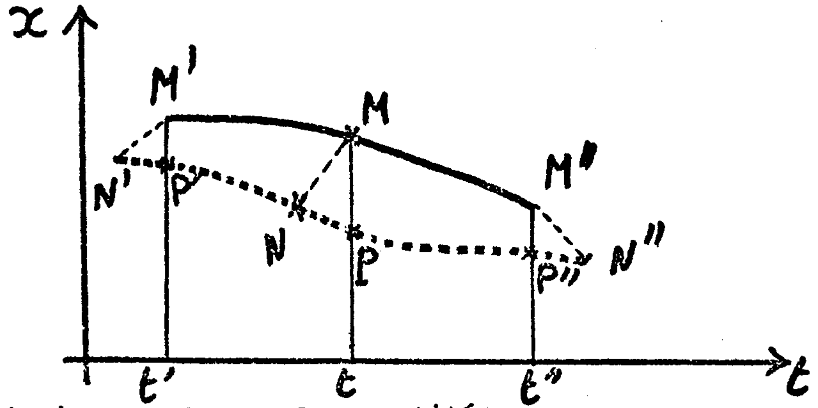
(2) $$(x''t'' \mid G \mid x't') = \sum_H N \, g_H \exp \frac{i}{\hbar} S_H$$

Une telle formulation correspond à une interprétation physique très claire, en termes d'expériences d'interférence et de diffraction dans l'espace-temps, mais conduit en général à des calculs très compliqués.

Nous abordons ici le problème sous un angle nouveau en calculant la variation $\delta < x''t'' \mid x't' >$ de l'amplitude de probabilité $< x''t'' \mid x't' >$ pour des variations infinitésimales de x', t' et x'', t''. Nous donnons tout d'abord le principe du calcul (§ B), ce qui nous permet de le rattacher au problème de la variation de l'action classique que nous traitons ensuite (§ C). Nous trouvons alors une expression de $\delta < x''t'' \mid x't' >$ qui nous permet d'établir des équations de Lagrange entre opérateurs (§ D), de définir l'opérateur d'impulsion P (§ E) et l'opérateur hamiltonien $\mathcal{H}$ (§ F).

Si le calcul de $< x''t'' \mid x't' >$ est assez compliqué, nous allons voir que celui de $\delta < x''t'' \mid x't' >$ est beaucoup plus simple et conduit à une introduction élégante et naturelle des relations de commutations, de l'équation de Schrödinger, etc.

B. Principe du calcul de $\delta < x''t'' \mid x't' >$.



Il s'agit de calculer la quantité

$$\delta < x''t''|x't' > = < x''+\delta x'', t''+\delta t''|x'+\delta x', t'+\delta t' > - < x''t''|x't' >$$

$\delta x''$, $\delta t''$ et $\delta x' \delta t'$ représentant la variation infinitésimale la plus générale des points d'espace-temps M' et M'' qui se trouvent déplacés en N' et N''.

Le principe du calcul est d'associer à chaque chemin H joignant M' à M'' (en trait plein sur la figure) un chemin H joignant N' à N'' (en trait pointillé). Pour cela on se donne deux fonctions continues infinitésimales du temps $\delta x\ (t)$ et $\delta t\ (t)$, assujetties aux conditions aux limites.

(3) $$\begin{cases} \delta x\ (t') = \delta x' \\ \delta t\ (t') = \delta t' \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta x\ (t'') = \delta x'' \\ \delta t\ (t'') = \delta t'' \end{cases}$$

A chaque point M (x, t) d'un chemin M'M'', on associe ainsi un point $N\left[x + \delta x\ (t),\ t + \delta t\ (t)\right]$. A M' correspond N' et à M'', N''. Ainsi à tout chemin reliant M' à M'' correspond un chemin reliant N' à N'' et réciproquement. Insistons sur le fait que les fonctions $\delta x\ (t)$ et $\delta t\ (t)$ sont des fonctions de t ne dépendant pas de l'histoire H.

Appelons maintenant S_H l'action pour l'histoire H, $S_{\underline{H}} = S_H + \delta S_H$ l'action pour l'histoire H.

Nous avons, d'après la relation (1) :

$$< x''t'' \mid x't' > = \sum_H N \exp \frac{i}{\hbar} S_H$$

$$< x''+\delta x'', t''+\delta t'' | x'+\delta x', t'+\delta t' > = \sum_{\underline{H}} N \exp \frac{i}{\hbar} S_{\underline{H}} = \sum_H N \exp \frac{i}{\hbar} S_H \exp \frac{i}{\hbar} \delta S_H$$

Nous pouvons développer au premier ordre $\exp \frac{i}{\hbar} \delta S_H = 1 + \frac{i}{\hbar} \delta S_H$.

Il vient alors, par simple soustraction

(4) $\delta < x''t'' \mid x't' > = \frac{i}{\hbar} \sum_H N \, \delta S_H \exp \frac{i}{\hbar} S_H$

Si $\mathcal{S}$ est l'opérateur correspondant à l'action classique (formule (13) du chapitre III), la relation (4) s'écrit

(5) $\delta < x''t'' \mid x't' > = \frac{i}{\hbar} \left(x''t'' \mid \delta \mathcal{S} \mid x't' \right)$

Sous la forme différentielle (5), la formulation de Feynman constitue le Principe d'Action de Schwinger. Pour expliciter cette formule (5), nous sommes amenés à calculer la variation δS_H de l'action classique le long de l'histoire H, pour des variations infinitésimales du chemin et des extrémités .

C. Variation de l'action classique : Calcul de δS_H et Principe d'Action de Schwinger.

Soit P le point du chemin $\underline{H}$ correspondant au même temps que M. Les coordonnées de M sont x, t, celles de N sont $x + \delta x(t)$ et $t + \delta t(t)$, celles de P sont $x + \Delta x_H (t)$ et t.

Il est évident que Δx_H (t) est différent de δx (t) et qu'au premier ordre, on a :

(6) $$\Delta x_H (t) = \delta x (t) - \dot{x}_H (t) \delta t (t) \quad (*)$$

Soient de même P' et P" les points du chemin $\underline{H}$ aux instants t' et t".

$S_{\underline{H}}$ s'écrit alors sous forme d'intégrale curviligne :

(7) $$S_{\underline{H}} = \oint_{N'}^{N''} L_{\underline{H}}(t)\, dt = \oint_{N'}^{P'} L_{\underline{H}}\, dt + \oint_{P'}^{P''} L_{\underline{H}}\, dt + \oint_{P''}^{N''} L_{\underline{H}}\, dt$$

$L_{\underline{H}}$ (t) étant le lagrangien classique à l'instant t pour l'histoire $\underline{H}$.

Nous allons évaluer successivement les différents termes de la formule (7) :

(8) $$\oint_{N'}^{P'} L_{\underline{H}}\, dt \,\underline{\sim}\, - \delta t(t')\, L_{\underline{H}}(P') = -\delta t'\, L_{\underline{H}}(P') \,\underline{\sim}\, - \delta t'\, L_H\, (M') = - \delta t'\, L_H\, (t')$$

De même

(9) $$\int_{P''}^{N''} L_{\underline{H}}\, dt \,\underline{\sim}\, \delta t''\, L_H\, (t'')$$

Les approximations que nous avons faites, qui reviennent à remplacer $L_{\underline{H}}(t)$ par la constante $L_H(t')$, lagrangien relatif au chemin H à l'instant $\overline{t'}$, sont justifiées car nous cherchons une expression au premier ordre.

(*) On voit immédiatement sur la relation (6) qu'alors que $\delta x(t)$ est indépendant de H, $\Delta x_H(t)$ en dépend [par l'intermédiaire de $\dot{x}_H(t)$]. C'est ce qui justifie l'indice H dans la notation $\Delta x_H(t)$.

On comprend d'autre part qu'il a été nécessaire d'introduire les deux variations indépendantes $\delta x(t)$ et $\delta t(t)$, au lieu d'une seule variation $\Delta x(t)$, de façon à pouvoir varier dans le temps les extrémités du chemin H.

Enfin

(10) $$\oint_{P'}^{P''} L_{\underline{H}}\, dt = \int_{t'}^{t''} L\left[x_H(t) + \Delta x_H(t),\ \dot{x}_H(t) + \Delta\dot{x}_H(t),\ t\right] dt$$

Notons que $\dot{x}_H(t) + \Delta\dot{x}_H(t)$ représente la vitesse au point P, égale à $\frac{d}{dt}\left[x_H(t) + \Delta x_H(t)\right]$ et qu'il en résulte la relation évidente $\Delta\dot{x}_H(t) = \frac{d}{dt}\ \Delta x_H(t)$.

En regroupant les relations (8), (9) et (10) et en soustrayant

$$S_H = \int_{t'}^{t''} L\ \left[x_H(t),\ \dot{x}_H(t),\ t\right] \quad dt,$$

il vient

(11) $$\delta S_H = -\delta t'\ L_H(t') + \delta t''\ L_H(t'') + \int_{t'}^{t''} L\left[x_H + \Delta x_H,\ \dot{x}_H + \Delta\dot{x}_H,\ t\right] dt - \int_{t'}^{t''} L\left[x_H,\ \dot{x}_H,\ t\right] dt$$

En développant les deux derniers termes jusqu'au premier ordre en Δx_H et $\Delta\dot{x}_H$, il vient

$$\int_{t'}^{t''} L\left[x_H + \Delta x_H,\ \dot{x}_H + \Delta\dot{x}_H,\ t\right] dt - \int_{t'}^{t''} L\left[x_H,\ \dot{x}_H,\ t\right] dt =$$

$$= \int_{t'}^{t''} \left(\Delta x_H \frac{\partial L}{\partial x_H} + \Delta\dot{x}_H \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_H}\right) dt$$

$$= \int_{t'}^{t''} \left[\Delta x_H \frac{\partial L}{\partial x_H} + \left(\frac{d}{dt}\ \Delta x_H\right) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_H}\right] dt$$

et après une intégration par parties élémentaires :

(12) $$\int_{t'}^{t''} L\left[x_H + \Delta x_H,\ \dot{x}_H + \Delta\dot{x}_H,\ t\right] dt - \int_{t'}^{t''} L\left[x_H,\ \dot{x}_H,\ t\right] dt$$

$$= \Delta x_H(t'')\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_H}(t'') - \Delta x_H(t')\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_H}(t') + \int_{t'}^{t''} \Delta x_H \left[\frac{\partial L}{\partial x_H} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_H}\right] dt$$

$$= p_H(t'')\ \Delta x_H(t'') - p_H(t')\ \Delta x_H(t') + \int_{t'}^{t''} \Delta x_H \left[\frac{\partial L}{\partial x_H} - \frac{d}{dt}\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_H}\right] dt$$

$p_H(t) = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_H}(t)$ est le moment conjugué de x.

Finalement, compte tenu de (12), (11) devient

(13) $$\delta S_H = \int_{t'}^{t''} \Delta x_H \left(\frac{\partial L}{\partial x_H} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_H}\right) dt + L_H(t'')\ \delta t'' + p_H(t'')\ \Delta x_H(t'')$$

$$- L_H(t')\ \delta t' - p_H(t')\ \Delta x_H(t')$$

On peut maintenant éliminer Δx_H en utilisant la relation (6).
On introduit alors la fonction hamiltonienne $H_H(t) = p_H(t)\ \dot{x}_H(t) - L_H(t)$ et (13) devient

(14) $$\delta S_H = \int_{t'}^{t''} \Big(\delta x(t) - \dot{x}_H(t)\ \delta t(t)\Big) \left(\frac{\partial L}{\partial x_H} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_H}\right) dt$$

$$- H_H(t'')\ \delta t'' + p_H(t'')\ \delta x'' + H_H(t')\ \delta t' - p_H(t')\ \delta x'$$

Remarques :

- Le calcul précédent est un calcul de base de mécanique analytique classique. Il montre notamment comment s'introduisent de façon naturelle les notions de moment conjugué et de hamiltonien.
- Si on pose $\delta x' = \delta x'' = \delta t' = \delta t'' = 0$, la variation de l'action δS_H se réduit à $\displaystyle\int_{t'}^{t''} \Delta x_H \left[\frac{\partial L}{\partial x_H} - \frac{d}{dt}\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_H}\right] dt$. Si on postule que le chemin classique

entre M' et M" est le chemin d'action stationnaire, la trajectoire classique $x_C(t)$ doit être telle que δS_H est nul $\forall \Delta x\ (t)$, et on retrouve alors les équations de Lagrange classiques $\frac{\partial L}{\partial x_C} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_C} = 0$.

Cependant, pour une histoire H quelconque, l'intégrale $\int_{t'}^{t''} \left[\frac{\partial L}{\partial x_H} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_H} \right] \Delta x_H\, dt$ n'est pas nulle et doit, en conséquence, figurer dans l'expression (14).

La relation (14) est une relation de la mécanique classique, entre grandeurs classiques.

Cependant, nous avons vu (chapitre III) que le formalisme de Feynman permet d'associer à toute grandeur classique g_H un opérateur quantique G par la relation (2). Ainsi, à $x_H(t)$ on associe l'opérateur $X\ (t)$, à $\dot{x}_H(t)$ l'opérateur $\dot{X}\ (t)$, à $L\ (x_H, \dot{x}_H)$ l'opérateur $\mathcal{L}\ (X, \dot{X})$, à $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ l'opérateur $P = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}}$ et enfin au hamiltonien $H = p_H \dot{x}_H - L_H$, l'opérateur $\mathcal{H} = P\dot{X} - \mathcal{L}\ (X, \dot{X})$.

La relation (14) se transcrit immédiatement aux opérateurs en raison de la linéarité de la relation (2) et compte tenu de (5), il vient

(15) $$\begin{aligned} \delta < x''t''|x't' > &= < x''+\delta x'', t''+\delta t''|x'+\delta x', t'+\delta t' > - < x''t''|x't' > = \\ &= \frac{i}{\hbar} (x''t''\ |\ \delta \mathcal{S}|\ x't') \\ &= \frac{i}{\hbar} (x''t''|P(t'')\ \delta x'' - P(t')\ \delta x' - \mathcal{H}(t'')\ \delta t'' + \mathcal{H}(t')\ \delta t'|\,x't') \\ &+ \frac{i}{\hbar} (x''t'' \int_{t'}^{t''} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}} \right) \left[\delta x(t)\ I - \delta t(t)\ \dot{X}(t) \right] dt\,|x't') \end{aligned}$$

La formule (15) qui traduit le Principe d'Action de Schwinger va constituer le point de départ de notre étude. Elle appelle quelques remarques :

α) $\delta x(t)$ ne dépendant pas de H, l'élément de matrice $\sum_H (\exp \frac{i}{\hbar} S_H).\ \delta x(t)$ se factorise et s'écrit $\delta x(t)\ \left(x''t''|I|x't'\right)$, I étant l'opérateur identité. $\delta x(t)$ doit donc être considéré comme un nombre, ou ce qui revient au même, comme un multiple de la matrice unité. C'est ce qui explique l'introduction de la matrice unité I dans le deuxième terme de la relation (15).

β) La notion d'intégrale d'opérateur introduite dans le deuxième terme de (15) peut se comprendre comme une intégrale au sens de Riemann, limite d'une somme d'opérateurs pris à des instants infiniment voisins entre t' et t".

D. <u>Equations de Lagrange en mécanique quantique</u>.

Faisons tout d'abord l'hypothèse que la variation aux bornes est nulle : $\delta x' = \delta x'' = \delta t' = \delta t'' = 0$. N' est confondu avec M', N" avec M". H et $\underline{H}$ représentent alors deux chemins infiniment voisins passant tous deux par les points M' et M". Pour passer de l'un à l'autre, on se donne les deux fonctions infinitésimales $\delta x(t)$ et $\delta t(t)$. Mais, dans ce cas particulier, il est inutile d'introduire deux variations indépendantes et on peut poser $\delta t(t) \equiv 0$. La correspondance est donc assurée à l'aide de la fonction infinitésimale $\delta x(t)$, identique pour tous les chemins H, obéissant aux relations $\delta x(t') = \delta x(t'') = 0$ et à part cela arbitraire.

Comme à tout chemin H correspond un chemin $\underline{H}$ et réciproquement et que les points de départ et d'arrivée sont les mêmes, on a évidemment

(16) $$\sum_H N \exp \frac{i}{\hbar} S_H = \sum_{\underline{H}} N \exp \frac{i}{\hbar} S_{\underline{H}}$$

le passage de l'un à l'autre de ces expressions revenant à effectuer un changement d'indice "muet" H.

On déduit de (16) que $\delta < x''t''|x't' > = 0$, ce qui, compte tenu de (15), conduit à

(17) $$\left(x''t'' \ \middle|\ \int_{t'}^{t''} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} - \frac{d}{dt}\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}}\right] \delta x(t)\, dt \ \middle|\ x't'\right) = 0$$

La relation (17) est vraie quelle que soit la fonction infinitésimale $\delta x(t)$ satisfaisant aux conditions $\delta x(t') = \delta x(t'') = 0$. Choisissons pour $\delta x(t)$ une fonction nulle partout, sauf dans un intervalle très petit autour de t. Pour que (17) soit satisfaite, il faut que l'on ait :

$$\langle x''t'' \left| \left[\frac{\partial \mathcal{L}\left[X(t), \dot{X}(t), t\right]}{\partial\left[X(t)\right]} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}\left[X(t), \dot{X}(t), t\right]}{\partial \dot{X}(t)} \right] \right| x't' \rangle = 0$$

ce qui nous conduit à la relation entre opérateurs :

(18) $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X}(t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}}(t) = 0 \qquad (\forall t)$$

La relation (18) est la généralisation aux opérateurs quantiques des équations de Lagrange classiques. Elle a été déduite directement des postulats de Feynman, ou ce qui revient au même, du Principe d'Action de Schwinger. Elle est valable quel que soit $\hbar$ et non pas seulement à la limite classique.

Les opérateurs qui interviennent dans cette équation de Lagrange étant des opérateurs à un seul instant t, nous savons (cf chapitre III) qu'il y a équivalence entre les définitions de Feynman et de Heisenberg des opérateurs (à condition d'appliquer la règle de symétrisation).

On retrouve ainsi le fait que dans la représentation de Heisenberg, les opérateurs satisfont aux équations de la mécanique classique. Prenons en effet pour exemple le cas d'une particule dans un potentiel $V(x)$. Le lagrangien quantique s'écrit $\frac{1}{2} m \dot{X}^2 - V(X)$ et l'équation (18) conduit à la relation entre opérateurs, au sens de Feynman et de Heisenberg :

(19) $$m \frac{d\dot{X}}{dt} = - \frac{\partial V}{\partial X}$$

qui n'est autre que l'équation fondamentale de la dynamique newtonienne. Dans le formalisme habituel de Heisenberg, (19) s'établit à partir de l'équation d'évolution de l'opérateur P :

(20) $$i\hbar \frac{dP}{dt} = \left[P, \mathcal{H}\right]$$

Or

(21) $$\left[P, \mathcal{H}\right] = - i\hbar \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} = - i\hbar \frac{\partial V}{\partial X}$$

(20) et (21) redonnent (19).

Si on prend la moyenne des deux membres de (19) dans un état $| \psi >$ quelconque, on retrouve le fait que les moyennes quantiques obéissent aux lois d'évolution des grandeurs classiques correspondantes : c'est le théorème d'Ehrenfest.

Reprenons maintenant la relation fondamentale (15), en tenant compte du fait que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}}$ est identiquement nul. Il vient :

(22) $$\delta < x''t''|x't' > = \frac{i}{\hbar} \left(x''t''|\delta S|x't'\right)$$

$$= \frac{i}{\hbar} \left(x''t''|P(t'')\delta x'' - P(t')\delta x' - \mathcal{H}(t'')\delta t'' + \mathcal{H}(t')\delta t'|x't'\right)$$

Chacun des opérateurs de la relation (22) est maintenant un opérateur à un seul temps et on peut écrire dans le point de vue de Heisenberg :

(23) $$< x'' + \delta x'', t'' + \delta t''|x' + \delta x', t' + \delta t' > - < x''t''|x't' >$$

$$= \frac{i}{\hbar} < x''t''|P(t'')\delta x'' - P(t')\delta x' - H(t'')\delta t'' + H(t')\delta t'|x't' >$$

E. Opérateur impulsion : P(t).

Faisons dans la relation (23) $\delta x'' = \delta t' = \delta t'' = 0$; $\delta x' \neq 0$.
On obtient la relation :

(24) $$< x'',t''|x'+\delta x',t' > - < x''t''|x't' > = - \frac{i}{\hbar} \delta x' < x''t''|P(t')|x't' >$$

La relation (24), étant vraie quel que soit $< x''t'' |$, entraîne

$$| x' + \delta x', t' > = | x't' > - \frac{i\delta x'}{\hbar} P (t') | x't' >$$

Soit

(25) $$| x' + \delta x', t' > = \left[1 - \frac{i\delta x'}{\hbar} P\ (t')\right] | x't' >$$

L'opérateur P (t') étant hermitique, $1 - \frac{i\delta x'}{\hbar} P\ (t')$ est un opérateur unitaire infinitésimal qui translate $| x't' >$ en $| x' + \delta x', t' >$. P (t), opérateur impulsion, est donc le "générateur" du groupe des translations dans l'espace des états de la mécanique quantique. C'est la propriété fondamentale de P. A partir de (25), nous pouvons retrouver les différentes propriétés de l'opérateur P :

α) <u>Commutateur $[X\ (t'), P\ (t')]$</u>:

D'après (25) :

$$P\ (t')|x't' > = \frac{i\hbar}{\delta x'} \left[|x' + \delta x', t' > - | x't' >\right]$$

et $$X(t')\ P(t')|x't' > = \frac{i\hbar}{\delta x'} \left[(x' + \delta x') | x' + \delta x', t' > - x' |x't' >\right]$$

D'autre part

$$X(t') | x't' > = x' | x't' >$$

et $$P(t')\ X(t') | x't' > = \frac{i\hbar}{\delta x'} \left[x'|x' + \delta x', t' > - x' | x't' >\right]$$

Finalement

$$\left[X(t')\ P(t') - P(t')\ X(t')\right] |x't' > = \left[X(t')\ P(t')\right] |x't' > = i\hbar|x' + \delta x',t' >$$

Cette relation est vérifiée à la limite où δx' tend vers zéro.

On a donc $\left[X(t'), P(t')\right] | x't' > = i\hbar | x't' >$.

Les vecteurs $| x't' >$ à t' fixé constituent un ensemble complet.

On en déduit donc :

(26) $$\left[X(t\ ), P(t)\right] = i\hbar \quad (\forall t)$$

et dans le formalisme de Schrödinger :

(27) $$\left[\underline{X}, \underline{P}\right] = i\hbar$$

ce qui constitue la relation de commutation fondamentale des opérateurs position et impulsion .

β) Opérateur P dans la représentation x :

La relation conjuguée de (25) s'écrit :

(28) $< x + \delta x, t \mid \; = \; < x, t \mid + \frac{i\delta x}{\hbar} < x, t \mid P(t)$

Nous cherchons à déterminer l'action de P(t) sur un état $\mid \psi >$ défini par sa fonction d'onde $< x, t \mid \psi > = \psi(x, t)$, c'est-à-dire qu'à partir de $\psi(x, t)$ nous cherchons la fonction d'onde $\Phi(x, t) = < x, t \mid P(t) \mid \psi >$.
Multiplions (28) membre à membre par $\mid \psi >$.
Il vient $\psi(x + \delta x, t) = \psi(x, t) + \frac{i\delta x}{\hbar} \Phi(x, t)$

Soit $\Phi(x, t) = \frac{\hbar}{i} \; \frac{\psi(x + \delta x, t) - \psi(x, t)}{\delta x}$

Cette relation n'est vérifiée qu'à la limite où $\delta x \to 0$. On a donc en fait :

(29) $\Phi(x, t) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t)$

et en représentation x, l'opérateur P est donc $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$.

Le formalisme de Feynman permet ainsi de retrouver de façon simple les propriétés fondamentales de l'opérateur impulsion P en le rattachant au groupe des opérateurs de translation dans l'espace des états.

F. Opérateur hamiltonien H (t).

Reprenons maintenant la relation (23) en y faisant $\delta x'' = \delta x' = \delta t'' = 0; \; \delta t' \neq 0$.

On obtient la relation

(30) $< x''t'' | x', t' + \delta t' > - < x''t'' | x't' > = \frac{i\delta t'}{\hbar} < x''t'' | \mathcal{H}(t') | x't' >$

La relation (30) étant vraie, quel que soit $< x''t'' \mid$, entraîne

$\mid x', t' + \delta t' > = \mid x't' > + \frac{i\delta t'}{\hbar} \mathcal{H}(t') \mid x't' >$

Soit

(31) $$| x', t' + \delta t' > = \left[1 + \frac{i\delta t'}{\hbar} \mathcal{H}(t')\right] | x't' >$$

L'opérateur $\mathcal{H}(t')$ étant hermitique, $1 + \frac{i\delta x'}{\hbar} \mathcal{H}(t')$ est l'opérateur infinitésimal unitaire qui translate $| x' t' >$ dans le temps en $| x', t' + \delta t' >$.

Le hamiltonien $\mathcal{H}(t)$ est le générateur du groupe des translations dans le temps.

A partir de l'équation (31), nous pouvons retrouver l'équation de Schrödinger.

La relation conjuguée de (31) s'écrit :

$$< x, t + \delta t | = < x, t | - \frac{i\delta t}{\hbar} < x, t | \mathcal{H}(t).$$

En multipliant membre à membre par un état $| \psi >$, on obtient

$$\psi (x, t + \delta t) - \psi (x, t) = - \frac{i\delta t}{\hbar} < x, t | \mathcal{H}(t) | \psi >$$

où, à la limite où $\delta t \to 0$:

(32) $$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi (x, t) = < x, t | \mathcal{H}(t) | \psi >$$

(32) n'est rien d'autre que l'équation de Schrödinger en représentation x.

En effet
$$\mathcal{H} = \frac{P^2}{2m} + V (X) = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V (x)$$

et (32) s'écrit :

(33) $$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi (x, t) = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi (x)}{\partial x^2} + V (x) \psi (x)$$

Nous retrouvons ainsi, de façon beaucoup plus élégante, l'équation de Schrödinger que nous avons déjà déduite directement des postulats de Feynman au chapitre II.