

## Chapitre 4

# Illustration des postulats de la Mécanique Quantique

Il s'agit de présenter quelques illustrations simples des postulats en décrivant notamment quelques expériences récentes<sup>1</sup>. Trois sujets seront abordés ; deux d'entre eux (effet Zenon et Cryptographie) discutent d'idées récemment introduites. Au contraire, le troisième (sauts quantiques) repose sur un concept énoncé par Bohr (1913) qui n'a pu être observé que récemment en raison de la technologie expérimentale qu'il requiert pour sa mise en évidence.

### 4.1 L'effet Zenon quantique

L'effet Zenon<sup>2</sup> quantique a été précisément formulé en 1977 [2], mais certains travaux antérieurs avaient déjà posé ce qui paraît à première vue constituer un paradoxe : on va voir qu'un système quantique soumis à une succession de mesures très rapprochées n'évolue pas dans le temps<sup>3</sup>. L'idée est facile à comprendre. Toute opération de mesure projette dans l'état propre normalisé de l'observable mesurée, associé à la valeur propre obtenue en tant que résultat de la mesure effectuée. La vitesse d'évolution du vecteur d'état étant finie, la probabilité d'obtenir la même valeur lors d'une deuxième mesure rapprochée dans le temps est relativement grande – en quelque sorte, la deuxième mesure “freine” l'évolution. Si on procède à une série de mesures très voisines en temps, on conçoit que se produise un ralentissement de la dynamique. L'argument qui suit montre, dans un cas d'école, que dans la limite d'un nombre infini de mesures effectuées entre deux temps fixés  $t_i$  et  $t_f$ , la probabilité pour le système d'être à l'instant  $t_f$  dans le *même* état qu'à l'instant  $t_i \dots$  est égale à 1.

De façon plus précise, cet effet “paradoxal” peut se formuler comme suit. Soit un système quantique, de Hamiltonien  $H$ , initialement ( $t_i = 0$ ) dans l'état  $|\psi_0\rangle$ , état supposé instable pour fixer les idées<sup>4</sup>. Le projecteur :

$$P_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0| \quad (4.1)$$

---

<sup>1</sup>D'autres questions mériteraient d'être discutées, comme par exemple le paradoxe EPR ou l'ordinateur quantique. Des expériences assez récentes ont permis de vérifier que les prévisions quantiques concernant les corrélations à distance – le point litigieux selon Einstein, Podolsky et Rosen – existent réellement ; quant à l'ordinateur quantique, il semble, selon les experts en la matière, que si les idées de base sont éminemment séduisantes, il y a loin de la théorie à la pratique. Aujourd'hui, l'ordinateur quantique se situe plutôt dans l'utopie.

<sup>2</sup>Le paradoxe de Zenon “classique” repose sur la négation *a priori* de la possibilité de diviser à l'infini l'espace et le temps. Il en résulte des affirmations paradoxales tendant toutes à montrer que le mouvement est impossible (voir par exemple [1]). Il est intéressant de noter que Schrödinger revint dans les années 30 sur la question de pouvoir représenter l'espace et le temps par des grandeurs continues.

<sup>3</sup>“It is common knowledge that a watched kettle never boils.” [3].

<sup>4</sup>Cette hypothèse n'est pas essentielle, mais elle en rajoute au spectaculaire : une particule instable que l'on observe en continu est stable !

est un opérateur hermitique, dont les valeurs propres  $\varpi_\lambda$  sont 0 et 1 :

$$\varpi_1 = 1 : P_0 |\psi_0\rangle = |\psi_0\rangle ; \quad \varpi_0 = 0 : P_0 |\phi\rangle = 0 \quad \forall |\phi\rangle \perp |\psi_0\rangle . \quad (4.2)$$

La valeur propre 0 est en général fortement dégénérée (sauf si l'espace des états est de dimension égale à 2). En tout cas,  $P_0$  est un opérateur dont toutes les valeurs propres sont réelles et dont l'ensemble des vecteurs propres constitue une base complète de  $\mathcal{E}$  : c'est donc une observable au sens de la Mécanique Quantique. De ce fait, il est licite d'appliquer les postulats concernant les résultats d'une opération de mesure effectuée sur un système dans l'état  $|\Psi\rangle$  donné :

- le résultat d'une mesure est l'une des valeurs propres  $\varpi_\lambda$  de  $P_0$
- la probabilité d'obtenir le résultat  $\varpi_\lambda$  est le module au carré de la composante de  $|\Psi\rangle$  sur le vecteur propre correspondant,  $|\varpi_\lambda\rangle$
- juste après la mesure dont le résultat est  $\varpi_1 = 1$ , le système se trouve dans l'état  $|\varpi_1 = 1\rangle \equiv |\psi_0\rangle$  (réduction du paquet d'ondes en l'absence de dégénérescence) ; si le résultat est  $\varpi_0 = 0$ , le système est, juste après cette mesure, dans l'état (normalisé) qui est la projection de l'état juste avant la mesure sur le sous-espace  $\{|\varpi_\lambda = 0\rangle\}$  (réduction du paquet d'ondes en présence de dégénérescence).

Ce postulat a d'étranges conséquences (le *Chat de Schrödinger* !). Il est toutefois une nécessité logique pour que la théorie quantique ait un sens physique. En effet, si la mesure à l'instant  $t_0$  d'une certaine observable  $A$  sur le système dans l'état  $|\Psi\rangle$  a produit la valeur non-dégénérée  $a_0$ , une deuxième mesure effectuée immédiatement après doit évidemment redonner la *même* valeur (avec probabilité un). Ceci n'est possible que si à l'issue de la première mesure le système est dans l'état  $|a_0\rangle$ , propre de  $A$  avec la valeur propre  $a_0$  ; la première mesure a donc bien effectué la projection :

$$|\Psi(t_0)\rangle \rightarrow |a_0\rangle \equiv |\Psi(t_0 + 0)\rangle . \quad (4.3)$$

Effectuons une mesure unique de  $P_0$  à l'instant  $t$ , le système étant parti à  $t_i = 0$  de l'état  $|\psi_0\rangle$  ; le descendant de l'état de départ est  $U(t)|\psi_0\rangle$  où  $U(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht}$ . Le résultat de cette mesure est donc :

$$1 \text{ avec la probabilité } p_1 = |\langle \varpi_1 | U(t) | \psi_0 \rangle|^2 \quad (4.4)$$

$$0 \text{ avec la probabilité } p_0 = 1 - p_1 . \quad (4.5)$$

Quand on a trouvé 1, on convient de dire que le résultat de la mesure est positif.  $|\psi_0\rangle$  étant l'unique vecteur propre associé à la valeur propre 1,  $|\psi_0\rangle \equiv |\varpi_1\rangle$ , et (4.4) s'écrit aussi :

$$p_1(t) = |\langle \psi_0 | U(t) | \psi_0 \rangle|^2 . \quad (4.6)$$

Supposons maintenant que l'instant  $t$  de mesure soit très petit comparé aux inverses de toutes les fréquences de Bohr ; alors, toutes les exponentielles apparaissant dans le développement de  $U(t)|\psi_0\rangle$  sur les états propres de  $H$  peuvent être développées, et l'amplitude de transition est approximativement donnée par :

$$A_{0 \rightarrow 0}(t) \equiv \langle \psi_0 | U(t) | \psi_0 \rangle \simeq \langle \psi_0 | 1 + \frac{Ht}{i\hbar} + \frac{1}{2!} \left( \frac{Ht}{i\hbar} \right)^2 | \psi_0 \rangle + \mathcal{O}(t^3) . \quad (4.7)$$

Dans ces conditions :

$$p_1(t) = |A_{0 \rightarrow 0}(t)|^2 \simeq \left( 1 - \frac{t^2}{2\hbar^2} \langle H^2 \rangle \right)^2 + \frac{t^2}{\hbar^2} \langle H \rangle^2 \simeq 1 - \hbar^{-2} \Delta H^2 t^2 + \mathcal{O}(t^4) . \quad (4.8)$$

Toutes les moyennes  $\langle \dots \rangle$  sont prises avec l'état  $|\psi_0\rangle$ ,  $\Delta H^2$  est l'écart quadratique<sup>5</sup> de l'énergie dans l'état  $|\psi_0\rangle$ . À la réflexion,  $p_1(t)$  est en fait une probabilité *conditionnelle* : dire que l'état de départ est  $|\psi_0\rangle$  est équivalent

<sup>5</sup>Tout ce qui suit suppose évidemment que la variance  $\Delta H$  de l'énergie est *finie*.

à affirmer que l'on a fait juste avant une mesure qui a produit le résultat  $\varpi_\lambda = 1$  ; avec la notation habituelle pour une probabilité conditionnelle, on peut donc écrire :

$$p_1(t) \equiv p(t|0) , \quad (4.9)$$

et  $p(t)$  est bien la probabilité de trouver 1 à l'instant  $t$  sachant que l'on a trouvé 1 à  $t = 0$ . En disant les choses autrement : supposons que l'on fasse deux mesures successives de l'observable  $P_0$  aux deux instants  $t_1$  et  $t_2 > t_1$ . Si on trouve la valeur 1 en  $t_1$  (mesure positive), alors, l'état du système à  $t_1 + 0$  est encore  $|\psi_0\rangle$  ; l'état à l'instant  $t_2$  est donc  $U(t_2 - t_1)|\psi_0\rangle$ . Dans ces conditions, la probabilité de trouver à nouveau la valeur propre 1 à l'instant  $t_2$  sachant que l'on a trouvé 1 à l'instant  $t_1$  est bien :

$$p(t_2|t_1) = p_1(t_2 - t_1) \quad (4.10)$$

soit approximativement, d'après (4.8) :

$$p(t_2|t_1) \simeq 1 - \hbar^{-2} \Delta H^2 (t_2 - t_1)^2 . \quad (4.11)$$

Cette probabilité ne dépend que de la différence des temps, puisque  $H$  est depuis le début supposé indépendant du temps.

Effectuons maintenant une série de  $N$  mesures de  $P_0$  aux instants successifs  $t_n = n\Delta t$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , où  $\Delta t = \frac{t}{N}$ ,  $t$  et  $N$  étant fixés. À l'issue de cette série, la probabilité d'avoir trouvé à chaque fois la valeur propre 1 (toutes les mesures donnent un résultat positif) est<sup>6</sup> :

$$p_{\text{pos}}(t_1, t_2, \dots, t_N) = p(t_N|t_{N-1})p(t_{N-1}|t_{N-2}) \dots p_1(t_2|t_1) \simeq \left[ 1 - \hbar^{-2} \Delta H^2 \frac{t^2}{N^2} \right]^N . \quad (4.12)$$

En utilisant maintenant :

$$\left( 1 - \frac{C}{N^2} \right)^N = e^{N \ln(1 - \frac{C}{N^2})} \simeq e^{-\frac{C}{N}} \simeq 1 \quad (N \gg 1) \quad (4.13)$$

on voit que la probabilité  $p_{\text{pos}}$  que toutes les mesures donnent un résultat positif tend vers 1 quand le nombre de mesures tend vers l'infini :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_{\text{pos}}(t_1, t_2, \dots, t_N) = 1 \quad (4.14)$$

Autrement dit, un système observé (mesuré) en "continu" n'évolue pas.

#### Remarques

1. La probabilité de trouver toujours la même valeur (1 en l'occurrence) lors de la mesure de la "variable binaire" associée à  $P_0$  tend donc vers 1. Ceci est complètement différent de la probabilité de trouver toujours pile lors du jet d'une pièce, effectué un grand nombre de fois,  $N$  : cette dernière vaut  $2^{-N}$  et tend vers zéro exponentiellement. Fondamentalement, la différence tient à la corrélation statistique des événements, forte pour l'effet Zenon, nulle (ou supposée négligeable) pour le jet de la pièce. Pour l'effet Zenon quantique, plus on raccourcit l'intervalle de temps entre deux mesures successives, plus grande est la probabilité de retrouver la même valeur que lors de la mesure immédiatement précédente. Pour le jet de la pièce, tout nouveau lancement est supposé complètement indépendant de tous les précédents.
2. L'instabilité supposée de l'état  $|\psi_0\rangle$  ne joue aucun rôle et n'a été adoptée que pour fixer les idées. La même conclusion peut être tirée pour un système à deux niveaux séparés par l'énergie  $\hbar\omega_0$ , dont la dynamique libre est périodique de période  $\frac{2\pi}{\omega_0}$  ; en la circonstance, la seule condition à retenir est  $\Delta t \ll \omega_0^{-1}$ .
3. La conclusion exprimée par (4.14) repose crucialement sur le fait que la probabilité  $p_1(t)$  s'écarte quadratiquement de la valeur 1 (voir (4.8)). Si la variation était linéaire (par exemple, le début d'une exponentielle décroissante),  $p_1(t) \simeq (1 - \Gamma t)$ , on aurait :

$$p_{\text{pos}}(t_1, t_2, \dots, t_N) \simeq \left( 1 - \Gamma \frac{t}{N} \right)^N \rightarrow e^{-\Gamma t} . \quad (4.15)$$

<sup>6</sup>La probabilité des  $N$  résultats positifs est le produit des probabilités de transition  $p(t_{n+1}|t_n)$  : il s'agit donc d'une *chaîne de Markov*.

Plus généralement, avec un comportement du type :

$$p_1(t) \simeq (1 - Ct^\alpha) , \quad (4.16)$$

on obtient :

$$p_{\text{Pos}}(t_1, t_2, \dots, t_N) \simeq \left[ 1 - C \left( \frac{t}{N} \right)^\alpha \right]^N \simeq e^{-Ct^\alpha N^{1-\alpha}} . \quad (4.17)$$

Dès que  $\alpha > 1$ , il y a effet Zenon : c'est bien quand le système s'éloigne "lentement" de son point de départ que celui-là peut survenir. Si on considère un atome à deux niveaux  $|e\rangle$  (excité, radiatif) et  $|g\rangle$  (fondamental), la première phase de déclin de l'état excité est exponentielle<sup>7</sup> sauf sur un très petit intervalle, où le comportement – parabolique comme en (4.8) – permet l'effet Zenon ; ce régime étant de courte durée, il semble donc très difficile d'observer l'effet Zenon dans une configuration aussi simple.

L'argument élémentaire ci-dessus, conduisant à la mise en évidence de l'effet Zenon, est fondé sur la notion idéale que l'on se fait de l'opération de mesure en Mécanique Quantique, caractérisée notamment par la réduction instantanée du paquet d'ondes, et sans se risquer à introduire "l'appareil de mesure" dans le formalisme (le peut-on, d'ailleurs ?). La difficulté d'observation de l'effet est liée à la définition d'un scénario permettant de réaliser expérimentalement une suite de processus singeant aussi bien que possible l'opération de mesure au sens de la Mécanique Quantique.

Le ralentissement de la dynamique quantique peut aussi être mis en évidence dans un petit modèle que l'on peut énoncer innocemment, sans référence initiale au concept de mesure.

Considérons un système à petit nombre de niveaux, couplé à un grand système, ce dernier étant caractérisé par le fait qu'il possède un très grand nombre de degrés de liberté ; cette propriété se traduit usuellement par le fait que le spectre d'énergie du grand système forme un quasi-continuum. Dès lors, il existe un grand nombre de couples de fréquences dont la différence est très petite, associés à des périodes très longues ; au total, les temps de récurrence (ou de pseudo-récurrences) deviennent gigantesques au point de perdre tout sens pour le physicien : l'irréversibilité de la dynamique du petit système couplé au grand devient un état de fait.

Il est tout à fait possible de bâtir un formalisme montrant ceci en détail. Il apparaît alors que très souvent, notamment lorsque le couplage entre les deux systèmes est faible en un sens à préciser, des approximations légitimes permettent d'établir que sur un grand intervalle de temps, la dynamique oscillante est amortie suivant un simple régime exponentiel. Cette conclusion repose sur le fait que le couplage avec le grand système décale les pôles de la résolvante<sup>8</sup> de l'axe réel vers le demi-plan complexe inférieur (plus précisément dans le deuxième feuillet de Riemann), fabriquant ce que l'on appelle dans d'autres contextes une *résonance*, d'autant plus fine que le temps de relaxation du petit système est long. Si  $\hbar\Gamma$  est largeur de la résonance, le temps de relaxation (ou durée de vie de l'état instable) est  $\sim \Gamma^{-1}$ . Outre l'apparition de la largeur, la partie réelle du pôle est (un peu) différente de l'énergie "nue" : on parle parfois de *renormalisation* de l'énergie, et c'est ainsi que l'on peut rendre compte du *Lamb shift* d'un atome (dans ce dernier cas, le grand système n'est autre que le champ électromagnétique quantifié dans une grande boîte – c'est pourquoi on parle alors de *déplacement radiatif*).

D'un autre point de vue, ce comportement exponentiel peut être d'emblée fabriqué de façon purement phénoménologique en incorporant des parties imaginaires (négatives) dans les énergies, ce qui revient peu ou prou à introduire un Hamiltonien *ad hoc* non hermitique. Cette recette, dont on il est certes intéressant de discuter les fondements, permet de faire l'économie de la description quantique du grand système, forcément un peu laborieuse, et c'est elle que l'on applique maintenant.

Imaginons un atome à trois niveaux  $|g\rangle$ ,  $|m\rangle$  et  $|e\rangle$ .  $|g\rangle$  est l'état fondamental,  $|m\rangle$  un état excité métastable dont la désexcitation radiative vers le fondamental a une probabilité très faible, que l'on néglige dans la suite. Enfin,  $|e\rangle$  est un état fortement couplé au fondamental par échange de photons avec l'extérieur. L'ordre des

<sup>7</sup>Toutefois, aux temps très longs, le déclin suit une loi puissance  $\sim t^{-\lambda}$ , qui est *relativement* dominante une fois l'exponentielle éteinte.

<sup>8</sup>Essentiellement, la résolvante est la transformée de Laplace (ou de Fourier) de l'opérateur d'évolution  $U(t)$ . C'est un avatar de fonction de Green, dont les singularités dans  $\mathbb{C}$  donnent le spectre de  $H$  et déterminent donc la dynamique (pour plus de détails, voir [4]). En particulier, quand le spectre de  $H$  contient une composante continue, la résolvante possède des points de branchement ; la (ou les) coupure correspondante définit la frontière commune des différents feuillets constituant la surface de Riemann.

énergies est  $E_g < E_m < E_e$ . La fuite radiative à partir de  $|e\rangle$  vers le fondamental va être pragmatiquement représentée par une partie imaginaire  $-i\hbar\frac{\Gamma_e}{2}$  ajoutée à l'énergie de l'état  $|e\rangle$  ( $\Gamma_e > 0$ ) et, dans la suite, on considère exclusivement les deux niveaux  $|m\rangle$  et  $|e\rangle$ , supposés satisfaire les équations suivantes :

$$H_{at}|m\rangle = \hbar\omega_m|m\rangle \quad H_{at}|e\rangle = \hbar(\omega_e - i\frac{\Gamma_e}{2})|e\rangle . \quad (4.18)$$

Supposons maintenant cet atome perturbé par un champ externe (semi-classique) harmonique résonnant représenté par l'opérateur<sup>9</sup>  $V(t)$  :

$$V(t) = \hbar\Omega \left[ |e\rangle\langle m| e^{i(\omega_m - \omega_e)t} + |m\rangle\langle e| e^{i(\omega_e - \omega_m)t} \right] . \quad (4.19)$$

Ceci étant posé, on écrit le vecteur d'état sous la forme :

$$|\Psi(t)\rangle = a_m(t)e^{-i\omega_m t}|m\rangle + a_e(t)e^{-i\omega_e t}|e\rangle \quad (4.20)$$

et l'équation de Schrödinger (effective) pour les coefficients s'écrit :

$$\dot{a}_m(t) = -i\Omega a_e , \quad \dot{a}_e(t) = -i\Omega a_m - \frac{\Gamma_e}{2} a_e(t) . \quad (4.21)$$

L'intégration est immédiate<sup>10</sup> ; supposant l'atome initialement dans l'état  $|m\rangle$ , on trouve :

$$a_m(t) = e^{-\frac{1}{4}\Gamma_e t} \left( \cos \tilde{\Omega} t + \frac{\Gamma_e}{4\tilde{\Omega}} \sin \tilde{\Omega} t \right) , \quad a_e(t) = -i \frac{\Omega}{\tilde{\Omega}} e^{-\frac{1}{4}\Gamma_e t} \sin \tilde{\Omega} t , \quad (4.22)$$

avec :

$$\tilde{\Omega} = \sqrt{\Omega^2 - \frac{\Gamma_e^2}{16}} . \quad (4.23)$$

L'oscillation de Rabi correspond à  $\frac{\Gamma_e}{\Omega} \ll 1$  ; l'atome effectue alors un va-et-vient sous-amorti de l'état  $|m\rangle$  à l'état  $|e\rangle$  à la pulsation  $\simeq \Omega$  :

$$P_m(t) \equiv |a_m(t)|^2 \simeq e^{-\frac{1}{2}\Gamma_e t} \cos^2 \Omega t \quad (\Gamma_e \ll \Omega) . \quad (4.24)$$

Au contraire, si  $\frac{\Gamma_e}{\Omega} \gg 1$  :

$$P_m(t) \simeq e^{-4(\Omega/\Gamma_e)^2 \Gamma_e t} \quad (\Omega \ll \Gamma_e) \quad (4.25)$$

et l'atome est alors bloqué très longtemps (relativement à l'échelle de temps  $\Gamma_e^{-1}$ ) dans l'état métastable, son état initial. Dans la limite  $\frac{\Omega}{\Gamma_e} \rightarrow 0$ ,  $P_m(t) \rightarrow 1$ ,  $\forall t$ . En définitive, ce modèle très simple montre que la fuite rapide d'énergie vers l'extérieur (*via* l'état excité  $|e\rangle$ ) inhibe la transition induite par le champ résonnant provoquant l'oscillation de Rabi.

La parenté avec l'effet Zenon se situe au niveau de la dynamique, qui est ralentie de façon spectaculaire. En outre, l'évacuation rapide d'énergie, quasi-instantanée quand on la rapporte à l'échelle propre du système  $\Omega^{-1}$ , est un processus physique de durée très courte à destination du milieu extérieur que l'on peut considérer comme l'un de ces mécanismes qui se produisent quoi qu'il arrive quand un système microscopique interagit avec un appareil de mesure. Le modèle ci-dessus ne fait à aucun moment référence à une réduction de paquet d'ondes – la dynamique est hamiltonienne (quoique le Hamiltonien effectif est non-hermitique) – mais on sent néanmoins que la parenté ne se réduit pas au simple ralentissement, même s'il semble difficile de pousser davantage la comparaison tout en conservant la définition première de l'effet Zenon.

Cook [5] a proposé une expérience destinée à mettre en évidence cet effet, par une inhibition de l'absorption induite dans un atome à trois niveaux, du type de celui qui vient d'être introduit. Par opposition avec ce qui précède, c'est maintenant le couple ( $|g\rangle$ ,  $|m\rangle$ ) qui est sollicité par une excitation résonnante de pulsation  $\omega$  et participe à l'oscillation de Rabi (voir fig. 4.1) ; la transition  $|g\rangle \longleftrightarrow |m\rangle$ , d'énergie  $\hbar\omega_0$ , est dans le domaine des radiofréquences (quelques centaines de MHz), l'oscillation de Rabi se produit à une fréquence de l'ordre de quelques dizaines de Hertz ou même moins. Si on peut effectuer une mesure de l'état du système durant cette oscillation, on trouve soit  $|g\rangle$ , soit  $|m\rangle$  – l'état  $|e\rangle$  étant pour l'instant hors-circuit – avec des probabilités connues, dépendant de la position de l'instant de mesure par rapport au cycle de Rabi (et aussi de l'écart<sup>11</sup> à la

<sup>9</sup>Le champ donnant lieu au couplage  $V(t)$  avec l'atome est bien *résonnant*, puisqu'il oscille précisément à la pulsation de Bohr  $\omega_e - \omega_m$  de l'atome.

<sup>10</sup>Utiliser par exemple une transformation de Laplace.

<sup>11</sup>C'est seulement quand cet écart est nul que les probabilités  $P_g$  et  $P_m$  varient harmoniquement (à la pulsation  $\Omega$ ) entre 0 et 1.

résonance  $\omega - \omega_0$ ). En définitive, l'opération de mesure – à définir plus précisément – révèle soit l'état  $|g\rangle$ , soit l'état  $|m\rangle$ .

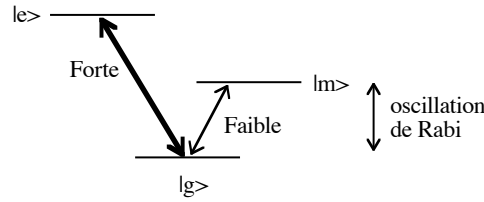


Figure 4.1: Atome à trois niveaux pour l'effet Zenon.

L'état  $|e\rangle$  est supposé être couplé exclusivement au fondamental  $|g\rangle$  par l'intermédiaire du champ électromagnétique : un *pulse* optique peut donc provoquer des transitions entre  $|g\rangle$  et  $|e\rangle$ .  $|e\rangle$  est un état excité "ordinaire", avec une durée de vie très courte,  $10^{-10}$  s pour fixer les idées.

L'atome est donc soumis d'une part à l'excitation résonnante provoquant l'oscillation de Rabi, d'autre part à un *pulse* optique de durée très courte, ou plusieurs *pulses* successifs, et chacun de ceux-ci provoque le *collapse* de la fonction d'onde. En effet, si l'atome est dans l'état  $|g\rangle$  quand arrive un tel *pulse*, des cycles d'absorption-émission spontanée de photons se produisent, se manifestant par une diffusion de photons dans une direction aléatoire par rapport à la direction incidente<sup>12</sup> ; si au contraire l'atome est dans l'état  $|m\rangle$ , aucune diffusion de photon ne se produit. Ainsi, l'absence de photons diffusés révèle que l'état de l'atome est l'état  $|m\rangle$  et produit donc le *collapse* de la fonction d'onde en  $|m\rangle$  ; au contraire, la présence de photons diffusés produit le *collapse* en  $|g\rangle$ . Pour parler de façon imagée, l'observation ou non de photons diffusés joue le rôle de l'aiguille de l'ampèremètre.

En outre, si on "trouve"  $|m\rangle$  au sens ci-dessus, l'atome reste en  $|m\rangle$  durant tout le *pulse* et un deuxième *pulse* rapproché en temps révèle à nouveau le même état. Si au contraire on "trouve"  $|g\rangle$ , l'atome retourne très vite dans le même état  $|g\rangle$ , puisque la durée de vie  $\Gamma_e^{-1}$  est très petite.

En définitive, le *pulse* optique constitue bien une mesure de l'état au sens où l'entend la Mécanique Quantique, à un petit détail près : la durée finie du *pulse* et le séjour éphémère de l'atome dans l'état  $|e\rangle$  – alors que le processus de mesure, tel qu'il est ordinairement décrit, affirme l'instantanéité de la réduction du paquet d'ondes. Comme toujours, l'essentiel est que l'instantanéité supposée repose sur la considération de deux échelles de temps, la plus petite étant très petite – mais évidemment jamais strictement nulle. En tout cas, ce dispositif réalise presque parfaitement ce que la Mécanique Quantique appelle une mesure idéale, avec toutes ses conséquences y compris la réduction du paquet d'ondes, dans le cas où il y a deux résultats possibles :  $|g\rangle$  ou  $|m\rangle$ . Un tel atome se prête donc *a priori* à l'observation de l'effet Zenon.

Itano *et al.* [6] ont d'une part réalisé cette expérience, d'autre part en ont donné la description théorique ; l'accord entre théorie et expérience est remarquable, justifiant que leur travail soit considéré comme la première mise en évidence de l'effet Zenon quantique.

L'expérience a été menée sur une petite population d'ions  ${}^9\text{Be}^+$  (environ 5000), en tout premier lieu soumise à un champ magnétique statique assurant l'éclatement Zeeman des états pertinents. Les états  $|g\rangle$  et  $|m\rangle$  sont deux sous-niveaux<sup>13</sup> hyperfins du fondamental  ${}^2\text{S}_{\frac{1}{2}}$  ( $(m_I, m_J) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$  et  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ). Un champ de radiofréquence<sup>14</sup> (RF) provoque la résonance de Rabi entre ces deux niveaux. Le rôle de  $|e\rangle$  est tenu par une composante appartenant au multiplet excité  ${}^2\text{P}_{\frac{3}{2}}$  ( $(m_I, m_J) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ ), couplée exclusivement au fondamental (l'émission spontanée de  ${}^2\text{S}_{\frac{1}{2}, (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$  est totalement négligeable).

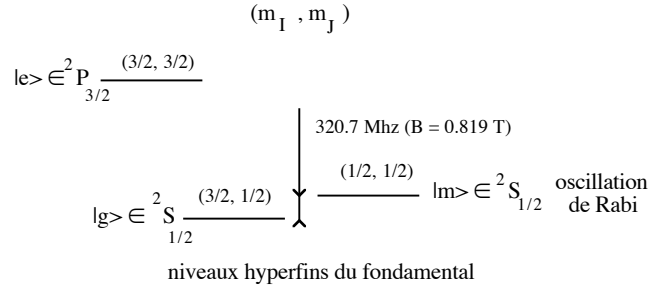
Soit  $\hbar\Omega$  l'élément de matrice couplant les deux niveaux hyperfins pertinents, entre lesquels se produit l'oscillation de Rabi. On va voir que si le champ RF a une durée<sup>15</sup>  $T$  égale à  $\frac{\pi}{\Omega}$  – on parle alors de  $\pi$ -*pulse* –, l'ion

<sup>12</sup>C'est précisément l'une des caractéristiques de l'émission *spontanée*.

<sup>13</sup> $I$  se réfère au spin nucléaire,  $J$  au spin électronique.

<sup>14</sup>Dans leur expérience, le champ magnétique vaut 0.819 T et la séparation de deux niveaux hyperfins est égale à 320.7 MHz ; l'amplitude du champ RF est ajustée de sorte que  $\Omega T = \pi$ , avec  $T = 256$  ms, soit  $\Omega \simeq 4\pi \simeq 12$  rd/s.

<sup>15</sup>Comme la pulsation RF  $\omega$  est très grande devant  $\Omega$  (fréquence de Rabi), cela a un sens de parler d'un champ RF de fréquence (presque) parfaitement déterminée de durée  $T \sim \Omega^{-1} \gg \omega^{-1}$ .

Figure 4.2: Atome à trois niveaux de Itano et *al.*

partant du fondamental  $|g\rangle$  se retrouverait avec la probabilité  $P_m = 1$  dans l'état  $|m\rangle$  à l'issue de l'excitation RF s'il évoluait librement, en dehors de toute mesure. En fait, si une série de *pulses* optiques de durée très courte est simultanément envoyée sur l'ion, à des intervalles de temps  $p\frac{T}{N}$  ( $p = 1, 2, \dots, N$ ), ces mesures successives vont ralentir la dynamique au point de donner  $P_m = 0$  (soit  $P_g = 1$ ) dans la limite d'un nombre infini de *pulses* : c'est très exactement l'effet Zénon quantique.

La description théorique repose fondamentalement sur l'idée suivante : entre deux *pulses*, le système évolue selon l'équation de Schrödinger (qui, de fait, n'implique que les deux niveaux hyperfins, ceux qui participent à l'oscillation de Rabi). Au contraire, l'effet d'une *pulse* (une mesure) ne relève pas de cette équation et est décrit conformément au postulat de réduction du paquet d'ondes ; comme on va le voir, ceci revient à annuler "à la main" des éléments non-diagonaux de l'opérateur densité. Avant de continuer la discussion de l'expérience, et pour en comprendre le traitement théorique, quelques éléments concernant l'opérateur densité sont donc maintenant nécessaires.

### ■ L'opérateur densité

L'opérateur densité est la quantité centrale de la statistique quantique, tout comme l'est la fonction d'onde pour la mécanique quantique. Pour un système quantique d'états  $|E_n\rangle$  à l'équilibre thermique avec un thermostat à température  $T$ , les probabilités de Boltzmann sont proportionnelles à  $e^{-\beta E_n}$ . En pareil cas, on définit l'opérateur densité (d'équilibre)  $\rho$  :

$$\rho(\beta) = e^{-\beta H} = \sum_n Z^{-1} e^{-\beta E_n} |E_n\rangle\langle E_n| \equiv \sum_n \rho_{nn} |E_n\rangle\langle E_n|, \quad Z = \sum_n e^{-\beta E_n}, \quad E_n \leq E_{n+1}; \quad (4.26)$$

sur la base des états propres du Hamiltonien du système,  $\rho$  est représenté par la matrice diagonale dont les éléments de matrice sont les probabilités de Boltzmann, ce qui justifie en retour l'expression formelle  $\rho = e^{-\beta H}$ . L'entropie statistique s'obtient comme :

$$S = -k_B T \sum_n \rho_{nn} \ln \rho_{nn} = -k_B T \text{Tr}(\rho \ln \rho), \quad (4.27)$$

et s'annule si  $\rho_{nn} = \delta_{nn_0}$ .

La limite température nulle de  $\rho$  est :

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \rho(\beta) = |E_1\rangle\langle E_1| \quad (4.28)$$

où  $|E_1\rangle$  est l'état fondamental ; dans cette limite,  $\rho$  est idempotent :

$$\rho^2(+\infty) = \rho(+\infty) \quad (4.29)$$

et on dit alors qu'il s'agit d'un *cas pur* (l'entropie est nulle dans tout cas pur, qu'il s'agisse du fondamental ou non). Au contraire, à toute température finie, on a :

$$\rho^2(\beta) \neq \rho(\beta) \quad (4.30)$$

et on parle alors de *cas mixte* ( $S > 0$ ). D'une façon générale, pour un cas pur, il existe un vecteur d'état  $|\Psi\rangle$  tel que :

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| \quad (\text{cas pur}) , \quad (4.31)$$

dont la donnée est strictement équivalente à celle de  $|\Psi\rangle$ . L'idempotence de  $\rho$  est évidente sur l'écriture (4.31).

Les considérations précédentes, énoncées à propos de l'équilibre thermodynamique, peuvent être étendues à une situation variable dans le temps. Décrire la dynamique passe de prime abord par l'écriture de l'équation fondamentale pour  $\rho(t)$  qui, en un sens, généralise au champ statistique l'équation de Schrödinger pour  $|\Psi(t)\rangle$ . Dans un contexte classique, le passage de la Mécanique à la Mécanique statistique s'opère par l'introduction de la fonction de densité  $\rho_{\text{cl}}$  qui donne la densité de probabilité dans l'espace des phases du système. La manipulation de l'équation fondamentale de la dynamique – ou ses variantes plus élaborées, les équations canoniques de Hamilton – fournit alors l'équation :

$$\frac{\partial \rho_{\text{cl}}}{\partial t} = \{H, \rho_{\text{cl}}\} , \quad (4.32)$$

où  $\{H, \rho_{\text{cl}}\}$  est le crochet de Poisson : c'est l'équation de Liouville. Comme toujours, la version quantique de l'équation classique s'obtient en remplaçant le crochet de Poisson par  $(i\hbar)^{-1}[\ , \ ]$ , et l'on obtient ainsi l'équation de Liouville quantique :

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho] . \quad (4.33)$$

C'est cette équation que l'on postule en Mécanique statistique quantique – tout comme on postule l'équation de Schrödinger  $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi$  ; quand  $H$  ne dépend pas du temps, son intégration formelle donne :

$$\rho(t) = e^{\frac{1}{i\hbar}Ht} \rho(0) e^{-\frac{1}{i\hbar}Ht} . \quad (4.34)$$

Si l'état de départ est un cas pur, alors il existe un  $|\Psi(t=0)\rangle$  tel que  $\rho(0) = |\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)|$  et alors :

$$\rho(t) = e^{\frac{1}{i\hbar}Ht} |\Psi(0)\rangle\langle\Psi(0)| e^{-\frac{1}{i\hbar}Ht} \equiv |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)| . \quad (4.35)$$

D'où le résultat important : un cas pur reste un cas pur tant que l'évolution se fait suivant l'équation de Schrödinger<sup>16</sup>. Aucune évolution hamiltonienne (unitaire) ne peut transformer un cas pur en cas mixte ou inversement – tant qu'il est question de l'opérateur densité total.

Par ailleurs, (4.34) montre que  $\rho(t)$  est un opérateur hermitique si  $\rho(t=0)$  l'est, et que la trace de  $\rho(t)$  est une constante du mouvement ; la convention habituelle de normalisation est  $\text{Tr } \rho = 1$  de sorte que finalement :

$$\text{Tr } \rho(t) = \text{Tr } \rho(0) = 1 . \quad (4.36)$$

Le sens physique de  $\rho(t)$  est le même que celui de l'opérateur d'équilibre. Sur la base propre du Hamiltonien,  $\{|E_n\rangle\}_n$ ,  $\rho(t)$  est représenté par une matrice (en général non-diagonale). Les éléments diagonaux  $\rho_{nn}$  sont les probabilités pour qu'une mesure effectuée à l'instant  $t$  donne la valeur  $E_n$  pour l'énergie :

$$\rho_{nn}(t) \equiv \langle E_n | \rho(t) | E_n \rangle = \text{Prob}[E = E_n, t] . \quad (4.37)$$

Autrement dit, les éléments diagonaux de  $\rho$  sont les *populations* (relatives) des différents états au sein de l'ensemble statistique<sup>17</sup>. De surcroît, on vérifie immédiatement que la valeur moyenne d'une observable  $A$  dans un cas pur est :

$$\langle A \rangle \equiv \langle \Psi(t) | A | \Psi(t) \rangle = \text{Tr} (A\rho(t)) . \quad (4.38)$$

La formule  $\langle A \rangle(t) = \text{Tr} (A\rho(t))$  reste vraie pour un cas mixte, compte tenu du sens physique des éléments diagonaux de  $\rho$  et de la propriété d'invariance de la trace.

En tant qu'opérateur représenté par une matrice,  $\rho$  possède aussi des éléments non-diagonaux, que Claude Cohen-Tannoudji a proposé d'appeler *cohérences*, puisqu'elles jouent un rôle essentiel dans les interférences quantiques. En effet, soit un cas pur construit avec l'état non-stationnaire<sup>18</sup> ( $E_n = \hbar\omega_n$ ) :

$$|\Psi(t)\rangle = c_1 e^{-i\omega_1 t} |E_1\rangle + c_2 e^{-i\omega_2 t} |E_2\rangle . \quad (4.39)$$

<sup>16</sup>On devine que, précisément, cette hypothèse exclut radicalement tout processus de mesure quantique.

<sup>17</sup>(4.36) ne traduit rien d'autre que la conservation de la somme des probabilités.

<sup>18</sup>On a choisi un système à deux niveaux pour la simplicité. Bien évidemment, tout se généralise à un nombre quelconque d'états.



L'opérateur densité correspondant est  $\rho(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$  soit, après distribution :

$$\rho(t) = |c_1|^2|E_1\rangle\langle E_1| + |c_2|^2|E_2\rangle\langle E_2| + c_1c_2^*e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}|E_1\rangle\langle E_2| + c_2c_1^*e^{-i(\omega_2-\omega_1)t}|E_2\rangle\langle E_1|, \quad (4.40)$$

ou, sous forme matricielle :

$$\rho(t) = \begin{bmatrix} |c_1|^2 & c_1c_2^*e^{-i(\omega_1-\omega_2)t} \\ c_2c_1^*e^{-i(\omega_2-\omega_1)t} & |c_2|^2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12}(t) \\ \rho_{21}(t) & \rho_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

Les cohérences  $\rho_{nm}(t)$ ,  $n \neq m$ , oscillent à la pulsation de Bohr, laquelle caractérise l'oscillation des valeurs moyennes d'une observable ne commutant pas avec le Hamiltonien. Elles représentent globalement la cohérence de phase entre les différentes composantes d'un état non-stationnaire. En outre, leur existence – et leur forme en *produit* de deux facteurs – est essentiellement liée à l'idempotence de  $\rho$ , c'est-à-dire à la propriété de  $\rho$  de représenter un cas pur.

L'équation de Liouville (4.33) engendre une évolution Hamiltonienne au sens où un cas pur le reste au cours du temps. La transition cas pur  $\rightarrow$  cas mixte peut s'opérer essentiellement de deux façons : soit en couplant explicitement le système quantique à un grand système (ayant un nombre infini de degrés de liberté à la limite thermodynamique), souvent appelé *réservoir*, et en intégrant sur les degrés de liberté de ce dernier (ce qui conduit à un opérateur densité *réduit*), soit en appliquant strictement le scénario de la mesure idéale telle que l'impose la Mécanique Quantique.

Quand on couple un système à un réservoir, le “petit” système reste l'objet principal d'étude et on admet même qu'il n'a aucune influence en retour sur la dynamique du réservoir. Il en résulte que seuls les degrés de liberté du système présentent un intérêt, ceux du réservoir étant connus (d'une façon ou d'une autre) une fois pour toutes. L'idée est donc d'écrire l'équation de Liouville pour le “supersystème”, puis de prendre la trace sur tous les degrés de liberté du réservoir. On obtient alors une équation pour l'opérateur densité réduit, laquelle (sauf exception) ne conserve pas le caractère pur au cours du temps<sup>19</sup>. Toute la difficulté est la modélisation astucieuse du réservoir et de son interaction avec le petit système, permettant au total de définir un modèle raisonnable physiquement et tractable techniquement (pour quelques exemples, voir [7]).

L'opérateur densité n'est pas seulement requis pour décrire une évolution statistique à partir d'une situation hors d'équilibre, il est aussi l'outil idéal pour la description de l'état juste avant et juste après une mesure, effectuée simultanément (et indépendamment) sur les (micro)systèmes d'un ensemble au sens statistique ;  $\rho$  est donc très bien adapté pour transcrire algébriquement l'inévitable processus de réduction du paquet d'ondes. En effet, la mesure à un instant  $t$  de l'énergie sur un ensemble décrit par  $\rho$  donne les différentes valeurs propres  $E_n$  avec des probabilités  $P_n$ , lesquelles sont précisément les éléments diagonaux  $\rho_{nn}$  de l'opérateur  $\rho$ , représenté sur la base propre de  $H$ . Juste après la mesure, une fraction  $|c_1|^2 \equiv P_1$  de systèmes se retrouve dans l'état  $|E_1\rangle$ , une fraction  $|c_2|^2 \equiv P_2 = 1 - P_1$  se retrouve dans  $|E_2\rangle$ . L'ensemble statistique est alors décrit par un opérateur densité que la mesure a rendu *diagonal* ; en d'autres termes, la réduction du paquet d'ondes se traduit par *l'annulation des cohérences* :

$$\rho_{\text{juste avant la mesure à l'instant } t} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12}(t) \\ \rho_{21}(t) & \rho_{22} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \rho_{11} & 0 \\ 0 & \rho_{22} \end{bmatrix} = \rho_{\text{juste après la mesure à l'instant } t}. \quad (4.42)$$

■

Retournons maintenant à l'effet Zénon observé pour l'atome à trois niveaux et à l'expérience de Cook. La dynamique s'effectue principalement dans le sous-espace ( $|g\rangle, |m\rangle$ ), la réduction effective du paquet d'ondes conduisant soit vers  $|m\rangle$ , soit vers  $|g\rangle$ , suivant l'instant auquel arrive le *pulse* optique dans le cycle de Rabi.

<sup>19</sup>Un phénomène analogue se produit déjà en Physique classique dans des cas très simples, même lorsque peu de degrés de liberté sont impliqués. La fonction de densité  $\rho(q, p, t)$  d'un système à un degré de liberté obéit à une équation réversible par renversement du temps, puisqu'elle n'est qu'une réécriture des équations de la Mécanique incorporant la conservation de la probabilité. Toutefois, la fonction réduite (marginale)  $\rho_q(q, t)$ , obtenue par intégration sur l'impulsion et donnant la densité probabilité de présence au point d'abscisse  $q$  quelle que soit l'impulsion, a une évolution irréversible en général. On pourra retenir l'idée suivante : prendre une trace partielle c'est perdre de l'information, une perte qui *peut* se traduire par une brisure de la symétrie de renversement du temps.

C'est aussi pour cette raison que, tout en restant strictement dans un cadre classique – et en excluant évidemment toute sensibilité aux conditions initiales –, il existe des systèmes très simples (une particule libre !) pour lesquels toute imprécision (inévitable !) sur les conditions initiales ruine toute prévision à long terme.

Le Hamiltonien  $H(t)$  de l'atome couplé (semi-classiquement) au champ RF est ainsi représenté par une matrice  $2 \times 2$ , que l'on peut toujours prendre de trace nulle en choisissant le zéro d'énergie au milieu des énergies  $E_g$  et  $E_m$ . En désignant toujours par  $\hbar\omega_0$  la différence  $E_m - E_g$ , par  $\omega$  la pulsation du champ RF, la matrice de  $H(t)$  sur la base ordonnée  $(|m\rangle, |g\rangle)$  est de la forme :

$$H(t) = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \omega_0 & \Omega e^{-i\omega t} \\ \Omega e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{bmatrix} . \quad (4.43)$$

Dans le cas d'un système à deux niveaux, on peut toujours représenter les matrices de trace nulle en combinaison linéaire des trois matrices de Pauli<sup>20</sup> définissant l'opérateur vectoriel  $\vec{\sigma}$  :

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} , \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \quad (4.44)$$

C'est ainsi que, s'agissant de  $H$ , on peut écrire :

$$H(t) = \frac{\hbar}{2} \vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{\sigma} , \quad (4.45)$$

où  $\vec{\mathcal{H}}$  a pour composantes les quantités  $\hbar^{-1} \text{Tr}(H\sigma_u)$ , ici égales à :

$$\vec{\mathcal{H}} = (\Omega \cos \omega t, \Omega \sin \omega t, \omega_0) . \quad (4.46)$$

Pour un système à deux niveaux, l'opérateur densité est aussi (représenté par) une matrice  $2 \times 2$ , d'éléments  $\rho_{gg}$ ,  $\rho_{mm}$ ,  $\rho_{mg}$  et  $\rho_{gm}$ , matrice hermitique si la base est orthonormée (ce qui est le cas). Comme de plus la trace de  $\rho$  est égale à 1, sa matrice possède au total trois degrés de liberté réels. Il existe de ce fait une représentation vectorielle<sup>21</sup> commode de  $\rho$  à l'aide d'un vecteur  $\vec{R}$  de  $\mathbb{R}^3$ , dont les trois composantes réelles sont traditionnellement définies comme :

$$R_x = \rho_{gm} + \rho_{mg} , \quad R_y = i(\rho_{mg} - \rho_{gm}) , \quad R_z = \rho_{mm} - \rho_{gg} . \quad (4.47)$$

Les cohérences de  $\rho(t)$  sont donc associées aux composantes transverses  $R_x$  et  $R_y$ , alors que les populations sont contenues dans la composante longitudinale  $R_z$ . On vérifie sans peine que la relation précise entre  $\rho$  et  $\vec{R}$  est<sup>22</sup> :

$$\rho = \frac{1}{2} (\mathbf{1} + \vec{R} \cdot \vec{\sigma}) , \quad R_u = \text{Tr}(\rho \sigma_u) ; \quad (4.48)$$

en particulier, on a :

$$\rho_{mm} = \frac{1}{2}(1 + R_z) , \quad \rho_{gg} = \frac{1}{2}(1 - R_z) . \quad (4.49)$$

Avec cette paramétrisation, l'équation de Liouville (4.33) pour  $\rho$  s'écrit :

$$i\hbar \frac{d\rho}{dt} = \frac{\hbar}{4} [\vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{\sigma}, \vec{R} \cdot \vec{\sigma}] , \quad (4.50)$$

et, après calcul<sup>23</sup>, prend la forme gyroscopique :

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\mathcal{H}}(t) \times \vec{R} . \quad (4.51)$$

En passant dans le repère  $Ox'y'z$  tournant à  $\omega t$  autour de  $Oz$ , c'est-à-dire en posant<sup>24</sup> :

$$\rho'(t) = U^\dagger(t) \rho(t) U(t) , \quad U(t) = e^{-i \frac{\omega t}{2} \sigma_z} , \quad (4.52)$$

<sup>20</sup>Pour des raisons évidentes, cette façon d'écrire s'appelle parfois *représentation en spin fictif*.

<sup>21</sup>Souvent appelée *représentation de Bloch*. Pour un état pur,  $\vec{R}$  est unitaire d'où la notion de *sphère de Bloch* : en pareil cas, l'évolution de  $\rho(t)$  se traduit par un mouvement de l'extrémité de  $\vec{R}(t)$  sur la sphère unité.

<sup>22</sup>Si  $\rho$  dépend du temps, il en va de même du vecteur  $\vec{R}$ .

<sup>23</sup>On utilise au passage :  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} \mathbf{1} + i\vec{\sigma} (\vec{A} \times \vec{B})$ , relation vraie pour des opérateurs tels que  $[A_u, \sigma_{u'}] = [B_v, \sigma_{v'}] = 0$ .

<sup>24</sup> $U(t)$  est bien la rotation d'angle  $\omega t$  autour de  $Oz$ , qui ne change pas la composante  $R_z$  :  $R'_z = R_z$ .

on obtient pour  $\vec{R}'$  associé à  $\rho'$  :

$$\frac{d\vec{R}'}{dt} = \vec{\mathcal{H}}' \times \vec{R}' , \quad \vec{\mathcal{H}}' = (\Omega, 0, \omega_0 - \omega) ; \quad (4.53)$$

le point important techniquement est que, maintenant,  $\vec{\mathcal{H}}'$  est indépendant du temps ; de ce fait l'intégration de (4.53) est immédiate. À la résonance stricte ( $\omega = \omega_0$ ),  $\vec{R}'$  précesse autour de  $Ox'$  à la pulsation  $\Omega$  ; si à l'instant  $t = 0$ , l'ion est dans le fondamental  $|g\rangle$ , alors  $\vec{R}' = (0, 0, -1)$  – et en l'absence de toute autre excitation – se retrouve<sup>25</sup> dans l'état  $|m\rangle$  au temps  $T = \frac{\pi}{\Omega}$ , et alors  $\vec{R}' = (0, 0, +1)$  : c'est bien parce que le vecteur  $\vec{R}'$  a fait un demi-tour que l'on parle de  $\pi$ -pulse (pour le champ RF). À un instant quelconque,  $\vec{R}'$  est quelque part dans le plan  $y'Oz$  du repère tournant, les deux populations sont différentes de zéro, tout comme les cohérences : c'est l'oscillation de Rabi.

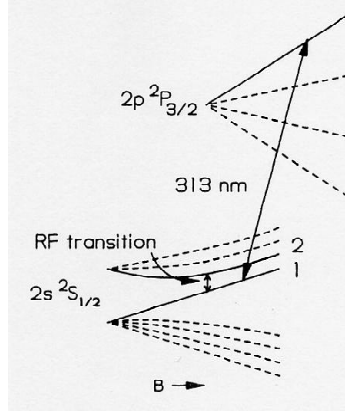


Figure 4.3: Diagramme des niveaux d'énergie de l'ion  $Be^+$  dans un champ magnétique  $B$  (figure extraite de [6]).

Introduisons maintenant le train régulier de *pulses*, comme dans l'expérience d'Itano *et al.*, chacun d'entre eux jouant le rôle d'une opération de mesure et survenant à des instants  $t_n$  calés sur la période  $T$ ,  $t_n = n \frac{T}{N}$ . Juste *avant* la première mesure, survenant à  $t_1 = \frac{T}{N} = \frac{\pi}{N\Omega}$ , on a :

$$\vec{R}'(t = \frac{\pi}{N\Omega}) = (0, \sin \Omega t, -\cos \Omega t)_{t=\frac{\pi}{N\Omega}} = (0, \sin \frac{\pi}{N}, -\cos \frac{\pi}{N}) . \quad (4.54)$$

Survient alors le premier *pulse* optique ; traité comme une mesure idéale, il projette l'ion soit dans l'état  $|m\rangle$ , soit dans l'état de  $|g\rangle$ . Sur un ensemble d'ions représentés par l'opérateur densité, l'effet est d'annuler les éléments non-diagonaux (cohérences, composantes  $R_x$  et  $R_y$ , combinaisons linéaires de  $R'_x$  et  $R'_y$ ) et de laisser intacts les éléments diagonaux (populations, composante  $R_z = R'_z$ ). À l'issue du 1<sup>er</sup> *pulse* optique, l'opérateur densité est donc associé au vecteur :

$$\vec{R}'(t = \frac{\pi}{N\Omega} + 0) = (0, 0, -\cos \frac{\pi}{N}) . \quad (4.55)$$

Au total, après la première opération de mesure effectuée par le premier *pulse* optique,  $\vec{R}'$  se retrouve dans la direction de départ mais a une longueur contractée d'un facteur  $\cos \frac{\pi}{N}$ . Chaque *pulse* successif donne lieu à une telle contraction : en vertu de la linéarité de l'équation gyroscopique (4.53), au bout de  $N$  mesures, le vecteur  $\vec{R}'$  pointe dans la même direction qu'au départ, mais sa longueur est réduite d'un facteur  $(\cos \frac{\pi}{N})^N$ . Ainsi, à l'issue de la  $N^{\text{ème}}$  mesure, on a :

$$\vec{R}'(t = T + 0) = (0, 0, -\cos^N \frac{\pi}{N}) . \quad (4.56)$$

Compte tenu de (4.47) et de  $R'_z = R_z$ , la probabilité pour un ion d'être dans  $|m\rangle$  à  $T + 0$  est donc :

$$P_m(T + 0) \equiv \rho_{mm}(T + 0) = \frac{1}{2} [1 + R_z(T + 0)] = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos^N \frac{\pi}{N} \right) . \quad (4.57)$$

<sup>25</sup>En moyenne ! Toute mesure révèle qu'un ion donné est à tout instant *soit* en  $|g\rangle$ , *soit* en  $|m\rangle$ .

En développant le cosinus dans l'hypothèse  $N \gg 1$ , on a :

$$P_m(T+0) \simeq \frac{1}{2} \left[ 1 - e^{+N \ln(1 - \frac{\pi^2}{2N^2})} \right] \simeq \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-\frac{\pi^2}{2N}} \right) \simeq \frac{\pi^2}{4N} \ll 1 . \quad (4.58)$$

En l'absence de mesures répétées, on trouverait  $P_m(T+0) = 1$ , puisqu'il s'agit d'un  $\pi$ -pulse : (4.58) montre que la succession des mesures très rapprochées ruine la possibilité pour l'ion de filer dans l'état  $|m\rangle$  (plus précisément : d'y être trouvé). Inversement, la probabilité d'être toujours dans l'état de départ  $|g\rangle$  est  $P_g(T+0) \simeq 1 - \frac{\pi^2}{4N} \sim 1$  : au total, le train de mesures successives empêche l'ion d'évoluer.

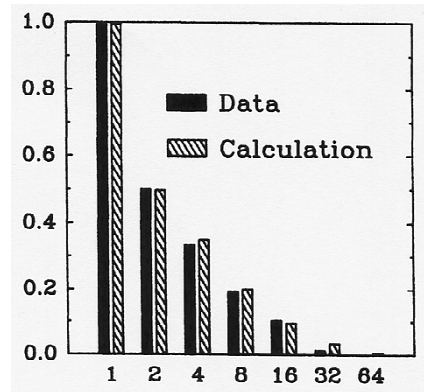


Figure 4.4: Variation de la probabilité d'être en  $|m\rangle$  en fonction du nombre  $N$  de pulses (figure extraite de [6]).

La décroissance de  $P_m$  avec le nombre de mesures (voir fig. 4.4) décrit quantitativement l'effet Zenon, et se trouve en plein accord avec les mesures de Itano *et al*, constituant ainsi la mise en évidence expérimentale de cet effet (voir [6] pour plus de détails).

## 4.2 Sauts quantiques

La notion de saut quantique remonte à la préhistoire de la Mécanique Quantique. À la suite de l'introduction du photon par Einstein (effet photo-électrique, 1905), Bohr suggéra en 1913 que l'interaction entre un atome et le rayonnement procède par absorption ou émission de photons, l'électron atomique effectuant des sauts d'une orbite à une autre. À titre d'exemple, le processus d'émission suit la règle des fréquences de Bohr, qui n'est rien d'autre que l'expression de la conservation de l'énergie<sup>26</sup> :

$$E_i = E_f + h\nu . \quad (4.59)$$

$E_i$  et  $E_f$  sont les énergies initiale et finale de l'atome,  $\nu$  est la fréquence du photon reçu par le milieu extérieur à l'atome. En passant de l'état  $i$  à l'état  $f$ , l'atome effectue une transition, que l'on peut convenir d'appeler "saut quantique" ("*Quantum jumps*").

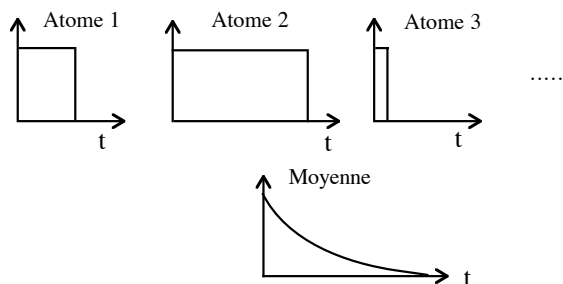
Pendant des décennies, ce mécanisme primaire a été inobservable en tant que tel. En effet, une raie d'émission étant choisie pour un atome donné, son observation s'est faite usuellement sur une vapeur atomique contenant un très grand nombre d'atomes<sup>27</sup>. De ce fait, les transitions individuelles, noyées dans la masse et survenant à des instants aléatoires décorrélés, construisent au total une intensité de fluorescence macroscopique dont les fluctuations sont imperceptibles au point de confondre l'intensité aléatoire avec sa valeur *moyenne* (voir fig. 4.5). La mesure de cette intensité dans une vapeur où une fraction notable d'atomes est portée à l'état

<sup>26</sup>On suppose que l'atome est infiniment massif. Dans le cas contraire, il faut prendre en compte l'énergie de recul de l'atome.

<sup>27</sup>En 1952, Schrödinger écrivait :

"... we never experiment with just one electron or atom. In thought experiments we sometimes assume we do ; this invariably entails ridiculous consequences."

(cité en [8]).

Figure 4.5: Émissions individuelles *vs* intensité moyenne de fluorescence.

excité révèle un déclin essentiellement exponentiel, permettant de définir un temps caractéristique  $\tau_e = \Gamma_e^{-1}$  ;  $\tau_e$  n'est autre que la durée de vie *moyenne* d'un atome à l'état excité. En réalité, certains atomes se désexcitent bien avant  $\tau_e$ , d'autres bien après et c'est seulement quand on fait la moyenne des temps de mort individuels que l'on retrouve la durée de vie moyenne<sup>28</sup>. Pour espérer voir les sauts quantiques, il faut donc travailler avec un petit nombre de sources (atomes, ions), mais encore faut-il que le signal attestant de la présence d'un atome dans un état ou un autre soit assez intense pour pouvoir être observé et mesuré.

Assez récemment (au début des années 80), il est devenu possible de piéger quelques ions et de les refroidir à l'aide de lasers, de façon à les observer dans des conditions quasi-idéales. C'est alors qu'une proposition d'expérience de double résonance optique due à Dehmelt [9] a pu être mise en œuvre ; en essence, l'idée est la suivante.

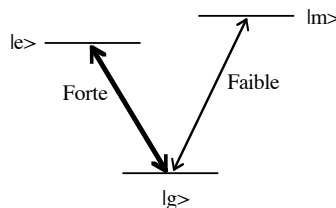


Figure 4.6: Atome à trois niveaux pour l'expérience de double résonance optique.

On considère un atome à trois niveaux, comme celui introduit dans la section 4.1 (voir figure 4.6). Les deux niveaux  $|m\rangle$  et  $|e\rangle$  sont supposés avoir des énergies voisines, les deux différences  $E_m - E_g$  et  $E_e - E_g$  sont dans le domaine optique ou UV – ce qui distingue l'état métastable considéré ici, de l'état métastable utilisé<sup>29</sup> pour l'effet Zenon (section 4.1). Typiquement, la durée de vie de  $|e\rangle$  est de l'ordre de  $10^{-8}$  s, celle de  $|m\rangle$  est de l'ordre de la seconde. Ces deux ordres de grandeurs, très différents, indiquent que les probabilités des transitions sont elles-mêmes très différentes : la transition  $|g\rangle \leftrightarrow |m\rangle$  est très rare, comparée à  $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ . Par ailleurs, l'atome est soumis à deux lasers ; le premier, très intense, sature la transition  $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ , tandis que le second est calé sur la transition rare  $|g\rangle \leftrightarrow |m\rangle$ .

Si l'état de l'ion est le fondamental  $|g\rangle$  ou l'état excité  $|e\rangle$ , le laser intense induit un mouvement de

<sup>28</sup>Il en va exactement de même pour la décroissance radioactive. Au début (beaucoup de noyaux actifs), l'énormité du nombre de noyaux présents dans une source macroscopique engendre un déclin exponentiel ne présentant aucune anomalie, aucune marche n'étant visible à la sensibilité affichée (pendant l'intervalle élémentaire de comptage,  $\delta t$ , il se produit un nombre faramineux de désintégrations) ; pendant cette première phase, il est licite de confondre la valeur de la variable aléatoire  $N$  (nombre de noyaux actifs à l'instant considéré, observée) avec sa valeur *moyenne*. Au contraire, au bout d'un temps très long devant la période radioactive, des fluctuations toujours présentes deviennent visibles (puisque'il reste alors un petit nombre de noyaux encore excités) et l'exponentielle, mesurée pour une source donnée, devient "bruitée". Analysant le déclin radioactif comme il doit l'être (un processus *aléatoire*), on trouve d'ailleurs que les fluctuations relatives  $\frac{\Delta N}{\langle N \rangle}$  *divergent* quand  $t \rightarrow +\infty$ .

<sup>29</sup>En particulier, l'aller-retour entre  $|g\rangle$  et  $|m\rangle$  n'est pas une oscillation de Rabi : c'est simplement le mécanisme ordinaire d'absorption et d'émission (essentiellement spontanée) entre deux états couplés par un champ électromagnétique. Dans le domaine des micro-ondes, l'émission induite l'emporte sur l'émission spontanée, c'est le contraire dans le domaine optique ou UV. Cette règle générale possède des exceptions : même dans le domaine optique, l'émission spontanée peut être faible en comparaison de l'émission induite pourvu que l'on utilise un laser très intense (alors, on peut avoir  $A \ll BW$ , dans les notations introduites peu après).

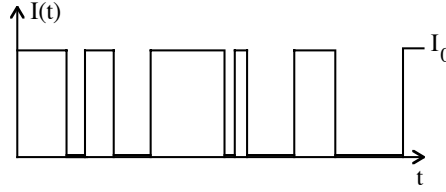


Figure 4.7: Fluorescence intermittente d'un atome unique.

va-et-vient rapide entre ces deux états ; cette “oscillation” est rapide puisque la transition est permise et que la durée de vie de  $|e\rangle$  est courte ; elle produit une fluorescence intense, facilement observable. Cependant, l'autre laser peut à un certain instant porter l'atome à l'état  $|m\rangle$  ; il faut du temps pour cela, puisque la transition est rare – mais elle finit bien par se produire. Dès lors, la fluorescence s'arrête et reste “noire” tant que l'atome n'est pas redescendu en  $|g\rangle$  à partir de  $|m\rangle$ . Quand ceci se produit, la fluorescence recommence, et ainsi de suite. Au total, dans l'expérience proposée par Dehmelt, on doit assister à une fluorescence intermittente<sup>30</sup> illustrée schématiquement sur la figure 4.7. Par ailleurs, on peut affirmer que quand la fluorescence est absente, l'ion est dans l'état  $|m\rangle$  et que quand elle se produit, il est dans le sous-espace (secteur)  $(|g\rangle, |e\rangle)$ . En un sens, l'intermittence de la fluorescence est une succession de réductions de paquets d'ondes, ou, dit autrement, l'observation de l'état de fluorescence constitue une observation directe des sauts quantiques<sup>31</sup> impliquant l'état  $|m\rangle$  : l'extinction de la fluorescence signifie que l'ion vient d'arriver en  $|m\rangle$ , sa réapparition que l'ion vient de regagner le secteur  $(|g\rangle, |e\rangle)$ .

Le premier traitement théorique a été donné par Cook et Kimble [10] et repose sur des équations *cinétiques* pour les populations des états atomiques, qui ne sont autres que des équations de bilan. En introduisant les coefficients d'Einstein  $A_a$  et  $B_{bc}$ , et les densités spectrales  $W_i$  des lasers, ces équations s'écrivent :

$$\dot{P}_g = -(B_{eg}W_1 + B_{mg}W_2)P_g + (A_e + B_{eg}W_1)P_e + (A_m + B_{mg}W_2)P_m, \quad (4.60)$$

$$\dot{P}_e = -(A_e + B_{eg}W_1)P_e + B_{eg}W_1P_g, \quad (4.61)$$

$$\dot{P}_m = -(A_m + B_{mg}W_2)P_m + B_{mg}W_2P_g, \quad (4.62)$$

ce que l'on peut traduire matriciellement :

$$|\dot{P}\rangle = -\mathbf{\Gamma}|P\rangle. \quad (4.63)$$

On vérifie que  $\sum \dot{P}_a = 0$ , relation qui exprime la conservation de la somme  $P_g + P_e + P_m = 1$  (la somme des éléments d'une colonne de  $\mathbf{\Gamma}$  est nulle, d'où une valeur propre nulle pour  $\mathbf{\Gamma}$ ) ; par hypothèse,  $A_m \ll A_e$ . Le système (4.60) - (4.63) a une solution d'équilibre  $|P^{eq}\rangle$  obtenue en annulant tous les premiers membres ; on trouve ainsi<sup>32</sup>, l'émission spontanée :

$$\frac{P_e^{eq}}{P_g^{eq}} = \frac{B_{eg}W_1}{A_e + B_{eg}W_1}, \quad \frac{P_m^{eq}}{P_g^{eq}} = \frac{B_{mg}W_2}{A_m + B_{mg}W_2}; \quad (4.64)$$

si on peut négliger le terme d'émission spontanée dans chaque dénominateur, les populations d'équilibre sont égales entre elles et valent chacune  $\frac{1}{3}$ . Cette situation est atteinte longtemps après la plus longue échelle de temps, usuellement  $A_m^{-1}$ , qui est gigantesque par rapport à toutes les autres.

Avec  $W_2$  strictement nul (deuxième laser coupé) et  $P_g(t=0) = 1$ , on obtient la quasi-égalité<sup>33</sup> des deux probabilités  $P_g$  et  $P_e$  ( $P_g \simeq P_e = \frac{1}{2}$ ) après un temps de l'ordre de  $(A_e + 2B_{eg}W_1)^{-1}$  : on dit alors que

<sup>30</sup>La transition faible survient à des instants aléatoires ; si ces derniers sont décorrélés, ce processus aléatoire binaire (prenant deux valeurs) est connu sous le nom de processus des télégraphistes. Le mot *intermittence* n'est pas à prendre dans une acception récente qui qualifie la dynamique “par bouffées” de certains systèmes chaotiques.

<sup>31</sup>Le signal observé est la fluorescence induite par le premier laser, dont la puissance spectrale détermine l'intensité de la fluorescence ; la question n'est pas de pouvoir observer le *photon unique* émis lors de la transition  $|m\rangle \rightarrow |g\rangle$ .

<sup>32</sup>Les expressions (4.64) montrent bien la nécessité de l'émission spontanée pour obtenir des populations décroissant quand l'énergie croît. Dans un tout autre contexte (équilibre thermodynamique du rayonnement en présence d'un peu de matière), c'est bien l'émission spontanée qui permet de retrouver les probabilités de Boltzmann  $P_E = C e^{-\beta E}$ , décroissantes avec l'énergie.

<sup>33</sup>Ceci provient de  $A_e \ll B_{eg}W_1$ , réalisable avec un  $W_1$  suffisamment grand. Quand  $W_2 = 0$  et avec  $P_g(t=0) = 1$ , la solution exacte de (4.60) - (4.61) est  $P_g(t) = \frac{1}{A_e + 2B_{eg}W_1}(A_e + B_{eg}W_1 - B_{eg}W_1 e^{-(A_e + 2B_{eg}W_1)t})$ ,  $P_e(t) = 1 - P_g(t)$ .

la transition (forte)  $e \leftrightarrow g$  est *saturée*. Avec  $W_2$  non nul (mais  $B_{mg}W_2 \ll B_{eg}W_1$ ) la transition forte reste saturée<sup>34</sup> – ce que l'on obtient quand  $W_1$  est très grand (assurant que  $A_e \ll B_{eg}W_1$ ) – les populations  $P_e$  et  $P_g$  sont à peu près égales<sup>35</sup> ; on se retrouve de fait avec une sorte de système à deux niveaux : l'atome est soit dans le secteur ( $|g\rangle, |e\rangle$ ) avec des populations égales, soit dans l'état  $|m\rangle$  ; il suffit dès lors de déterminer les deux populations  $\mathcal{P}_\pm$  :

$$\mathcal{P}_+ = \mathcal{P}_m \quad \mathcal{P}_- = \mathcal{P}_g + \mathcal{P}_e , \quad (4.65)$$

sachant que, dans ce régime, on a :

$$P_g \simeq P_e \simeq \frac{1}{2}\mathcal{P}_- . \quad (4.66)$$

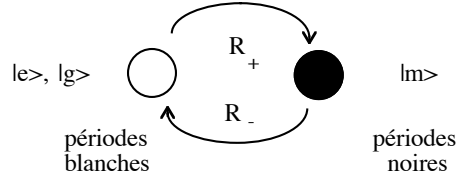


Figure 4.8:  $R_+$  éteint la fluorescence,  $R_-$  la rallume.

En reportant les nouvelles variables  $\mathcal{P}_\pm$  dans (4.62), il vient compte tenu de (4.66) :

$$\dot{\mathcal{P}}_+ = -(A_m + B_{mg}W_2)\mathcal{P}_+ + \frac{1}{2}B_{mg}W_2\mathcal{P}_- , \quad (4.67)$$

soit :

$$\dot{\mathcal{P}}_+ = -R_-\mathcal{P}_+ + R_+\mathcal{P}_- , \quad (4.68)$$

où  $R_+ = \frac{1}{2}B_{mg}W_2$ ,  $R_- = A_m + B_{mg}W_2$ . Comme  $\mathcal{P}_+ + \mathcal{P}_- = 1$ , on en déduit :

$$\dot{\mathcal{P}}_- = -R_+\mathcal{P}_- + R_-\mathcal{P}_+ . \quad (4.69)$$

L'inspection de ces équations révèle que  $R_-$  allume la fluorescence, alors que  $R_+$  l'éteint (voir fig. 4.8).

L'état d'équilibre des équations (4.68) et (4.69) est :

$$\mathcal{P}_{+eq} = \frac{R_+}{R_+ + R_-} \quad \mathcal{P}_{-eq} = \frac{R_-}{R_+ + R_-} . \quad (4.70)$$

Ces probabilités donnent la *moyenne* temporelle du signal de fluorescence, une fois les transitoires éteints ; si  $I_0$  désigne l'intensité (constante) d'une période allumée (blanche) :

$$\bar{I} = \mathcal{P}_{+eq} \times 0 + \mathcal{P}_{-eq} \times I_0 = I_0\mathcal{P}_{-eq} = \frac{R_-}{R_+ + R_-} I_0 \quad (4.71)$$

En revanche, les probabilités stationnaires (4.70) ne disent évidemment rien sur les *fluctuations* de ce signal. Celles-ci ne peuvent être obtenues que comme sous-produits d'une description plus fine du processus stochastique, que l'on suppose stationnaire (toutes les probabilités à deux temps ne dépendent que de la différence des temps, toutes les probabilités à un temps sont indépendantes du temps).

Désignons par  $P_{n\pm}(t)$  la probabilité qu'il y ait entre les instants  $t_0$  et  $t_0 + t$ ,  $n$  transitions d'un secteur à l'autre et que l'état final (à l'instant  $t$ ) soit  $\pm$  ; par construction, les valeurs de ces probabilités à  $t = 0$  sont 0 et 1, suivant l'état à  $t = 0$  (aucune transition ne peut se produire sur un intervalle de temps nul). Par l'hypothèse

<sup>34</sup>Les deux populations  $P_g$  et  $P_e$  sont presque égales, mais différent de  $\frac{1}{2}$ . Sur une échelle de temps courte par rapport à  $(B_{mg}W_2)^{-1}$ , tout se passe comme si le niveau métastable était absent et ces deux populations valent à peu près  $\frac{1}{2}$ . En revanche, aux temps longs, bien après que le niveau  $|m\rangle$  a eu le temps de jouer son rôle et toujours dans l'hypothèse où la transition forte reste saturée, toutes les populations tendent vers  $\frac{1}{3}$  quand l'état  $|m\rangle$  a une très longue durée de vie (pour la discussion détaillée, voir [8]). En définitive, avec les hypothèses en vigueur, le système se comporte d'abord comme un atome à deux niveaux, puis comme un atome à trois niveaux.

<sup>35</sup>Ce que confirme la résolution du système ((4.60) - (4.62)) dans ce régime de saturation.

de stationnarité (invariance par translation dans le temps, indifférence de l'instant appelé  $t_0$ ), ces probabilités ne dépendent que de  $t$ . Pour obtenir leur équation d'évolution, il suffit de faire un bilan classique de probabilité entre deux instants très proches  $t$  et  $t + \Delta t$ , et de prendre la limite  $\Delta t \rightarrow 0$ . Par exemple, entre  $t$  et  $t + \Delta t$ ,  $P_{n+}$  peut, par un seul *flip* au plus, évoluer de deux façons :

1. il ne se passe rien, probabilité  $1 - R_- \Delta t$
2. il y a eu  $n - 1$  transitions jusqu'à  $t$ , qui ont conduit le système dans l'état  $-$  et l'une se produit entre  $t$  et  $t + \Delta t$ , probabilité  $R_+ \Delta t$

Évidemment, bien d'autres processus sont possibles, mais comme ils impliquent plus d'un *flip*, leurs probabilités sont de ce fait en  $\Delta t^{k \geq 2}$  : ils ne contribuent donc pas, dans la limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , à l'histoire de  $P_{n+}$  entre  $t$  et  $t + \Delta t$ . Au total, pour  $P_{n+}$ , le bilan de probabilité s'exprime comme :

$$P_{n+}(t + \Delta t) = (1 - R_- \Delta t)P_{n+}(t) + R_+ \Delta t P_{n-1-}(t) + \mathcal{O}(\Delta t^{k \geq 2}) ; \quad (4.72)$$

de même, pour  $P_{n-}$ , on obtient :

$$P_{n-}(t + \Delta t) = (1 - R_+ \Delta t)P_{n-}(t) + R_- \Delta t P_{n-1+}(t) + \mathcal{O}(\Delta t^{k \geq 2}) . \quad (4.73)$$

Dans la limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , ces équations deviennent ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) :

$$\dot{P}_{n+}(t) = -R_- P_{n+} + R_+ P_{n-1-} , \quad (4.74)$$

$$\dot{P}_{n-}(t) = -R_+ P_{n-} + R_- P_{n-1+} . \quad (4.75)$$

En particulier, comme  $P_{-1\pm} = 0$  :

$$\dot{P}_{0\pm}(t) = -R_{\mp} P_{0\pm}(t) \iff P_{0\pm}(t) = C e^{-R_{\mp} t} . \quad (4.76)$$

Supposons que le signal de fluorescence s'éteigne à l'instant  $t_0$  ; ceci signifie que l'atome vient d'arriver dans l'état métastable ; la probabilité qu'il n'y ait eu aucune transition entre  $t = t_0$  et  $t = t_0$  et que l'atome soit dans l'état  $+$  est donc égale à 1, d'où  $P_{0+}(0) = 1$  et :

$$P_{0+}(t) = e^{-R_- t} . \quad (4.77)$$

Ce dernier résultat peut d'ailleurs se retrouver immédiatement comme suit.  $P_{0+}(t)$  est finalement la probabilité pour que le système étant parti de  $|+\rangle$  ( $= |m\rangle$ ) à l'instant zéro, soit en  $t$  dans le même état *sans avoir jamais transité*, autrement dit la probabilité pour que l'atome ait été en permanence dans  $|+\rangle$  entre 0 et  $t$ . La probabilité de transition par unité de temps pour le passage  $|m\rangle \rightarrow |g\rangle$  est  $R_-$  ; on peut donc écrire de façon évidente :

$$P_{0+}(t + \Delta t) = (1 - R_- \Delta t)P_{0+}(t) + \mathcal{O}(\Delta t^{k \geq 2}) , \quad (4.78)$$

d'où l'on déduit par passage à la limite :

$$\dot{P}_{0+}(t) = -R_- P_{0+}(t) \iff P_{0+}(t) = e^{-R_- t} . \quad (4.79)$$

Cette expression donne donc la probabilité pour que le signal de fluorescence soit encore éteint à l'instant  $t + t_0$  quand il l'était à  $t = t_0$  – quel que soit l'instant  $t_0$  puisque l'on est en régime permanent – sans s'être jamais allumé dans l'intervalle ; évidemment, plus le temps passe, plus cette probabilité est petite. Si  $T$  désigne la variable aléatoire : durée de la période noire, on a donc :

$$\text{Prob}[ T > t ] = e^{-R_- t} . \quad (4.80)$$

De cette fonction de répartition, on déduit la densité de probabilité de la durée des périodes noires :

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \text{Prob}[ t < T < t + \delta t ] = R_- e^{-R_- t} . \quad (4.81)$$



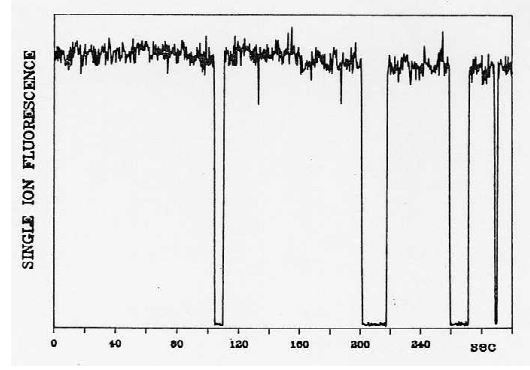


Figure 4.9: Signal de fluorescence intermittente d'un ion  $Ba^+$  (figure extraite de [12]).

Les temps de résidence dans l'état métastable<sup>36</sup> sont donc théoriquement distribués suivant une loi exponentielle, qui est bien vérifiée expérimentalement [11] moyennant quelques corrections venant affiner après coup le modèle théorique de Cook et Kimble. La connaissance de la loi (4.81) permet notamment d'obtenir la durée moyenne des périodes sans signal :

$$\langle T \rangle = \int_0^{+\infty} dt t R_- e^{-R_- t} = \frac{1}{R_-} . \quad (4.82)$$

Des arguments analogues montrent que la durée des périodes "blanches" est distribuée selon la densité  $R_+ e^{-R_+ t}$  et que sa moyenne est  $\frac{1}{R_+}$ . La durée des périodes noires est donc distribuée selon une loi exponentielle donnée par (4.81), à nouveau assez bien vérifié expérimentalement [11].

Il est également possible de calculer (et de mesurer) la fonction d'autocorrélation (centrée) de l'intensité, qui donne des renseignements plus fins sur le processus aléatoire. Elle est définie comme :

$$C(t) = \langle I(t_0)I(t_0+t) \rangle - \langle I(t_0) \rangle \langle I(t_0+t) \rangle = \langle I(t_0)I(t_0+t) \rangle - I_0^2 ; \quad (4.83)$$

comme la variable aléatoire  $I$  vaut 0 ou  $I_0$ , le produit  $I(t)I(t')$  peut prendre deux valeurs, 0 ou  $I_0^2$  – cette dernière valeur étant obtenue si le signal existe à l'instant  $t$  et à l'instant  $t'$ . L'espérance mathématique du produit contient donc un seul terme :

$$\langle I(t)I(t') \rangle = I_0^2 P_{\text{on on}}(t, t') ; \quad (4.84)$$

où  $P_{\text{on on}}(t, t')$  est la probabilité pour que le signal soit "on" à l'instant  $t$  et à l'instant  $t'$ . Grâce à la stationnarité, il suffit de trouver  $P_{\text{on on}}(t_0, t_0+t) \equiv P_{\text{on on}}(t)$ , probabilité pour que l'on soit dans une période blanche à l'instant  $t_0$  et à l'instant  $t_0+t$ , quel que soit le nombre de transitions intervenues entre  $t_0$  et  $t_0+t$  (on peut donc définitivement poser  $t_0 = 0$ ).

Pour trouver cette probabilité, il suffit de faire à nouveau le bilan des probabilités entre  $t$  et  $t + \Delta t$ . C'est  $R_+$  qui éteint la fluorescence, donc  $1 - R_+ \Delta t$  donne la probabilité la fluorescence reste allumée  $\Delta t$  plus tard. Il y a un autre terme dans le bilan, introduisant la probabilité  $P_{\text{on off}}$  pour que le système soit "on" à  $t$  et "off" à 0. En effet, *via*  $R_-$  – qui allume la fluorescence – il y a un autre chemin contribuant à  $P_{\text{on on}}(t)$  : c'est celui où le système est allumé en 0, éteint à  $t$  et bascule entre  $t$  et  $t + \Delta t$ . Le bilan est donc :

$$P_{\text{on on}}(t + \Delta t) = (1 - R_+ \Delta t) P_{\text{on on}}(t) + R_- \Delta t P_{\text{on off}}(t) . \quad (4.85)$$

Il faut donc aussi connaître  $P_{\text{on off}}(t)$  ; des arguments analogues montrent que cette probabilité satisfait :

$$P_{\text{on off}}(t + \Delta t) = (1 - R_- \Delta t) P_{\text{on off}}(t) + R_+ \Delta t P_{\text{on on}}(t) . \quad (4.86)$$

Dans la limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , on obtient :

$$\dot{P}_{\text{on on}}(t) = -R_+ P_{\text{on on}} + R_- P_{\text{on off}} , \quad (4.87)$$

<sup>36</sup>On appelle *shelving* le phénomène de piégeage dans cet état.

$$\dot{P}_{\text{on off}}(t) = -R_- P_{\text{on off}} + R_+ P_{\text{on on}} . \quad (4.88)$$

Lorsque le processus a atteint sa phase stationnaire<sup>37</sup>,  $P_{\text{on on}}(t=0) = \mathcal{P}_{\text{-eq}} = \frac{R_-}{R_+ + R_-}$ , d'après (4.70) ; par ailleurs,  $P_{\text{on off}}(t=0) = 0$ . La solution du système (4.87, 4.88) avec ces conditions initiales est :

$$P_{\text{on on}}(t) = \frac{R_-^2}{(R_+ + R_-)^2} + \frac{R_+ R_-}{(R_+ + R_-)^2} e^{-(R_+ + R_-)t} . \quad (4.89)$$

Le report de cette expression dans (4.83) donne :

$$C(t) = \sigma_I^2 e^{-(R_+ + R_-)t} \quad (t > 0) , \quad (4.90)$$

avec :

$$\langle I \rangle = \frac{R_-}{R_+ + R_-} I_0 , \quad \sigma_I^2 \equiv \langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2 = \frac{R_+ R_-}{(R_+ + R_-)^2} I_0^2 . \quad (4.91)$$

Lorsqu'un processus aléatoire est stationnaire, toutes les fonctions d'autocorrélation sont paires ; l'expression (4.90) est donc vraie  $\forall t$  à condition d'y remplacer  $t$  par  $|t|$ . Dans ces conditions, le spectre  $S(\omega)$  des fluctuations d'intensité est une fonction à valeurs réelles :

$$S(\omega) \equiv \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt C(t) e^{i\omega t} = \int_0^{+\infty} dt C(t) \cos \omega t = \frac{\sigma_I^2 (R_+ + R_-)}{\omega^2 + (R_+ + R_-)^2} . \quad (4.92)$$

C'est une lorentzienne de largeur  $\Delta\omega = R_+ + R_-$ .

La possibilité d'observer un très petit nombre d'atomes ou ions a ainsi permis de mettre à jour les mécanismes élémentaires imaginés par Bohr. En outre, notamment pour des raisons méthodologiques, elle a ouvert une nouvelle voie théorique construite sur la notion de fonction d'onde stochastique [13]. En effet, la description usuelle des processus optiques dissipatifs consiste à écrire une équation maîtresse (équations de Bloch optiques) pour haïlt l'opérateur-densité relatif à un ensemble statistique d'atomes, bien approché en pratique par une vapeur contenant un très grand nombre d'entités élémentaires *indépendantes*. En-dehors des difficultés techniques à surmonter pour obtenir la solution d'une telle équation<sup>38</sup>, il est bien clair que ce formalisme est très mal adapté au cas des petits amas et, à la limite, au cas de l'atome unique – on commence par calculer des propriétés d'ensemble pour essayer d'en déduire des comportements individuels. Un traitement plus direct est donc visiblement souhaitable.

Le choix de se cantonner à un formalisme “purent mécanique” pose le problème de la description de l'irréversibilité (dissipation). Comme déjà mentionné, celle-ci apparaît naturellement quand on couple un petit système à un grand système, et est *a contrario* exclue dans un formalisme hamiltonien standard concernant un petit nombre de degrés de liberté et en l'absence de toute trace partielle. S'en tenir à une description en terme de fonction d'onde passe donc par la réconciliation de deux concepts antagonistes, en forçant la mécanique à être irréversible. Une façon d'induire l'irréversibilité est de ponctuer la dynamique par des opérations de réduction de paquet d'ondes, c'est-à-dire d'effectuer par la pensée des mesures idéales, entrant dans la catégorie des *gedanken experiments*.

Ces idées vont maintenant être illustrées dans le cas [13] d'un atome à deux niveaux couplé au champ électromagnétique quantifié, l'atome étant par ailleurs piloté par une onde monochromatique de pulsation  $\omega$ , traitée classiquement et représentée par  $\mathcal{E}_0 \cos \omega_L t$ . Pour simplifier, on supposera que le champ quantifié peut être soit dans l'état fondamental  $|0\rangle$  (vide de photons), soit dans un état à un photon d'impulsion  $\hbar\vec{k}$  et de polarisation  $\varepsilon$ , état noté  $|\hbar\vec{k} \varepsilon\rangle$ . Les deux états atomiques “nus” sont notés  $|g\rangle$  et  $|e\rangle$  et ont pour énergies  $E_g$  et  $E_e = E_g + \hbar\omega_0$ . Le champ classique fait osciller l'atome à *la Rabi* ; en définissant le zéro d'énergie à la valeur  $E_g$ , le Hamiltonien effectif décrivant l'oscillation de Rabi est<sup>39</sup> :

$$H_{\text{Rabi}} = \hbar(\omega_0 - \omega) |e\rangle\langle e| + \frac{\hbar\Omega}{2} (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) , \quad (4.93)$$

<sup>37</sup>où, notamment, toutes les fonctions de corrélation  $\langle A(t)A(t') \rangle$  ne dépendent que de la *différence* des temps.

<sup>38</sup>Pour un système à  $N$  niveaux, l'opérateur densité est représenté par une matrice  $N \times N$  ; il faut donc calculer et engranger environ  $N^2$  quantités réelles.

<sup>39</sup>On s'en tient à l'approximation de l'onde tournante (*Rotating Wave Approximation*, acronyme RWA), où les termes anti-résonnants en  $e^{\pm 2i\omega_L t}$  sont négligés.

où  $\Omega = -d\mathcal{E}_0$ ,  $d$  étant le moment dipolaire électrique de l'atome ( $\Omega$  est la fréquence de Rabi) ;  $\delta = \omega - \omega_0$  est le désaccord entre le laser et la pulsation atomique. Quand  $\delta = 0$ , le Hamiltonien (4.93) induit bien un mouvement où les probabilités pour l'atome d'être dans ses deux états alternent en prenant successivement dans le temps les deux valeurs maximales 0 et 1.

Supposons qu'à l'instant  $t$ , le système complet (atome + champ quantifié) est dans l'état factorisé :

$$|\Psi(t)\rangle = (a_g|g\rangle + a_e|e\rangle) \otimes |0\rangle \equiv |\Phi(t)\rangle \otimes |0\rangle . \quad (4.94)$$

Maintenant, entre  $t$  et  $t + \delta t$ <sup>40</sup>, il y a possibilité d'émission spontanée de photons. La fonction d'onde à l'instant  $t + \delta t$  peut se décomposer en la somme de deux termes, chacun d'entre eux correspondant à un nombre donné de photons du champ quantifié :

$$|\Psi(t + \delta t)\rangle = |\Psi^{(0)}(t + \delta t)\rangle + |\Psi^{(1)}(t + \delta t)\rangle \quad (4.95)$$

avec<sup>41</sup> :

$$|\Psi^{(0)}(t + \delta t)\rangle = (a'_g|g\rangle + a'_e|e\rangle) \otimes |0\rangle \quad |\Psi^{(1)}(t + \delta t)\rangle = |g\rangle \otimes \sum_{\vec{k}, \varepsilon} \beta_{\vec{k}, \varepsilon} |\vec{k}, \varepsilon\rangle . \quad (4.96)$$

Les expressions précises de ces états peuvent être obtenues de diverses façons (à la Wigner - Weisskopf, résolvante dans l'approximation du pôle, Hamiltonien effectif non-hermitique, etc.). Le carré de la norme de  $|\Psi^{(1)}\rangle$  est la probabilité  $\delta p$  d'émission d'un photon entre  $t$  et  $t + \delta t$ , soit  $\delta p = \Gamma_e |a_e|^2 \delta t$  ; l'intervalle de temps  $\delta t$  est supposé court au sens où  $\delta p \ll 1$ . Par la conservation de la probabilité totale, il en résulte que  $|\langle \Psi^{(0)} | \Psi^{(0)} \rangle|^2 = 1 - \delta p$ . Les amplitudes  $a'_g$  et  $a'_e$  s'obtiennent en faisant évoluer l'atome avec  $H \equiv H_{\text{Rabi}} - i\hbar \frac{\Gamma_e}{2} |e\rangle\langle e|$  ; enfin,  $\beta_{\vec{k}, \varepsilon}$  est l'amplitude de probabilité d'émission d'un photon d'impulsion  $\hbar\vec{k}$  et de polarisation  $\varepsilon$ . Au total, l'évolution du système total est unitaire (la norme de  $|\Psi(t + \delta t)\rangle$  est la même, par construction, que celle de  $|\Psi(t)\rangle$ ).

C'est maintenant que s'introduit l'irréversibilité induite par l'"observation". On suppose que tous les photons émis spontanément sont détectés avec un compteur parfait, qui mesure le nombre de photons dans le champ à l'instant  $t + \delta t$  ; tout photon ainsi mesuré est absorbé par le compteur et disparaît donc du champ électromagnétique. Conformément au postulat de réduction du paquet d'onde, si le résultat est 0, on doit projeter l'état juste avant la mesure,  $|\Psi(t + \delta t)\rangle$ , sur  $|\Psi^{(0)}(t + \delta t)\rangle$ , si au contraire on trouve 1, on projette sur  $|\Psi^{(1)}(t + \delta t)\rangle$  ; dans tous les cas, il faut renormaliser l'état ainsi obtenu puisque qu'une deuxième mesure effectuée immédiatement après la première doit donner le même résultat avec probabilité 1.

Dans un schéma numérique, le caractère aléatoire de l'émission spontanée pendant le petit intervalle  $\delta t$  est très facile à singer : on se fixe un seuil  $\eta \ll 1$  et on tire une suite de nombres au hasard  $r_i$  répartis uniformément, entre 0 et 1 par exemple.  $0 < r_i \leq \eta$  correspond à l'émission d'un photon, alors que  $\eta < r_i < 1$  correspond à la non-émission. Au total, après cette mesure, l'alternative est la suivante :

- soit  $r_i < \eta$  auquel cas :

$$|\Psi(t + \delta t)\rangle = |g\rangle \otimes \sum_{\vec{k}, \varepsilon} \beta_{\vec{k}, \varepsilon} |\vec{k}, \varepsilon\rangle , \quad (4.97)$$

- soit  $r_i > \eta$  auquel cas<sup>42</sup> :

$$|\Psi(t + \delta t)\rangle = \mu (a'_g|g\rangle + a'_e|e\rangle) \otimes |0\rangle = \mu (\mathbf{1} - i\hbar H \delta t) |\Phi(t)\rangle \otimes |0\rangle , \quad (4.98)$$

avec  $\mu = (1 - \delta p)^{-\frac{1}{2}}$ . En tout cas, à l'issue de chaque mesure, on en revient à un état factorisé de la forme (4.94), où le champ est dans l'état vide, et le cycle peut être recommencé. Dans ce schéma, l'évolution de la fonction d'onde est une marche au hasard dans l'espace des états atomiques, d'où le nom de fonction d'onde stochastique.

<sup>40</sup>  $\delta t$  est supposé très petit devant  $\Gamma_e^{-1}$ , durée de vie de l'état excité,  $\delta^{-1}$  et  $\Omega^{-1}$ .

<sup>41</sup> Dans le secteur à zéro photon, l'atome peut être soit en  $|g\rangle$ , soit en  $|e\rangle$  (transitions virtuelles sans évacuation du photon). Dans le secteur à 1 photon, l'atome est dans l'état fondamental, puisqu'un photon a été émis vers l'extérieur. Par ailleurs, la déséxcitation suivie d'une réexcitation pendant  $\delta t$  est un processus à deux étapes qui est d'ordre  $\delta t^2$ .

<sup>42</sup> Après mesure, le photon émis a été extrait du système par le compteur et le champ est bien à nouveau dans l'état vide.

La question se pose de l'équivalence entre l'approche stochastique et la description conventionnelle à l'aide des équations de Bloch optiques. Dalibard *et al.* [13] ont également montré que la moyenne d'ensemble de l'opérateur densité construit sur la fonction d'onde stochastique satisfait une équation d'évolution identique à celle de Bloch. D'ailleurs, les simulations numériques [13] montrent qu'avec une centaine de tirages (d'histoires), les résultats obtenus par l'approche stochastique sont quasiment indiscernables de ceux fournis par les équations de Bloch. Même sans rentrer dans une comparaison détaillée des deux procédures, il est clair que la description stochastique est bien moins coûteuse. La situation est analogue à celle que l'on rencontre dans la théorie conventionnelle du mouvement Brownien ; alors l'alternative est la suivante : ou bien on résout une équation aux dérivées partielles (équation de Fokker - Planck) pour la fonction de densité<sup>43</sup> – ce qui permet d'avoir accès à toutes les moyennes en tant qu'espérances mathématiques –, ou bien on simule numériquement la trajectoire brownienne, ce qui est en principe très facile, et on moyenne sur un (grand) nombre de trajectoires (histoires). Dans tous les cas, la dynamique moyennée est foncièrement irréversible : qu'elle se produise dans l'espace physique ou dans un espace plus abstrait, une marche au hasard présente toujours un comportement où la symétrie de renversement du temps est brisée<sup>44</sup>.

### 4.3 Cryptographie quantique

La cryptographie est l'art – vieux comme le monde<sup>45</sup> – de communiquer au moyen de conventions assurant que le message transmis est à l'abri des indiscrétions. L'idée la plus naturelle est d'utiliser un *codage* des messages confidentiels : toute lettre de l'alphabet est remplacée biunivoquement par un autre signe<sup>46</sup> (nombre – d'où l'expression message chiffré –, image, symbole exotique, *etc.*). Le lexique donnant la correspondance biunivoque s'appelle la clé, et c'est elle qui doit rester absolument confidentielle. Ce procédé porte précisément le nom de *cryptographie à clé secrète*<sup>47</sup>.

L'élément crucial est la confidentialité de la clé permettant de coder et de décoder le message transmis, étant entendu que celui-ci peut à la limite être rendu public. Tout le problème est donc d'assurer la sécurité du message initial définissant la clé.

Toute transmission classique d'information peut être interceptée passivement, c'est-à-dire sans modification de la teneur du message ; bien sûr, il peut y avoir d'énormes difficultés techniques à surmonter pour y parvenir, mais c'est en principe possible : l'écoute d'une ligne téléphonique perturbe en un sens la ligne – donc ouvre la voie à la révélation de l'écoute – mais on peut réduire cet effet révélateur pour rendre l'écoute quasiment indétectable. Au contraire, parce qu'une mesure quantique perturbe en général<sup>48</sup> le système objet de la mesure,

<sup>43</sup>définie dans l'espace des phases, en général.

<sup>44</sup>Essentiellement, la brisure de symétrie provient du fait que l'on s'intéresse à un petit nombre de degrés de liberté, relatifs à un sous-système du système considéré. Dans le cas de la particule brownienne, on regarde sa position, sa vitesse, *etc.*, étant entendu que le "bain" – qui provoque la marche au hasard – est complètement évacué d'emblée et n'est présent que par son effet erratique sur la marche. Un autre exemple est fourni par l'amortissement de Landau dans un plasma : l'équation de départ (de Vlasov, où le terme de collisions est absent, au contraire de l'équation de Boltzmann) est réversible et produit une densité  $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$  permettant de calculer les valeurs moyennes. Si l'on s'intéresse seulement à la densité de particules, il convient d'intégrer sur les impulsions, ce qui fait "perdre" une grande quantité d'information ; l'irréversibilité qui en découle traduit une évidence : une fois effectuée la sommation sur les vitesses, il n'est plus possible de reconstruire le mouvement, il y a une infinité de conditions initiales susceptibles de donner la même densité en position. Sommer, intégrer ou laisser dans l'ombre certains degrés de liberté en les confiant au hasard produit ici la flèche du temps.

<sup>45</sup>On raconte que Jules César y a recouru : était-ce pour correspondre avec Cléopâtre ?

<sup>46</sup>Ce procédé de chiffrement est visiblement le plus simple qui soit. On sait faire beaucoup mieux, par exemple : on code une lettre en langage binaire, lui associant une suite  $\{x_i\}$  de 0 ou de 1, laquelle n'a rien de confidentiel (tout le monde peut prendre la même) ; puis on tire au hasard une autre suite  $\{y_i\}$  de 0 ou de 1, qui constitue la clé à proprement parler et qui, elle, est confidentielle. Le chiffrement de la lettre choisie est constitué par la suite des sommes  $\{x_i + y_i \text{ modulo } 2\}$ .

<sup>47</sup>Il existe aussi des procédés dits à *clé publique*, l'idée étant que certaines opérations mathématiques s'effectuent trivialement dans un sens et exigent un travail colossal dans l'autre (pour cette raison, on parle de *fonctions à sens unique*) : par exemple, il est facile de multiplier deux nombres premiers, alors que la factorisation d'un (grand) nombre  $N$  en ses premiers entiers exige un temps de calcul croissant en gros exponentiellement avec  $N$ . Typiquement, factoriser un nombre de mille chiffres en ses facteurs premiers est, avec les ordinateurs actuels, totalement inconcevable.

C'est d'ailleurs au sujet de ce type de problème que l'ordinateur quantique repointe le bout du nez, compte tenu des capacités phénoménales que l'on en attend...

<sup>48</sup>La mesure ne provoque pas *toujours* une "perturbation incontrôlable", comme on le voit parfois écrit. Si l'état du système est, avant la mesure, propre de l'observable mesurée, il l'est encore après : en pareil cas, la mesure est "non-destructive".

l'observation indésirable peut être en principe facilement détectée. La Mécanique Quantique permet ainsi de construire des procédures permettant de savoir si, lors d'une transmission, on est écouté ou non. Il s'agit ici de se borner à donner quelques idées de base, étant entendu qu'il existe une littérature<sup>49</sup> énorme sur le sujet, où divers scénarios sont envisagés et décrits<sup>50</sup>.

Dans la suite, on considère un premier exemple, formel, posant les idées essentielles montrant comment la Mécanique quantique permet de concevoir des protocoles révélant *à coup sûr* la présence d'une écoute indésirable. Deux exemples utilisant soit un atome à trois niveaux, soit des spins  $\frac{1}{2}$  sont ensuite exposés en détail. Dans un dernier temps, on examine le point le plus essentiel, à savoir comment transmettre la clé en toute confidentialité, suivant la proposition d'Eckert [15].

### 4.3.1 Principes de la détection d'une écoute indésirable

L'idée de base est simple et met en jeu des séquences de mesures successives d'observables qui ne commutent pas. De façon un peu abstraite, les choses se présentent comme suit. Soit  $A$  et  $B$  deux observables incompatibles :

$$[A, B] \neq 0, \quad (4.99)$$

dont l'une,  $A$  pour fixer les idées, est une constante du mouvement :

$$[A, H] = 0 \quad (4.100)$$

alors que  $B$  n'en est pas une ( $[B, H] \neq 0$ ). À un certain instant,  $t = 0$ , on mesure  $A$ , et on trouve  $a_m$ , l'une des valeurs propres de  $A$  ; on sait d'avance que la probabilité d'obtenir cette valeur est égale à  $|\langle a_m | \Psi(t=0) \rangle|^2$ . Juste après cette mesure, l'état du système est  $|\Psi(t=0+0)\rangle = |a_m\rangle$ . Si aucune autre mesure n'est effectuée<sup>51</sup> jusqu'à l'instant  $t$ , une nouvelle mesure de  $A$  à cet instant donne le résultat  $a_m$ , cette fois avec certitude. En effet, l'état à l'instant  $t$  est  $|\Psi(t)\rangle = U(t)|\Psi(t=0+0)\rangle = U(t)|a_m\rangle$ , mais comme  $A$  et  $H$  commutent, l'état  $|a_m\rangle$  produit par la réduction du paquet d'onde consécutive à la première mesure de  $A$ , est également<sup>52</sup> propre de  $H$  ; il en résulte que  $|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_m t} |a_m\rangle$  et que la deuxième mesure de  $A$  produit la même valeur  $a_m$  avec probabilité 1. Si les deux mesures sont effectuées par deux observateurs distincts (Alice puis Bob), ces derniers doivent donc constater que leurs résultats sont toujours identiques, quand la même séquence est répétée un grand nombre de fois, à la limite infini.

Imaginons maintenant au contraire que, entre la première mesure de  $A$  et la seconde, à l'instant  $t_1$  ( $0 < t_1 < t$ ), une tierce personne mesure  $B$ , qui n'est pas une constante du mouvement. Cet "espion" trouve l'une des valeurs propres de  $B$ ,  $b_n$ , et l'état issu de cette mesure est<sup>53</sup>  $|\Psi(t=t_1+0)\rangle = |b_n\rangle$ . Il ne s'agit pas d'un état stationnaire, puisque  $H$  et  $B$  ne commutent pas ; à l'instant ultérieur  $t$ , cet état est devenu :

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{m'} c_{m'} e^{-\frac{i}{\hbar}E_{m'}(t-t_1)} |a_{m'}\rangle, \quad c_{m'} = \langle a_{m'} | b_n \rangle, \quad t_1 < t. \quad (4.101)$$

Dans ces conditions, la mesure de  $A$  à l'instant  $t$  postérieur à  $t_1$  peut alors produire *l'une quelconque* des valeurs propres  $a_{m'}$  – la probabilité de trouver  $a_{m'}$  est  $P_{m'} = |c_{m'}|^2$  ; le résultat brut est que les résultats obtenus par Alice et Bob effectuant les deux mesures de  $A$  ne sont plus nécessairement identiques. En fait, lorsque la séquence est répétée un grand nombre de fois, il suffit que *l'un* de leurs résultats soit différent pour qu'ils puissent affirmer avec certitude qu'ils sont victimes d'une écoute et que la sécurité de leur transmission n'est pas assurée.

<sup>49</sup>La littérature a pris l'habitude d'appeler Alice et Bob les deux personnes communiquant entre elles et souhaitant se mettre à l'abri des malversations d'un "espion". Ce dernier est souvent appelé Eve (vient de *to eavesdrop* = *écouter aux portes* (!)).

<sup>50</sup>Pour une bibliographie assez récente, voir [14].

<sup>51</sup>Dans ces conditions, le système évolue librement par l'équation de Schrödinger.

<sup>52</sup>Pour simplifier la discussion, on suppose pour l'instant qu'il n'existe aucune dégénérescence.

<sup>53</sup>On continue à supposer qu'il n'existe pas de dégénérescence. L'exemple 1 ci-dessous présente un cas dégénéré.

### 4.3.2 Exemples

#### Exemple 1 : trois observables

Précisons les idées précédentes dans un cas concret, où d'ailleurs le Hamiltonien présente de la dégénérescence. Soit un atome à trois niveaux  $\{|p\rangle\}$  (un fondamental  $p = 0$  et deux niveaux excités dégénérés,  $p = 1, 2$ ) :

$$H = \hbar\omega(-|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) . \quad (4.102)$$

$A$  est une observable donnée par :

$$A = a(|0\rangle\langle 0| + i|1\rangle\langle 2| - i|2\rangle\langle 1|) \quad (a \in \mathbb{R}) . \quad (4.103)$$

$A$  commute visiblement avec  $H$ , c'est donc une constante du mouvement. Ses valeurs propres sont  $+a$  (dégénérescence 2) et  $-a$  (non-dégénérée). Les vecteurs propres de  $A$  (qui sont aussi propres de  $H$  sont les  $|\psi_{\alpha\beta}\rangle$  ( $\alpha, \beta = \pm$ ) :

$$|+a, 1\rangle = |0\rangle \equiv |\psi_{-+}\rangle , \quad |+a, 2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - i|2\rangle) \equiv |\psi_{++}\rangle . \quad (4.104)$$

$$|-a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i|1\rangle + |2\rangle) \equiv |\psi_{+-}\rangle . \quad (4.105)$$

Le premier indice de  $|\psi_{\alpha\beta}\rangle$  renvoie à la valeur propre  $\pm\hbar\omega$  de  $H$ , le second au signe de la valeur propre  $\pm a$  de  $A$ .

L'observable  $B$  est prise sous la forme :

$$B = b(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |2\rangle\langle 2|) \quad (b \in \mathbb{R}) ; \quad (4.106)$$

clairement :

$$[A, B] \neq 0 , \quad [H, B] \neq 0 . \quad (4.107)$$

Les valeurs propres de  $B$  sont  $+b$  (dégénérescence 2) et  $-b$  (non-dégénérée) ; les vecteurs propres sont :

$$|+b, 1\rangle = |2\rangle , \quad |+b, 2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) , \quad |-b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|0\rangle + |1\rangle) . \quad (4.108)$$

Maintenant, Alice et Bob effectuent des mesures de  $A$  aux instants 0 et  $t$ . Compte tenu de la dégénérescence en énergie, l'opération de mesure peut porter sur un ensemble complet d'observables qui commutent, ce que constituent  $A$  et  $H$  ; à l'issue d'une telle opération, l'état du système est parfaitement défini. Si aucune mesure de  $B$  n'est faite entre-temps, les résultats des deux observateurs coïncident dans tous les cas.

En revanche, soit une mesure de  $B$  effectuée à l'instant  $t_1$  compris entre 0 et  $t$ . Pour fixer les idées, on suppose que le premier observateur a trouvé  $+\hbar\omega$  et  $+a$  ; l'état de départ est donc  $|\Psi(0+)\rangle = |\psi_{++}\rangle$ . Compte tenu des décompositions ci-dessus, l'état à l'instant  $t_1$  est :

$$|\Psi(t_1)\rangle = e^{-i\omega t_1} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}(|+b, 2\rangle + |-b\rangle) - i|+b, 1\rangle \right] . \quad (4.109)$$

Il en résulte que la mesure à  $t_1$  donne  $+b$  avec la probabilité  $\frac{3}{4}$ ,  $-b$  avec la probabilité  $\frac{1}{4}$ . Dans le premier cas, l'état à  $t_1 + 0$  est :

$$|\Psi(t_1 + 0)\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}|+b, 2\rangle - i|+b, 1\rangle \right] . \quad (4.110)$$

Un calcul simple montre que cet état devient, à l'instant  $t$  :

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left[ \frac{1}{2} e^{+i\omega(t-t_1)} |\psi_{-+}\rangle + \frac{3}{2\sqrt{2}} e^{-i\omega(t-t_1)} |\psi_{++}\rangle - \frac{i}{2\sqrt{2}} e^{-i\omega(t-t_1)} |\psi_{+-}\rangle \right] . \quad (4.111)$$

Pour cette “histoire”, le deuxième observateur va trouver les valeurs  $(-\hbar\omega, +a)$ ,  $(+\hbar\omega, +a)$  et  $(+\hbar\omega, -a)$  avec les probabilités respectives  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{3}{4}$  et  $\frac{1}{12}$ , au lieu de trouver à coup sûr le même résultat que le premier observateur.

Si la mesure intermédiaire donne  $-b$ , on a successivement :

$$|\Psi(t_1 + 0)\rangle = |-b\rangle, \quad (4.112)$$

qui devient :

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{+i\omega(t-t_1)} |\psi_{-+}\rangle + \frac{1}{2} e^{-i\omega(t-t_1)} |\psi_{++}\rangle + \frac{i}{2\sqrt{2}} e^{-i\omega(t-t_1)} |\psi_{+-}\rangle. \quad (4.113)$$

Le deuxième observateur va trouver les valeurs  $(-\hbar\omega, +a)$ ,  $(+\hbar\omega, +a)$  et  $(+\hbar\omega, -a)$  avec les probabilités respectives  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$  et  $\frac{1}{4}$ .

Ainsi, au coup par coup, Alice et Bob peuvent trouver des résultats différents. La probabilité qu'ils trouvent des résultats identiques est une probabilité conditionnelle :

$$P_{\text{résultats identiques}} \equiv P(++; t | ++; t = 0), \quad (4.114)$$

qui peut s'exprimer suivant la relation de chaîne habituelle<sup>54</sup> :

$$P(++; t | ++; 0) = \sum_{\varepsilon=\pm 1} P(++; t | \varepsilon b; t_1) P(\varepsilon b; t_1 | ++; 0). \quad (4.115)$$

Cette dernière expression est la somme<sup>55</sup> sur toutes les “trajectoires” possibles, une mesure intermédiaire ayant été faite<sup>56</sup>. On a donc ici :

$$P(++; t | ++; 0) = \frac{3}{4} \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \frac{1}{4} = \frac{5}{8} \quad (4.116)$$

Le choix d'un autre résultat pour la première mesure du couple  $(H, A)$  conduit au même type de conclusion : en raison de la mesure effectuée par un tiers, la probabilité que les résultats soient identiques est loin d'être égale à 1 ; le calcul montre qu'elle vaut  $\frac{1}{2}$  si la première mesure a donné  $(-\hbar\omega, +a)$  et  $\frac{5}{8}$  si on a d'abord trouvé  $(+\hbar\omega, -a)$ . Dans tous les cas, au bout de quelques expériences, Alice et Bob peuvent avec une quasi-certitude affirmer qu'ils sont écoutés<sup>57</sup>.

## Exemple 2 : Alice, Bob et des spins $\frac{1}{2}$

Une autre procédure utilise l'envoi de spins  $\frac{1}{2}$  par Alice à Bob<sup>58</sup>. Le spin  $\frac{1}{2}$  est une variable binaire qui se prête donc bien au codage : on peut mettre en correspondance biunivoque l'écriture binaire d'un nombre avec une configuration de spins  $+-+-+-\dots+$ . Ici, pour un Hamiltonien à symétrie sphérique, toutes les composantes  $S_u$  des spins sont des constantes du mouvement ; les observables incompatibles en jeu sont bien évidemment les différentes composantes cartésiennes de  $\vec{S}$ , satisfaisant les relations caractéristiques d'un moment cinétique :

$$\vec{S} \times \vec{S} = i\hbar \vec{S} \iff [S_x, S_y] = i\hbar S_z, \text{ etc.} \quad (4.117)$$

<sup>54</sup>relation dite de Bachelier - Chapman - Kolmogorov.

<sup>55</sup>la somme représente l'addition des probabilités d'événements mutuellement exclusifs.

<sup>56</sup>Lorsqu'aucune mesure intermédiaire n'est faite, la probabilité est le module au carré d'une *somme d'amplitudes*. Ici, compte tenu de la réduction liée à la mesure de  $B$  à  $t_1$ , la probabilité est une *somme de probabilités*, chacune de celles-ci étant le module carré d'une amplitude.

<sup>57</sup>Toutes les probabilités exhibées ne dépendent pas du temps. En effet :

- quand il s'agit de mesures de  $A$ , toutes les réductions de paquet d'onde produisent des états stationnaires
- en ce qui concerne la mesure de  $B$  : l'état sur lequel on mesure est propre de  $A$  et  $H$ , c'est encore un état stationnaire et donc les probabilités de trouver les valeurs  $\pm b$  sont indépendantes du temps. Enfin, l'état issu de la mesure de  $B$  à  $t_1$  est  $|b, i = 1, 2\rangle$ . Lors de la mesure de  $A$  et  $H$  à  $t > t_1$ , les probabilités sont de la forme  $|\langle \psi_{\alpha\beta} | U(t - t_1) | b, i = 1, 2 \rangle|^2$  ou  $|\langle \psi_{\alpha\beta} | U(t - t_1) | -b \rangle|^2$  (voir (4.104) et (4.105)) ;  $U$  agissant sur le bra produit une simple phase temporelle qui disparaît du module carré.

<sup>58</sup>D'autres versions sont possibles ; par exemple, on peut disposer d'une source fabriquant des paires de spins d'état bien défini, l'un des spins étant envoyé vers Alice, l'autre vers Bob ; un espion mesurant le spin allant vers Bob va induire des différences entre les résultats des mesures des deux observateurs.

En vertu de la relation  $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ , on peut raisonner avec les trois composantes de  $\vec{\sigma}$ . Par ailleurs, puisque les composantes du spin sont des constantes du mouvement, seule une mesure intermédiaire d'une composante incompatible est susceptible de modifier, lors d'une mesure ultérieure, la valeur trouvée au départ.

Alice choisit de mesurer la composante suivant  $Oz$ , trouve donc à chaque fois  $\pm 1$  et envoie le spin mesuré à Bob. Celui-ci mesure la composante de  $\vec{S}$  le long d'un axe  $OZ$  faisant l'angle  $\theta$  avec l'axe  $Oz$  d'Alice et situé dans le plan  $xOz$  (Alice et Bob sont d'avance convenus d'une même orientation de leurs repères locaux). L'observable que mesure Bob est donc :

$$\sigma_Z = \cos \theta \sigma_z + \sin \theta \sigma_x, \quad [\sigma_z, \sigma_Z] = 2i \sin \theta \sigma_y \quad (4.118)$$

Bien évidemment, Alice et Bob ne vont pas trouver les mêmes résultats, puisqu'ils mesurent deux observables qui ne commutent pas – sauf si  $\theta = 0$ . Les états propres de  $\sigma_Z$ , qui a aussi pour valeurs propres  $\pm 1$ , sont :

$$|+\rangle_Z = \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle_z + \sin \frac{\theta}{2} |-\rangle_z, \quad |-\rangle_Z = -\sin \frac{\theta}{2} |+\rangle_z + \cos \frac{\theta}{2} |-\rangle_z, \quad (4.119)$$

comme on le vérifie facilement. Ceci étant donné, on voit que si Alice a trouvé  $+1$  – et envoie donc à Bob un spin dans l'état  $|+\rangle_z$ , celui-ci peut trouver  $+1$  ou  $-1$ , avec les probabilités respectives  $\cos^2 \frac{\theta}{2}$  et  $\sin^2 \frac{\theta}{2}$ . Bien sûr, si  $\theta = 0$ , Alice et Bob trouvent *toujours* les mêmes résultats. Si Bob mesure suivant un axe tourné de  $\frac{\pi}{2}$  (appelons-le  $Ox$ ,  $OZ_{\theta=\pi/2} = Ox$ ), alors :

$$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z + |-\rangle_z), \quad |-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|+\rangle_z + |-\rangle_z); \quad (4.120)$$

dans ces conditions, si Alice a trouvé  $+$ , Bob a une chance sur deux de trouver  $+$ , *etc.* : Bob ne trouve comme Alice *que* dans 50% des cas.

Maintenant, un espion situé sur le trajet du spin procède à des mesures suivant un axe faisant l'angle  $\phi$  avec  $Oz$  ; l'observable que mesure l'espion est donc :

$$\sigma_e = \cos \phi \sigma_z + \sin \phi \sigma_x, \quad (4.121)$$

observable dont les vecteurs propres sont :

$$|+\rangle_e = \cos \frac{\phi}{2} |+\rangle_z + \sin \frac{\phi}{2} |-\rangle_z, \quad |-\rangle_e = -\sin \frac{\phi}{2} |+\rangle_z + \cos \frac{\phi}{2} |-\rangle_z. \quad (4.122)$$

Pour fixer les idées, on raisonne après une mesure par Alice ayant donné  $+1$ , de sorte que l'espion effectue une mesure sur l'état  $|+\rangle_z$  : il trouve donc  $+1$  avec la probabilité  $\cos^2 \frac{\phi}{2}$  et  $-1$  avec la probabilité  $\sin^2 \frac{\phi}{2}$ . Puis Bob procède à la mesure de  $\sigma_Z$  ; si l'espion a trouvé  $+1$ , Bob trouve  $+1$  ou  $-1$  avec les probabilités respectives  $\cos^2 \frac{\theta-\phi}{2}$  et  $\sin^2 \frac{\theta-\phi}{2}$ . Si l'espion a trouvé  $-1$ , Bob trouve  $-1$  ou  $+1$  avec les probabilités respectives  $\cos^2 \frac{\theta-\phi}{2}$  et  $\sin^2 \frac{\theta-\phi}{2}$ . En définitive, la probabilité pour que Alice et Bob aient le même résultat  $+1$  est donc :

$$P_\phi(+, \theta|+, 0) = \cos^2 \frac{\phi}{2} \cos^2 \frac{\theta-\phi}{2} + \sin^2 \frac{\phi}{2} \sin^2 \frac{\theta-\phi}{2}. \quad (4.123)$$

En particulier, si Alice et Bob sont convenus de mesurer le long du même axe  $Oz$  ( $\theta = 0$ ), la probabilité de coïncidence de leurs résultats est :

$$P_\phi(+, 0|+, 0) = \cos^4 \frac{\phi}{2} + \sin^4 \frac{\phi}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \phi). \quad (4.124)$$

Au total, pour faire parvenir un message de  $n$  bits, Alice doit envoyer  $Nn$  spins,  $N$  étant pris très grand de sorte que les fréquences statistiques puissent être confondues avec les lois limites de probabilités. Bob peut retourner à Alice tous ses spins, par une voie dont la confidentialité a été établie antérieurement ; le produit  $Nn$  étant forcément très grand – et la probabilité (4.124) étant évidemment plus petite que 1 (sauf si l'espion connaît l'angle choisi par Alice et Bob) –, les deux observateurs vont très vite s'apercevoir s'ils sont écoutés ou non.



L'espion, ne connaissant pas la direction commune d'observation d'Alice et Bob, peut décider de tirer au hasard la sienne, en prenant l'angle  $\phi$  uniformément distribué entre 0 et  $2\pi$ . La probabilité de coïncidence moyennée est :

$$P(+, 0|+, 0) = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} P_\phi(+, 0|+, 0) = \frac{3}{4} . \quad (4.125)$$

Cette modification ne change pas grand chose au fait que sur un grand nombre d'envois, l'espion va être démasqué à coup presque sûr.

### 4.3.3 Communication de la clé secrète entre Alice et Bob

Les exemples traités ci-dessus illustrent la possibilité de savoir si la ligne est écoutée ou non, mais n'en définissent pas pour autant un mode de transmission sûr de la clé de cryptage : si être en mesure d'affirmer avec certitude que la ligne n'est pas écoutée est déjà un immense progrès, encore faut-il à un moment ou à un autre trouver les moyens d'échanger la clé elle-même. Ekert ([15], [16]) a proposé le scénario qui suit, exposé d'abord dans sa version simple, puis dans une version raffinée utilisant des paires de spin couplées *à la* EPR.

Dans sa version la plus simple, Alice envoie à Bob des spins polarisés. L'état de polarisation de chaque spin résulte d'une mesure faite par Alice et ayant produit un certain résultat  $\pm \frac{\hbar}{2}$ , noté simplement  $\pm$  dans la suite. Celle-ci tire au hasard sa direction de mesure ; pour simplifier, on suppose que cette direction est soit  $Ox$  (notée  $\leftrightarrow$ ), soit  $Oz$  (notée  $\updownarrow$ ). Donc, pour chaque spin, Alice

1. tire au hasard sa direction de mesure,  $Ox$  ou  $Oz$
2. note son résultat,  $+$  ou  $-$
3. envoie le spin à Bob (sans commentaire !)

Une séquence possible est la suivante :

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} \updownarrow & \updownarrow & \leftrightarrow & \updownarrow & \leftrightarrow & \leftrightarrow & \leftrightarrow & \updownarrow & \leftrightarrow & \leftrightarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \leftrightarrow & \updownarrow & \leftrightarrow & \leftrightarrow & \updownarrow & \updownarrow & \leftrightarrow \\ + & - & - & - & + & + & - & + & - & - & + & + & - & + & + & - & + & - & - & + \end{array} . \quad (4.126)$$

Pour chaque spin reçu, Bob fait une mesure du spin en tirant lui aussi au hasard sa direction d'observation (il se trompe donc dans un cas sur deux) :

- quand il choisit le même axe qu'Alice, il trouve le même résultat qu'elle :

$$P(\text{Bob}, Oz, + | \text{Alice}, Oz, +) = 1 , \quad P(\text{Bob}, Oz, - | \text{Alice}, Oz, +) = 0 , \quad (4.127)$$

$$P(\text{Bob}, Oz, + | \text{Alice}, Oz, -) = 0 , \quad P(\text{Bob}, Oz, - | \text{Alice}, Oz, -) = 1 \quad (4.128)$$

- quand Bob "se trompe" d'axe, il ne trouve (statistiquement) le même résultat qu'Alice que dans la moitié des cas (voir (4.120)) :

$$P(\text{Bob}, Ox, + | \text{Alice}, Oz, +) = \frac{1}{2} , \quad P(\text{Bob}, Ox, - | \text{Alice}, Oz, +) = \frac{1}{2} . \quad (4.129)$$

$$P(\text{Bob}, Ox, + | \text{Alice}, Oz, -) = \frac{1}{2} , \quad P(\text{Bob}, Ox, - | \text{Alice}, Oz, -) = \frac{1}{2} . \quad (4.130)$$

et de même en permutant  $x$  et  $z$ . Compte tenu de la séquence d’Alice (4.126), un exemple de séquence pour Bob, *en l’absence d’espion*, est le suivant :

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} \updownarrow & \leftrightarrow & \updownarrow & \updownarrow & \leftrightarrow & \leftrightarrow & \updownarrow & \leftrightarrow & \leftrightarrow & \updownarrow & \updownarrow & \leftrightarrow & \updownarrow & \leftrightarrow & \updownarrow & \updownarrow & \leftrightarrow & \updownarrow & \leftrightarrow & \updownarrow \\ + & + & - & - & + & + & + & + & - & - & + & - & - & + & + & - & + & - & - & + \end{array} . \quad (4.131)$$

Toutes les mesures étant faites, Alice fait part publiquement<sup>59</sup> à Bob de tous ses *choix* d’axes, mais, pour l’instant, ne dit évidemment rien de ses *résultats* ; réciproquement, Bob lui communique ses axes. Ceci permet d’éliminer tous les cas où le hasard a fait que les axes n’étaient pas les mêmes pour Alice et pour Bob :

Alice	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\leftrightarrow$	$\updownarrow$	$\leftrightarrow$	$\leftrightarrow$	$\leftrightarrow$	$\updownarrow$	$\leftrightarrow$	$\leftrightarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\leftrightarrow$	$\updownarrow$	$\leftrightarrow$	$\leftrightarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\leftrightarrow$
Bob	$\updownarrow$	$\leftrightarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\leftrightarrow$	$\leftrightarrow$	$\updownarrow$	$\leftrightarrow$	$\leftrightarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\leftrightarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\leftrightarrow$	$\leftrightarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\leftrightarrow$
Retenus	+			-	+	+				-	+			-	+	+			+	-

(4.132)

À ce stade (et toujours en l’absence d’espion), chacun sait que pour tous les *bits* ainsi retenus, il a dû trouver les mêmes résultats que l’autre<sup>60</sup>, mais ne sait pas ce qu’il en est au juste (si c’est faux, un espion écoute !).

Pour le savoir, Alice communique maintenant à Bob *une partie* de ses résultats (elle les “sacrifie”) ; connaissant les choix d’axes et les résultats d’Alice pour un assez grand nombre de cas, un test statistique permet alors à Bob de savoir avec une faible probabilité d’erreur si la communication a été écoutée ou non. Si la confidentialité est alors établie, la séquence des *autres* résultats constituent la clé codant une lettre convenue d’avance : *sans rien communiquer d’autre*, Alice et Bob savent qu’ils ont trouvé la même chose à chaque fois puisqu’ils ont utilisé les mêmes axes. Finalement, comme la clé est constituée sans l’échange de rien d’autre, aucun moyen n’existe d’altérer la confidentialité de celle-ci !

Une autre version consiste à utiliser une source de particules produisant des paires (a, b) de spin  $\frac{1}{2}$  dans l’état singulet :

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) , \quad (4.133)$$

développé sur les états propres de  $S_{z_a}$  et  $S_{z_b}$ . Après séparation des particules, l’une allant vers Alice, l’autre vers Bob, les deux observateurs procèdent à des mesures de la composante du spin le long de  $Ox$  ou de  $Oz$ , directions toutes deux perpendiculaires à la direction de propagation des particules. Dans la suite on note  $|\rightarrow\rangle$  et  $|\leftarrow\rangle$  respectivement les états propres  $\pm\frac{\hbar}{2}$  de  $S_x$ . Compte tenu de :

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) , \quad |\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) , \quad (4.134)$$

l’état singulet (4.133) s’écrit aussi :

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\leftarrow\rightarrow\rangle - |\rightarrow\leftarrow\rangle) . \quad (4.135)$$

Soit d’abord la séquence où Alice et Bob mesurent le long de la même direction,  $S_z$  par exemple. La première, Alice effectue une mesure, de  $S_z$  par exemple ; si elle trouve  $+\frac{\hbar}{2}$ , l’état des deux particules après cette mesure est la projection de (4.133), soit  $|\uparrow\downarrow\rangle$ . Il en résulte que quand Bob va mesurer  $S_z$  par la suite, il trouvera  $-\frac{\hbar}{2}$  avec certitude<sup>61</sup>. Si Alice trouve  $-\frac{\hbar}{2}$ , Bob trouvera  $+\frac{\hbar}{2}$  : leurs résultats sont donc à coup sûr opposés. Il en va de même si ce sont des mesures de  $S_x$  qui sont effectuées : le même raisonnement vaut avec (4.135). En définitive, quand Alice et Bob mesurent la même composante, leurs résultats sont toujours “anticorrélés”. Physiquement et en résumé, sachant que l’état est singulet et qu’Alice a trouvé le spin dans un sens, Bob ne peut trouver que le spin opposé.

<sup>59</sup>On entend par là que la communication ne nécessite aucune confidentialité.  
<sup>60</sup>Chacun sait ce qu’a trouvé l’autre sans y être allé voir et sans communication explicite !  
<sup>61</sup>La mesure permet ainsi d’obtenir instantanément des informations sur ce qui se passe ailleurs : c’est ici que réside le paradoxe EPR (à ce sujet, on pourra consulter l’article de Jammer [17]).

Si Alice mesure  $S_z$  et Bob  $S_x$ , les choses vont autrement. Si Alice a trouvé  $+\frac{\hbar}{2}$ , l'état après cette mesure est  $|\uparrow\downarrow\rangle$  et se décompose suivant :

$$\frac{1}{2}(|\rightarrow\rightarrow\rangle - |\rightarrow\leftarrow\rangle + |\leftarrow\rightarrow\rangle - |\leftarrow\leftarrow\rangle) . \quad (4.136)$$

Bob trouvera donc pour  $S_x$  les deux valeurs  $\pm\frac{\hbar}{2}$  avec équiprobabilité. Il en va de même si Alice trouve  $-\frac{\hbar}{2}$ .

Ainsi, dans tous les cas, chacun sait (*a priori* sans communication des résultats : c'est le miracle EPR) ce que l'autre a trouvé. Le même scénario que ci-dessus peut alors être repris (communication des axes et d'une partie des résultats pour tester la confidentialité de la ligne).

*Remarque*

Il faut bien voir que l'espion éventuel ne peut pas extraire quoi que ce soit d'utile : dans la phase d'envoi, les spins ne véhiculent aucune information en eux-mêmes. En fait, l'information ne devient réalité qu'après la mise en œuvre du scénario décrit ci-dessus.



# Bibliographie

- [1] <http://www.britannica.com/bcom/eb/article/5/0,5716,59835+1+58374,00.html>
- [2] B. Misra & E. C. G. Sudarshan, *The Zeno's paradox in quantum theory*, J. Math. Phys., **18**, 756 (1977)
- [3] A. Peres, *Zeno paradox in quantum theory*, Am. J. Phys., **48**, 931 (1980)
- [4] A. Messiah, *Mécanique Quantique*, tome 2 (Dunod, Paris 1965)
- [5] R. J. Cook, Phys. Scr., **T21**, 49, (1988) (cité en [6])
- [6] W. M. Itano, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger & D. J. Wineland, *Quantum Zeno effect*, Phys. Rev. A, **41**, 2295 (1990)
- [7] Claude Cohen-Tannoudji, *Cours du Collège de France*, (1989/1990)
- [8] M. B. Plenio & P. L. Knight, *The quantum-jump approach to dissipative dynamics in quantum optics*, Rev. Mod. Phys., **70**, 101 (1998)
- [9] H. G. Dehmelt, Bull. Am. Phys. Soc., **20**, 60 (1975)
- [10] R. J. Cook & H. J. Kimble, *Possibility of Direct Observation of Quantum Jumps*, Phys. Rev. Let., **54**, 1023 (1985)
- [11] W. Nagourney, J. Sandberg & H. Dehmelt, *Shelved Optical Electron Amplifier: Observation of Quantum Jumps*, Phys. Rev. Let., **56**, 2797 (1986)
- [12] Th. Sauter, W. Neuhauser, R. Blatt & P. E. Toschek, *Observation of Quantum Jumps*, Phys. Rev. Let., **57**, 1696 (1986)
- [13] J. Dalibard, Y. Castin & K. Mølmer, *Wave-Function Approach to Dissipative Processes in Quantum Optics*, Phys. Rev. Let., **68**, 580 (1992)
- [14] <http://www.cs.mcgill.ca/~crepeau/CRYPTO/Biblio-QC.html>
- [15] A. K. Ekert, *Quantum Cryptography Based on Bell's Theorem*, Phys. Rev. Let., **68**, 661 (1991)
- [16] A. K. Ekert, *La Mécanique Quantique au secours des agents secrets*, La Recherche, **22**, 790 (1991)
- [17] M. Jammer, *Le paradoxe d'Einstein - Podolsky - Rosen*, La Recherche, **111**, 510 (1980)