ÉCOLE POLYTECHNIQUE **Promotion 2010**

CONTRÔLE DU COURS DE PHYSIQUE PHY311
Mercredi 6 juillet 2011, durée : 2 heures

Documents autorisés : cours, recueil de problèmes, copies des diapositives, notes de PC
Indiquer le numéro de votre groupe de PC sur votre copie.

I Exercice (sur 3 points) : transmission d'une marche de potentiel

On considère une particule arrivant depuis $x = -\infty$ sur une marche de potentiel de hauteur $V_0 > 0$, c'est-à-dire un potentiel $V(x)$ nul pour $x < 0$ et $V(x) = V_0$ pour $x \geq 0$. Préciser laquelle des assertions est correcte dans le cas où l'énergie de la particule E est inférieure à V_0 :

1. la probabilité de transmission de la marche varie comme $1/\sqrt{V_0 - E}$,
2. la probabilité de transmission de la marche varie exponentiellement vis à vis de la variable $V_0 - E$,
3. la fonction d'onde pénètre la marche, mais la probabilité de transmission est nulle,
4. la fonction d'onde ne pénètre pas la marche car cela correspondrait à une énergie cinétique négative, et la probabilité de transmission est nulle.

Note. La probabilité de transmission est dite *non nulle* si le courant de probabilité dans la zone $x > 0$ est lui-même non nul.

On justifiera la réponse en quelques lignes.

II Exercice (sur 3 points) : fonction d'onde d'une particule dans un puits infini

On considère une particule dans un puits de potentiel infini de largeur L avec $V(x) = 0$ pour $0 < x < L$. On définit les fonctions $u_n(x)$ selon les relations suivantes :

$$u_1(x) = A_1 \sin(\pi x/L), \quad u_2(x) = A_2 \cos(\pi x/L), \quad u_3(x) = A_3 \sin^2(\pi x/L),$$

où les coefficients A_n sont choisis de sorte que ces fonctions soient correctement normalisées. Les fonctions $u_n(x)$ sont supposées nulles à l'extérieur de l'intervalle $[0, L]$. On considère une solution $\psi(x,t)$ de l'équation de Schrödinger obéissant à la condition initiale

$$\psi(x, 0) = u_n(x)$$

Indiquer si les affirmations ci-dessous sont exactes ou inexactes.

1. $u_1(x)$ est une condition initiale physiquement acceptable
2. $u_2(x)$ est une condition initiale physiquement acceptable
3. $u_3(x)$ est une condition initiale physiquement acceptable

On justifiera les réponses en quelques lignes.

III Exercice (sur 3 points) : équilibre d'une molécule di-atomique

Les vibrations d'une molécule diatomique telle que C–O peuvent être décrites en supposant que les deux atomes sont liés par un potentiel d'oscillateur harmonique $V(R) = m\omega^2(R - R_0)^2/2$ où R est la distance séparant les deux noyaux C et O, R_0 est la distance d'équilibre de la liaison C-O, et m est la masse réduite ($1/m = 1/M_\mathrm{C} + 1/M_\mathrm{O}$)). La longueur d'onde de la radiation électromagnétique émise lors de la transition entre les deux niveaux de vibration les plus bas vaut 4.7 micromètres. Par ailleurs, on trouve dans les tables que la valeur de R_0 pour la molécule C–O est 0.11 nm quand la molécule est dans son état fondamental. Que pensez-vous de cette affirmation ?

1. Ce n'est qu'une valeur moyenne non pertinente car l'incertitude quantique sur la position relative des atomes est du même ordre de grandeur
2. C'est une quantité bien définie car l'incertitude quantique sur la distance entre C et O est bien plus petite que 0.11 nm

On justifiera la réponse en quelques lignes.

IV Problème (sur 11 points) : principe d'une horloge atomique

Depuis 1967, les unités de temps et de fréquence sont définies à partir d'une référence atomique, le césium. On considère les deux niveaux d'énergie les plus bas de cet atome, E_1 et E_2 ($E_2 > E_1$), et on pose par définition qu'une onde électromagnétique résonante avec la transition $E_1 \leftrightarrow E_2$ effectue 9 192 631 770 périodes d'oscillation en une seconde. Le but de ce problème est d'étudier comment on peut réaliser en pratique cette résonance entre l'onde électromagnétique et la transition $E_1 \leftrightarrow E_2$. Pour simplifier, on suppose dans ce problème que les niveaux d'énergie E_1 et E_2 sont non dégénérés, et on note $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ les états associés. On négligera le mouvement du centre de masse de l'atome et on restreindra la dynamique interne de l'atome au sous-espace de dimension 2 engendré par $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$. En absence d'onde électromagnétique, l'hamiltonien de l'atome de césium s'écrit donc dans la base $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$:

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

On notera $|\psi(t)\rangle = a_1(t)|\psi_1\rangle + a_2(t)|\psi_2\rangle$ l'état de l'atome à un instant t quelconque.

1. En absence d'onde électromagnétique, donner l'expression de $a_1(t)$ et $a_2(t)$ en fonction de $a_1(0)$ et $a_2(0)$. Si l'atome est préparé à l'instant $t = 0$ dans l'état $|\psi_1\rangle$, quelle est la probabilité $P_2(t)$ de le trouver dans l'état $|\psi_2\rangle$ à l'instant t ?

2. On envoie sur l'atome une onde électromagnétique de pulsation ω. On supposera que le couplage (d'origine magnétique) entre l'atome et l'onde peut s'écrire dans la base $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle\}$:

$$\hat{V}(t) = v(t)\, \cos(\omega t)\, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

où la quantité $v(t)$ est proportionnelle à l'amplitude de l'onde électromagnétique. L'hamiltonien total du système est alors $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$.

À partir de l'équation de Schrödinger, exprimer da_1/dt et da_2/dt en fonction de $a_1(t)$, $a_2(t)$ et des paramètres du problème ($E_1, E_2, \omega, v(t)$). On ne cherchera pas à résoudre ce système différentiel.

3. On suppose que l'atome est préparé à l'instant $t = 0$ dans l'état $|\psi_1\rangle$. Montrer que l'on a pour $t > 0$

$$a_2(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t v(t')\ \cos(\omega t')\ a_1(t')\ e^{-iE_2(t-t')/\hbar}\ dt'. \tag{3}$$

4. À partir de (3), on peut obtenir une valeur approchée de $a_2(t)$, valable à l'ordre 1 en v, en prenant pour $a_1(t')$ le résultat à l'ordre 0 en v trouvé en question 1. Donner cette expression approchée de $a_2(t)$ en supposant que $a_1(0) = 1$.

5. On suppose à partir de maintenant que la quantité $v(t)$ est donnée par la fonction en « double créneau » représentée sur la figure 1. Cette fonction vaut v_0 dans les deux intervalles de largeur 2τ centrés respectivement en t_a et t_b, et elle est nulle partout ailleurs. Que vaut P_2 pour $t < t_a - \tau$?

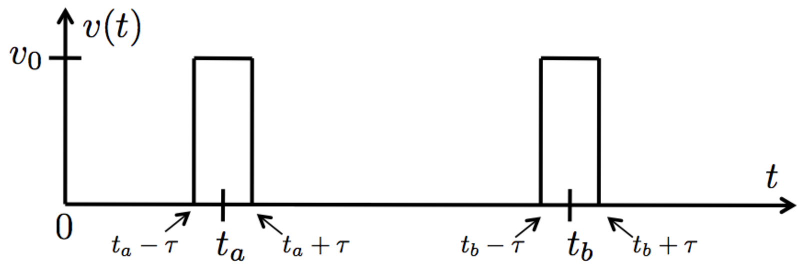

FIGURE 1 – Fonction en double créneau donnant le couplage entre l'atome et l'onde électro-magnétique, correspondant à la méthode des *franges de Ramsey*.

6. On s'intéresse aux temps t compris entre les deux créneaux : $t_a + \tau < t < t_b - \tau$.

(a) Donner l'expression de $a_2(t)$. On mettra cette expression sous forme d'une somme de deux termes, respectivement proportionnels à $1/(\omega - \omega_0)$ et $1/(\omega + \omega_0)$, où on a posé $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$.

(b) On suppose que la pulsation ω de l'onde est choisie proche de la pulsation de résonance atomique ω_0 : $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$. Expliquer pourquoi ceci permet de négliger (sauf cas particulier) l'un des deux termes intervenant dans l'expression de $a_2(t)$. Donner l'expression ainsi simplifiée de P_2. On mettra cette expression sous la forme

$$P_2 = \left(\frac{v_0 \tau}{\hbar}\right)^2 F(\Delta\tau), \tag{4}$$

où $\Delta = \omega - \omega_0$ et où F est une fonction mathématique que l'on précisera.

(c) Tracer P_2 en fonction de Δ. Expliquer en quoi cette variation permet de verrouiller la fréquence de l'onde électromagnétique sur la transition $E_1 \leftrightarrow E_2$ de l'atome.

(d) Comment varient les valeurs respectives de la précision de la mesure de fréquence et de la durée de cette mesure ? Discuter le résultat obtenu en terme de « relation d'incertitude » associée à la transformée de Fourier temps-fréquence.

7. On s'intéresse aux temps t après le deuxième créneau : $t > t_b + \tau$.

(a) En continuant à utiliser l'approximation découlant de $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$, calculer $a_2(t)$.

(b) Calculer et tracer P_2 en fonction de Δ. Montrer en particulier que cette quantité oscille rapidement avec une période qu'on reliera à $T = t_b - t_a$. On supposera $T \gg \tau$ pour évaluer la largeur du pic central de la fonction $P_2(\Delta)$.

(c) Interpréter ce phénomène d'oscillation en terme d'interférences entre deux « chemins quantiques » conduisant d'un même état initial vers un même état final.

8. La précision avec laquelle on peut ajuster la fréquence de l'onde électromagnétique sur la transition atomique dépend de la largeur à mi-hauteur de la courbe de résonance.

(a) Que gagne-t-on à utiliser une fonction en double créneau au lieu d'un simple créneau de largeur $\tau \ll T$?

(b) Pouvez-vous donner une raison (de nature technique) pour laquelle il est préférable d'utiliser deux créneaux de durée $\tau \ll T$ et séparés de T, plutôt qu'une seule impulsion de durée T ?

9. Un résultat de mesure de P_2, obtenu avec une *fontaine atomique* est donné en figure 2. Commenter ce résultat en précisant les valeurs de T et τ utilisées. Quelles sont les différences notables entre ce résultat expérimental et les prédictions du modèle perturbatif étudié plus haut ?

10. En admettant que l'on sache pointer le centre de la raie montré dans l'insert de la figure 2 avec une précision relative de 10^{-4} par rapport à la largeur de la frange centrale, quelle est la précision relative de l'horloge ainsi obtenue (erreur sur la mesure de fréquence, divisée par la fréquence mesurée) ? Quelle est l'incertitude sur le temps indiqué par une telle horloge au bout d'un siècle de fonctionnement ?

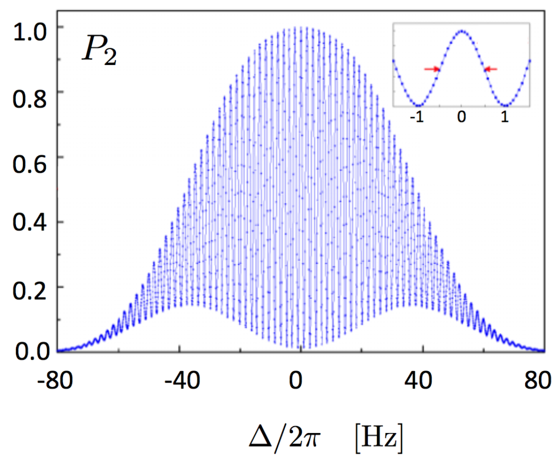

FIGURE 2 – Résultat expérimental pour la probabilité P_2 de trouver un atome de césium dans l'état $|\psi_2\rangle$ après une excitation en double créneau. L'insert en haut à droite représente un zoom sur la partie centrale de la courbe principale.

Corrigé

I Exercice : transmission d'une marche de potentiel

Réponse 3.
Dans la zone où le potentiel est égal à V_0, la fonction d'onde varie comme $e^{-\kappa x}$, avec $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$. Le courant de probabilité est nul et il n'y a donc pas de propagation dans la zone classiquement interdite : la probabilité de transmission est nulle. En revanche, même s'il s'agit d'une région classiquement interdite, la probabilité de présence de la particule quantique dans cette zone n'est pas nulle. L'argument sur le signe de l'énergie cinétique est fondé sur un raisonnement classique, non pertinent ici. La densité de probabilité décroît comme $e^{-2\kappa x}$ dans cette zone interdite classiquement.

II Exercice : fonction d'onde d'une particule dans un puits infini

Les affirmations 1 et 3 sont exactes.
Contrairement à $u_1(x)$ et $u_3(x)$, la fonction $u_2(x)$ n'est pas continue en $x = 0$ et $x = L$ et n'est donc pas physiquement acceptable. Contrairement à $u_1(x)$, la fonction $u_3(x)$ n'est pas un état propre du hamiltonien et n'est donc pas une solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps. Mais c'est une condition initiale parfaitement acceptable pour l'équation de Schrödinger dépendant du temps. Donc seules $u_1(x)$ et $u_3(x)$ sont des conditions initiales physiquement acceptables.

III Exercice : équilibre d'une molécule di-atomique

Réponse 2.
Pour un oscillateur harmonique préparé dans son état fondamental, l'incertitude sur R est donnée par $\Delta R = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}$. On a ici $\hbar\omega = hc/\lambda = 4.2\,10^{-20}$ J, soit $\omega = 4\;10^{14}\,\mathrm{s}^{-1}$. La masse réduite vaut $m = 1.14\;10^{-26}$ kg et on trouve donc $\Delta R \approx 3\;10^{-12}$ m. Cette incertitude est très petite devant 0.11 nm et la distance entre C et O est donc bien définie.

IV Problème : principe d'une horloge atomique

1. $a_j(t) = a_j(0)\, e^{-iE_j t/\hbar}$, $j = 1, 2$.
Si $a_2(0) = 0$, $P_2(t) = 0$ à tout temps.

2. L'équation de Schrödinger donne :

$$i\hbar\frac{da_1}{dt} = E_1 a_1 + v(t)\,\cos(\omega t)\,a_2(t) \qquad i\hbar\frac{da_2}{dt} = E_2 a_2 + v(t)\,\cos(\omega t)\,a_1(t) \tag{5}$$

3. L'équation sur a_2 s'intègre par exemple par la méthode « de variation de la constante » :

$$a_2(t) = a_2(0)\,e^{-iE_2 t/\hbar} + \frac{1}{i\hbar}\int_0^t v(t')\,\cos(\omega t')\,a_1(t')\,e^{-iE_2(t-t')/\hbar}\,dt'. \tag{6}$$

On retrouve le résultat de l'énoncé pour $a_2(0) = 0$.

4. Développement perturbatif : on injecte $a_1(t') = \exp(-iE_1 t'/\hbar)$, et on obtient

$$a_2(t) = \frac{e^{-iE_2 t/\hbar}}{i\hbar}\int_0^t v(t')\,\cos(\omega t')\,e^{i(E_2-E_1)t'/\hbar}\,dt'. \tag{7}$$

5. Pour $t < t_a - \tau$, $P_2 = 0$.

6. **(a)**

$$a_2(t) = \frac{v_0 e^{-iE_2t/\hbar}}{i\hbar} \left(e^{i(\omega+\omega_0)t_a} \frac{\sin[(\omega+\omega_0)\tau]}{\omega+\omega_0} + e^{i(\omega_0-\omega)t_a} \frac{\sin[(\omega-\omega_0)\tau]}{\omega-\omega_0} \right) \tag{8}$$

(b) On néglige le terme en $1/(\omega+\omega_0)$ et on trouve :

$$P_2(\Delta) = \left(\frac{v_0\tau}{\hbar}\right)^2 F(\Delta\tau) \qquad \text{avec} \quad F(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2. \tag{9}$$

(c) Largeur totale à mi-hauteur de cette courbe en Δ : $\approx \pi/\tau$, soit $\Delta\tau \approx \pi$ avec Δ= précision et τ=temps de mesure.

7. **(a)** En ne gardant que les termes en $1/(\omega-\omega_0)$, on trouve :

$$a_2(t) = \frac{v_0 e^{-iE_2t/\hbar}}{i\hbar} \frac{\sin(\Delta\tau)}{\Delta} \left(e^{-i\Delta t_a} + e^{-i\Delta t_b}\right) \tag{10}$$

(b)

$$P_2(\Delta) = 4\cos^2(\Delta T/2) \left(\frac{v_0\tau}{\hbar}\right)^2 F(\Delta\tau) \tag{11}$$

Largeur totale à mi-hauteur du pic central si $T \gg \tau$: π/T.

(c) Dans cette image perturbative, l'atome peut transiter de $|\psi_1\rangle$ vers $|\psi_2\rangle$ durant le premier pulse ou durant le second et on additionne les amplitudes correspondantes. Le terme en $4\cos^2(\Delta T/2)$ correspond à l'interférence de ces deux chemins.

8. **(a)** Avec le double créneau (franges de Ramsey) on remplace une largeur en π/τ par une largeur en π/T. La précision est donc bien meilleure.

(b) On pourrait aussi essayer d'avoir un temps d'interaction avec l'onde durant toute la durée T, mais c'est beaucoup plus difficile à réaliser car il faut assurer l'homogénéité de l'onde sur une grande distance.

9. $\tau = 9\,\text{ms}$, $T = 0.5\,\text{s}$. L'expérience n'est pas dans la limite perturbative, puisque la probabilité de transition approche 1. Par ailleurs, il y a un certain brouillage des franges sur les ailes, dû essentiellement à une dispersion des vitesses des atomes et donc des temps T.

10. Précision relative de 10^{-14}, correspondant à 30 microsecondes par siècle.