

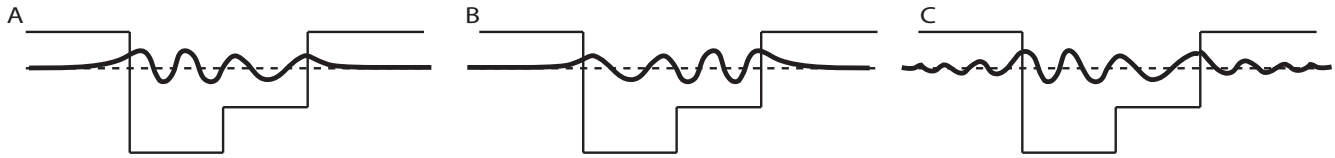
CONTRÔLE DU COURS DE PHYSIQUE PHY311

Lundi 12 juillet 2010, durée : 2 heures

Documents autorisés : cours, recueil de problèmes, copies des diapositives, notes de PC
Indiquer le numéro de votre groupe de PC sur votre copie.

I Exercice (sur 3 points) : particule dans un potentiel

On considère une particule piégée dans le puits de potentiel asymétrique représenté ci-dessous. On s'intéresse plus particulièrement au niveau d'énergie indiqué en pointillé. Parmi les trois courbes représentées, laquelle peut correspondre à la fonction d'onde de ce niveau ?



- Figure A
- Figure B
- Figure C

On justifiera la réponse en quelques lignes.

II Exercice (sur 3 points) : détecteur infrarouge à puits quantique

On souhaite fabriquer un détecteur de lumière infra-rouge sensible à la longueur d'onde lumineuse $\lambda = 17 \mu\text{m}$, émise par un corps à température ambiante. On utilise un puits quantique à base de matériau semi-conducteur (arséniure de gallium) pour lequel on sait que la masse m_0 de l'électron libre doit être remplacée par la masse effective $m_{\text{eff}} = 0.067 m_0$. Pour quelle taille L du puits la transition entre l'état fondamental et le premier état excité est-elle résonnante avec un photon du rayonnement qu'on souhaite détecter ? On modélisera ce puits quantique par un puits carré infini à une dimension.

- $L = 15 \text{ nm}$
- $L = 1 \mu\text{m}$
- $L = 15 \mu\text{m}$

On justifiera la réponse en quelques lignes.

On rappelle $c = 3.0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, $h = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$, $m_0 = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

III Exercice (sur 3 points) : oscillateur harmonique

On considère un oscillateur harmonique à une dimension de masse m et de pulsation ω , centré en $x = 0$. On utilise l'unité de longueur $\sqrt{\hbar/(m\omega)}$. Les états propres de l'hamiltonien sont notés $\phi_n(x)$, les énergies associées étant $(n + 1/2)\hbar\omega$. L'oscillateur est préparé à l'instant initial $t = 0$ dans l'état

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_0(x) + \phi_1(x))$$

et on effectue une mesure de la position à l'instant ultérieur $t = \pi/\omega$. Laquelle de ces affirmations est vraie :

- (a) Du fait de la symétrie du potentiel, on ne peut trouver que $x = 0$.
- (b) Toutes les valeurs réelles de x ont une densité de probabilité non nulle d'apparaître.
- (c) Toutes les valeurs réelles de x , sauf une valeur isolée, ont une densité de probabilité non nulle d'apparaître.

On rappelle les fonctions d'onde :

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp(-x^2/2) \quad \phi_1(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \sqrt{2} x \exp(-x^2/2)$$

On justifiera la réponse en quelques lignes.

IV Problème (sur 11 points) : détection « non destructive » de bombes

On dispose de bombes qui peuvent exister sous deux formes, réelles ou factices (figure 1). La différence entre une bombe réelle et une bombe factice est la suivante : quand un neutron tape sur une bombe réelle, le neutron est absorbé et la bombe explose ; au contraire, une bombe factice transmet le neutron sans exploser et sans changer l'état du neutron. Le but du problème est de proposer une méthode (quantique !) permettant de déterminer avec une bonne probabilité si une bombe donnée est réelle ou factice, sans la faire exploser.

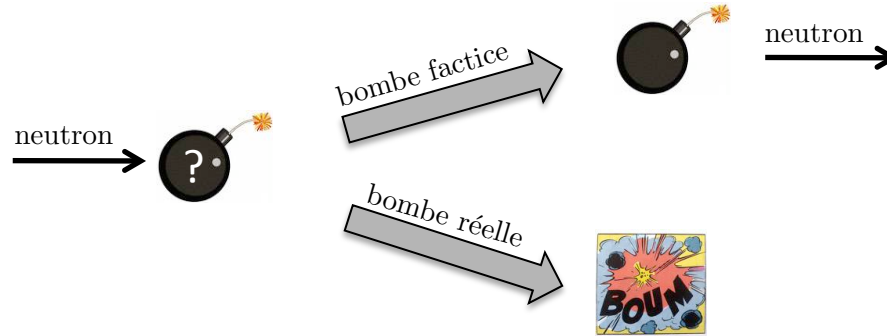


FIGURE 1 – Une bombe factice transmet un neutron incident sans exploser. Une bombe réelle explose quand elle est heurtée par le neutron.

1. Lemme. On considère un système quantique d'hamiltonien $\hat{H}(t)$. On se donne deux solutions quelconques $|\psi(t)\rangle$ et $|\psi'(t)\rangle$ de l'équation de Schrödinger. Montrer que le produit scalaire $\langle\psi(t)|\psi'(t)\rangle$ ne varie pas dans le temps.

2. Un séparateur de faisceaux pour neutrons. On envoie un neutron sur une lame matérielle L (figure 2). Cette lame crée une barrière de potentiel sur laquelle le neutron peut être transmis ou réfléchi. On rappelle que l'étude du mouvement de la particule peut se faire de deux façons équivalentes :

- (i) On décrit l'état du neutron par des paquets d'ondes qui évoluent dans le temps.
- (ii) On suppose que le neutron est dans un état d'énergie E bien définie et on décrit son état par des superpositions de quelques ondes planes.

Dans cette question 2 ainsi que dans les questions 3 et 4, on utilise le point de vue (i). Dans la question 5, on utilisera le point de vue (ii).

- (a) On suppose qu'à l'instant t_0 , avant de toucher la lame, l'état du neutron est

$$|\psi(t_0)\rangle = |\phi_1\rangle \tag{1}$$

où $|\phi_1\rangle$ représente le paquet d'ondes incident représenté sur la figure 2. L'interaction du neutron avec la lame est décrite par un hamiltonien qu'on ne cherchera pas à écrire explicitement. À l'instant ultérieur t_1 , l'état du neutron est une superposition de l'état $|\phi_3\rangle$ (le neutron a été réfléchi par la lame) et de l'état $|\phi_4\rangle$ (le neutron a été transmis par la lame) :

$$|\psi(t_1)\rangle = \rho|\phi_3\rangle + \tau|\phi_4\rangle \tag{2}$$

où $\langle\phi_i|\phi_j\rangle = \delta_{i,j}$ ($i, j = 1, 3, 4$). Les coefficients ρ et τ sont choisis réels et positifs ou nuls. Expliquer pourquoi $\rho^2 + \tau^2 = 1$.

- (b) On suppose qu'on envoie maintenant le neutron par l'autre voie d'entrée, dans l'état symétrique de $|\phi_1\rangle$ par rapport à la lame :

$$|\psi'(t_0)\rangle = |\phi_2\rangle \tag{3}$$

tel que $\langle\phi_j|\phi_2\rangle = \delta_{j,2}$, ($j = 1, \dots, 4$). L'état à l'instant t_1 s'écrit alors

$$|\psi'(t_1)\rangle = \tau'|\phi_3\rangle + \rho'|\phi_4\rangle . \tag{4}$$

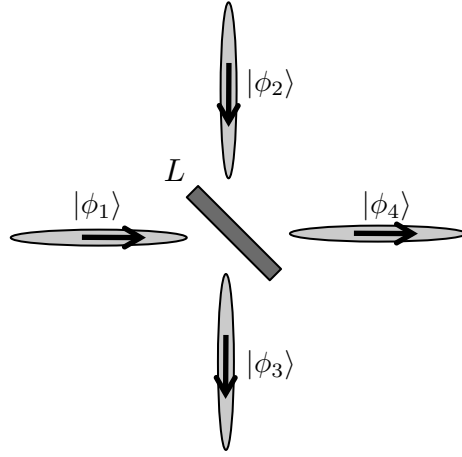


FIGURE 2 – *Lame semi-réfléchissante pour neutron.*

En utilisant le lemme, expliquer pourquoi les coefficients τ' et ρ' vérifient :

$$|\rho'|^2 + |\tau'|^2 = 1, \quad \tau\rho' + \rho\tau' = 0. \quad (5)$$

Note. On prendra dans la suite $\tau' = \tau$, $\rho' = -\rho$. On décrira donc l'action de la lame semi-réfléchissante par

$$|\phi_1\rangle \quad \text{évolue vers} \quad \rho|\phi_3\rangle + \tau|\phi_4\rangle, \quad (6)$$

$$|\phi_2\rangle \quad \text{évolue vers} \quad \tau|\phi_3\rangle - \rho|\phi_4\rangle. \quad (7)$$

3. Un interféromètre de Mach-Zehnder pour neutrons. On considère le dispositif représenté sur la figure 3 composé de deux lames semi-réfléchissantes identiques L et L' et de deux miroirs parfaits M_a et M_b . On définit les instants t_0, \dots, t_3 de la manière suivante :

t_0 : le neutron est dans l'état $|\psi(t_0)\rangle = |\phi_1\rangle$, en amont de la première lame L .

t_1 : après interaction avec L , l'état du neutron est dans la superposition (6) de $|\phi_3\rangle$ et $|\phi_4\rangle$.

t_2 : le neutron s'est propagé dans l'interféromètre. Dans cette propagation,

$$|\phi_3\rangle \quad \text{évolue vers} \quad e^{i\Delta_a} |\phi'_1\rangle, \quad (8)$$

$$|\phi_4\rangle \quad \text{évolue vers} \quad e^{i\Delta_b} |\phi'_2\rangle, \quad (9)$$

où $|\phi'_1\rangle$ et $|\phi'_2\rangle$ sont les états entrants de la deuxième lame L' , et où les phases Δ_a et Δ_b peuvent être ajustées par l'expérimentateur.

t_3 : le neutron a interagi avec la lame L' et son état peut s'écrire à cet instant

$$|\psi(t_3)\rangle = \alpha|\phi'_3\rangle + \beta|\phi'_4\rangle. \quad (10)$$

L'évolution des états $|\phi'_{1,2}\rangle$ vers les états $|\phi'_{3,4}\rangle$ lors de l'interaction avec L' se fait de manière similaire à (6)-(7).

- (a) Montrer que la probabilité P_B de détecter le neutron dans la voie de sortie B de l'interféromètre, c'est-à-dire dans l'état $|\phi'_4\rangle$, est égale à

$$P_B = 2\rho^2\tau^2(1 - \cos \Delta), \quad (11)$$

où on a posé $\Delta = \Delta_a - \Delta_b$.

- (b) Calculer de même la probabilité P_A de trouver le neutron dans la voie de sortie A .
(c) Que vaut $P_A + P_B$? Commenter ce résultat.
(d) Montrer qu'il existe des choix de phase Δ pour lesquels on est certain que le neutron sortira dans la voie A , quels que soient les coefficients ρ et τ . On fera ce choix de phase dans la question suivante.

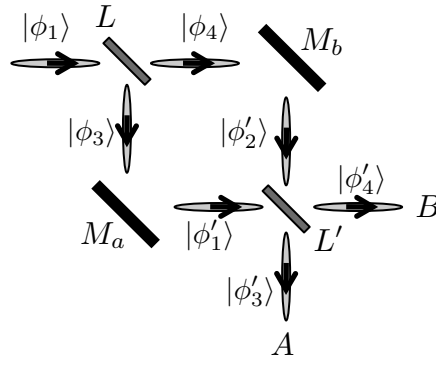


FIGURE 3 – Interféromètre de Mach-Zehnder pour le neutron.

4. Un premier pas vers la détection « non destructive » de bombes.

On dispose d'une bombe dont on ignore si elle est réelle ou factice. On la place sur le bras LM_bL' de l'interféromètre de la figure 3.

- Si la bombe est factice, quelles sont les probabilités de trouver le neutron dans les voies de sortie A et B ? On rappelle qu'on a fait le choix de phase trouvé à la question 3(d).
- Si la bombe est réelle, quelle est la probabilité qu'elle explose?
- On suppose que la bombe est réelle et qu'elle n'a pas explosé quand le neutron a traversé l'interféromètre. Quelles sont les probabilités de détecter ce neutron dans les voies de sortie A et B ?
- Dans quel cas est-on certain que la bombe est réelle sans qu'elle ait explosé?
- On définit un *facteur de mérite* F qui est la probabilité de détecter une bombe réelle sans la faire exploser. Que vaut le facteur de mérite $F(\rho, \tau)$ pour l'interféromètre de la figure 3?
- Quel est le couple (ρ, τ) qui maximise le facteur de mérite?

5. Vers une détection « non destructive » arbitrairement bonne. On réalise maintenant l'interféromètre linéaire (de type Fabry-Perot) représenté sur la figure 4, les lames L et L' étant toujours identiques, mais placées perpendiculairement au trajet du neutron. On note D la distance entre les lames. On modélise l'état d'un neutron par une superposition d'ondes planes $e^{\pm ikx}$, où k est le vecteur d'onde du neutron. Les amplitudes η, μ, ν, ξ des différentes ondes dépendent de la région considérée et sont indiquées sur la figure 4. On donne par convention une amplitude de 1 à l'onde incidente arrivant de $x = -\infty$. Les amplitudes des ondes planes $e^{\pm ikx}$ de part et d'autre d'une lame sont reliées par les mêmes coefficients τ et ρ que ceux utilisés ci-dessus.

- Au niveau de la lame L .** Justifier que l'on a $\mu = \tau - \rho\nu$ et $\eta = \rho + \tau\nu$.
- Au niveau de la lame L' .** Justifier que l'on a $\xi e^{ikD} = \tau\mu e^{ikD}$ et $\nu e^{-ikD} = \rho\mu e^{ikD}$.
- Montrer que pour tout choix de (ρ, τ) , il existe des valeurs de D pour lesquelles on est certain qu'un neutron incident sera transmis par cet interféromètre (c'est-à-dire $|\xi| = 1$ et $\eta = 0$).
- On suppose qu'une bombe, réelle ou factice, est placée entre L et L' . Montrer qu'on peut atteindre des facteurs de mérite arbitrairement proches de 1 pour la détection d'une bombe réelle.

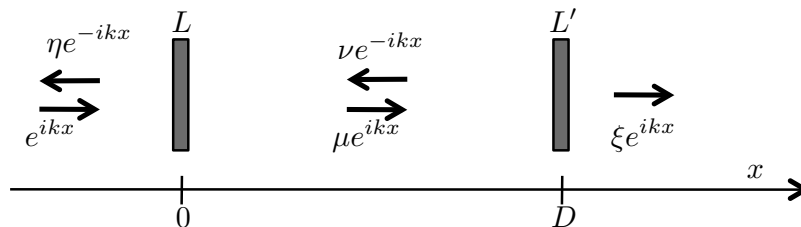


FIGURE 4 – Interféromètre permettant d'atteindre une détection « non destructive » efficace.

Corrigé

I Exercice : particule dans un potentiel

La figure C ne peut pas convenir puisque la fonction d'onde dans les régions interdites n'a pas un comportement oscillant. Elle est du type $e^{-\kappa x}$ complètement à droite et $e^{+\kappa x}$ complètement à gauche. La différence entre les figures A et B porte sur la fréquence spatiale de l'oscillation dans les régions permises. On sait que le vecteur d'onde k correspondant est proportionnel à $\sqrt{E - V}$; par conséquent, plus E et V sont proches, plus k est petit. Ce vecteur d'onde doit donc être plus petit (période spatiale plus grande) dans la partie droite du puits que dans la partie gauche. C'est bien le cas pour la figure A, alors que c'est l'inverse pour la figure B.

II Exercice : détecteur infrarouge à puits quantique

L'énergie nécessaire pour provoquer la transition dans le puits quantique est

$$E_2 - E_1 = \frac{3\pi^2\hbar^2}{2m_{\text{eff}}L^2}. \quad (12)$$

On veut que cette énergie soit égale à $hc/\lambda = 1.2 \cdot 10^{-20} \text{ J} = 70 \text{ meV}$, ce qui conduit à $L = 15 \text{ nm}$.

III Exercice : oscillateur harmonique

La densité de probabilité pour trouver l'oscillateur au point x est $\mathcal{P}(x, t) = |\psi(x, t)|^2$. La fonction d'onde à l'instant t vaut

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\phi_0(x) e^{-i\omega t/2} + \phi_1(x) e^{-3i\omega t/2} \right) = \frac{e^{-i\omega t/2}}{\sqrt{2}} \frac{e^{-x^2/2}}{\pi^{1/4}} \left(1 + \sqrt{2} x e^{-i\omega t} \right). \quad (13)$$

À l'instant $t = \pi/\omega$, on trouve donc la densité de probabilité pour la position de la particule :

$$\mathcal{P}(x, t) = \frac{e^{-x^2}}{2\sqrt{\pi}} \left| 1 - \sqrt{2} x \right|^2 \quad (14)$$

qui est non nulle partout sauf au point $x = 1/\sqrt{2}$. La réponse correcte est donc (c).

IV Problème : détection non destructive de bombes

1. **Lemme.** $|\psi(t)\rangle$ et $|\psi'(t)\rangle$ sont deux solutions de $i\hbar|\dot{\psi}\rangle = \hat{H}(t)|\psi\rangle$. Par conséquent :

$$\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \psi'(t) \rangle = \left(\frac{i}{\hbar} \langle \psi(t) | \hat{H}^\dagger(t) \right) |\psi'(t)\rangle + \langle \psi(t) | \left(\frac{-i}{\hbar} \hat{H}(t) |\psi'(t)\rangle \right) = 0, \quad (15)$$

où on a utilisé le fait que l'hamiltonien \hat{H} est hermitien : $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$. Ce résultat prouve en particulier que
– un état initialement normé le reste au cours de l'évolution,
– deux états initialement orthogonaux le restent au cours de l'évolution.

2. **Un séparateur de faisceau pour neutrons.**

(a) Puisque l'état initial est normé, l'état final doit l'être également. Comme les états ϕ_3 et ϕ_4 sont supposés orthogonaux, on a $\rho^2 + \tau^2 = 1$. Ce résultat exprime que la somme des probabilités d'avoir une réflexion (ρ^2) et une transmission (τ^2) est égale à 1.

(b) L'état initial est là aussi normé, et l'état final doit l'être également, d'où $|\rho'|^2 + |\tau'|^2 = 1$. Par ailleurs l'état initial $|\phi_2\rangle$ est orthogonal à l'état initial $|\phi_1\rangle$. Les états finaux $\rho|\phi_3\rangle + \tau|\phi_4\rangle$ et $\tau'|\phi_3\rangle + \rho'|\phi_4\rangle$ correspondants doivent donc également être orthogonaux, ce qui donne $\rho\tau' + \rho'\tau = 0$. Cette condition est bien satisfaite pour le choix proposé par l'énoncé : $\rho' = -\rho$, $\tau' = \tau$.

3. Un interféromètre de Mach-Zehnder pour neutrons.

(a) À l'instant t_3 , juste avant la traversée de la lame L' , l'état du neutron est :

$$|\psi(t_3)\rangle = \rho e^{i\Delta_a} |\phi'_1\rangle + \tau e^{i\Delta_b} |\phi'_2\rangle . \quad (16)$$

Juste après la traversée de la lame L' , l'état est donc

$$|\psi(t_4)\rangle = \rho e^{i\Delta_a} (\rho|\phi'_3\rangle + \tau|\phi'_4\rangle) + \tau e^{i\Delta_b} (\tau|\phi'_3\rangle - \rho|\phi'_4\rangle) \quad (17)$$

$$= (e^{i\Delta_a}\rho^2 + e^{i\Delta_b}\tau^2) |\phi'_3\rangle + \rho\tau (e^{i\Delta_a} - e^{i\Delta_b}) |\phi'_4\rangle . \quad (18)$$

La probabilité P_B de trouver le neutron dans la voie B correspondant à l'état $|\phi'_4\rangle$ vaut :

$$P_B = |\rho\tau (e^{i\Delta_a} - e^{i\Delta_b})|^2 = 2\rho^2\tau^2(1 - \cos \Delta) . \quad (19)$$

(b) La probabilité P_A vaut quant à elle

$$P_A = |e^{i\Delta_a}\rho^2 + e^{i\Delta_b}\tau^2|^2 = \rho^4 + \tau^4 + 2\rho^2\tau^2 \cos \Delta . \quad (20)$$

(c) On trouve que $P_A + P_B = (\rho^2 + \tau^2)^2 = 1$, ce qui était bien sûr attendu. En absence d'absorption au niveau des lames ou des miroirs, on est certain que le neutron incident sortira dans une des deux voies A ou B .

(d) Si on choisit $\Delta = 0$ (modulo 2π), on trouve que $P_B = 0$ quelle que soit la valeur du couple (ρ, τ) : les deux chemins « réflexion sur L – transmission sur L' » et « transmission sur L – réflexion sur L' » interfèrent destructivement pour la voie de sortie B .

4. Un premier pas vers la détection « non destructive » de bombes.

(a) Si la bombe est factice, elle n'a aucune influence sur l'état du neutron. On est certain de trouver le neutron dans la voie de sortie A : $P_A = 1$, $P_B = 0$.

(b) L'état du neutron après la lame L est $\rho|\phi_3\rangle + \tau|\phi_4\rangle$. Regarder si une bombe réelle située au niveau du miroir M_b explose ou non revient à mesurer si le neutron a été réfléchi ou transmis sur la lame L . La probabilité que la bombe explose est le module carré du coefficient de $|\phi_4\rangle$, c'est-à-dire τ^2 .

(c) Si la bombe est réelle et n'a pas explosé, c'est que le neutron est passé par le chemin LM_aL' et il est donc incident sur la lame L' dans l'état $|\phi'_1\rangle$. Après traversée de cette lame L' , son état est $\rho|\phi'_3\rangle + \tau|\phi'_4\rangle$. Les probabilités de détecter ce neutron dans les voies de sortie A et B sont donc respectivement ρ^2 et τ^2 .

(d) Si après le passage du neutron dans l'interféromètre, la bombe n'a pas explosé et si le neutron est détecté dans la voie de sortie B , alors on est certain que la bombe était réelle. En revanche, si le neutron est détecté dans la voie A , on ne peut rien conclure.

(e) Le facteur de mérite est le produit de deux probabilités : pour que la bombe réelle soit détectée de manière non destructive, il faut que la bombe n'explose pas (probabilité ρ^2 d'après la question b) et il faut que le neutron soit détecté dans la voie B (probabilité τ^2 d'après la question c). On a donc $F = \rho^2\tau^2$.

(f) On doit maximiser le produit $\rho^2\tau^2$ en gardant la somme $\rho^2 + \tau^2$ égale à 1. Le maximum est atteint pour $\rho^2 = \tau^2 = 1/2$, et le facteur de mérite vaut alors $1/4$. Dans ce cas, la moitié des bombes réelles explosent. Sur la moitié restante, seulement 50% donnent lieu à une détection du neutron en B et sont ainsi repérées de manière non destructive. C'est mieux que rien, mais ce n'est pas encore très efficace...

5. Vers une détection « non destructive » arbitrairement bonne.

(a) Au point $x = 0$, on a deux ondes incidentes, une depuis la gauche (e^{ikx}) et l'autre depuis la droite (νe^{-ikx}). Ces deux ondes donnent naissance à deux ondes s'éloignant de la lame, l'une vers la droite (μe^{ikx}) et l'autre vers la gauche (ηe^{-ikx}). En utilisant (6) et (7), on trouve que les amplitudes de ces différentes ondes sont reliées par

$$\mu = \tau - \rho\nu \quad \eta = \rho + \tau\nu . \quad (21)$$

(b) Au point $x = D$, on a une seule onde incidente d'amplitude complexe μe^{ikD} qui peut être réfléchi ou transmise. On a donc en ce point :

$$\xi e^{ikD} = \tau \mu e^{ikD} \quad \nu e^{-ikD} = \rho \mu e^{ikD} . \quad (22)$$

(c) On exprime ν en fonction de μ à l'aide de (22), $\nu = \rho \mu e^{2ikD}$, et on reporte ce résultat dans (21), ce qui donne :

$$\mu = \frac{\tau}{1 + \rho^2 e^{2ikD}} . \quad (23)$$

On peut alors en déduire les amplitudes transmises (ξ) et réfléchies (η) par cet interféromètre de type Fabry–Perot :

$$\xi = \frac{\tau^2}{1 + \rho^2 e^{2ikD}} \quad \eta = \rho \frac{1 + e^{2ikD}}{1 + \rho^2 e^{2ikD}} . \quad (24)$$

On peut vérifier qu'on a bien $|\xi|^2 + |\eta|^2 = 1$. Par ailleurs le choix $2kD = \pi$ modulo 2π conduit à $\xi = 1$, $\eta = 0$. Même si les coefficients de réflexion de chaque lame sont très proches de 1, on peut avoir une transmission parfaite si la distance D entre les lames est bien choisie.

(d) On se place dans la situation où $2kD = \pi$ modulo 2π . Si la bombe est factice, on est certain que le neutron sera transmis par le dispositif. Placer une bombe réelle entre les deux lames revient à mesurer si le neutron a été transmis (probabilité τ^2) ou réfléchi (probabilité ρ^2) par la première lame, la bombe explosant dans le premier cas et pas dans le second.

Pour obtenir un bon facteur de mérite, il faut choisir ρ très proche de 1 (et donc τ très proche de 0), envoyer un neutron depuis la gauche, et détecter si ce neutron est transmis ou réfléchi. Avec une bombe factice, le neutron sera détecté avec certitude dans l'onde transmise ξe^{ikx} . Avec une bombe réelle, on aura soit une explosion (avec une très faible probabilité τ^2), soit un neutron réfléchi dans l'onde ηe^{-ikx} (avec une probabilité ρ^2 voisine de 1). La détection d'un neutron réfléchi permet donc de s'assurer de manière « non destructive » de la présence d'une bombe réelle. Le facteur de mérite vaut $\rho^2 \sim 1$.

Pour en savoir plus, voir par exemple *The Elitzur-Vaidman bomb tester*, Wikipedia.